

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

Conceitos básicos

Experimento aleatório ou fenômeno aleatório

Situações ou acontecimentos cujos resultados não podem ser previstos com certeza.

Um experimento ou fenômeno que, se for observado em **condições idênticas**, pode apresentar **diferentes resultados** é chamado de experimento ou fenômeno aleatório.



Conceitos básicos

Exemplos

- Condições climáticas do próximo domingo.
- Taxa de inflação do próximo mês.
- Condição de um item produzido.
- Resultado do lançamento de um dado.
- Tempo de duração de uma lâmpada.
- Observação do número de veículos que passam por um praça de pedágio durante um certo intervalo.
- Tábua de Galton:

<http://www.mathsisfun.com/probability/quincunx.html>

<http://www.jcu.edu/math/isep/Quincunx/Quincunx.html>

Conceitos básicos

Espaço amostral (Ω)

Conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento ou fenômeno aleatório.

Exemplos

1. Lançamento de um dado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ ou $\Omega = \{ \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array} \}$
2. Observação do tipo sanguíneo de um indivíduo: $\Omega = \{A, B, AB, 0\}$
3. Condição de um item produzido: $\Omega = \{\text{defeituoso, não defeituoso}\}$
4. Número de veículos que passam por uma praça de pedágio durante um certo intervalo: $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$
5. Tempo de duração de uma lâmpada (em h): $\Omega = (0, \infty)$

Exemplo

Lançamento de um dado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Evento

Subconjunto do espaço amostral Ω .

Notação: A, B, C,...

Exemplos. Eventos do exemplo acima:

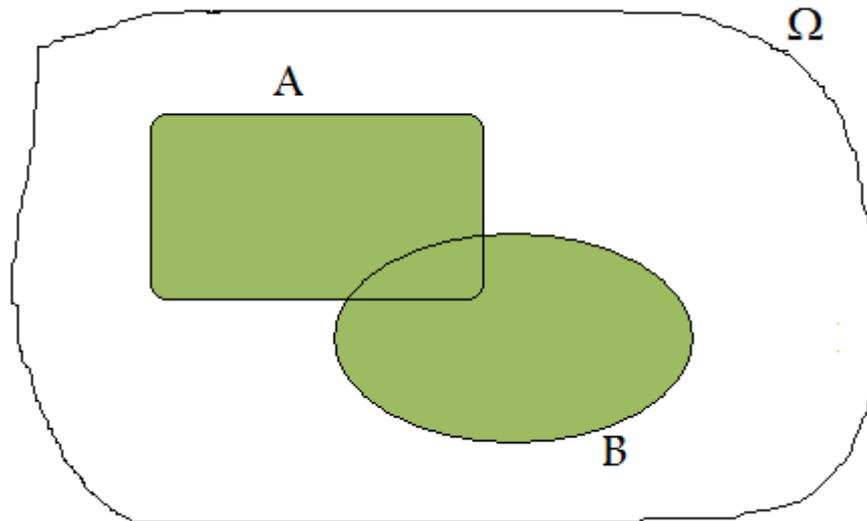
- A. Resultado é par: $A = \{2, 4, 6\}$ (evento composto)
- B. Resultado é maior do que 3: $B = \{4, 5, 6\}$ (evento composto)
- C. Resultado igual a 1: $C = \{1\}$ (evento simples)
- D. Resultado maior do que 6: $D = \emptyset$ (evento impossível)
- E. Resultado menor do que 7: $D = \Omega$ (evento certo)

Operações com eventos

A e B são eventos de Ω

- $A \cup B$: união dos eventos A e B

Ocorrência de pelo menos um dos eventos A e B.

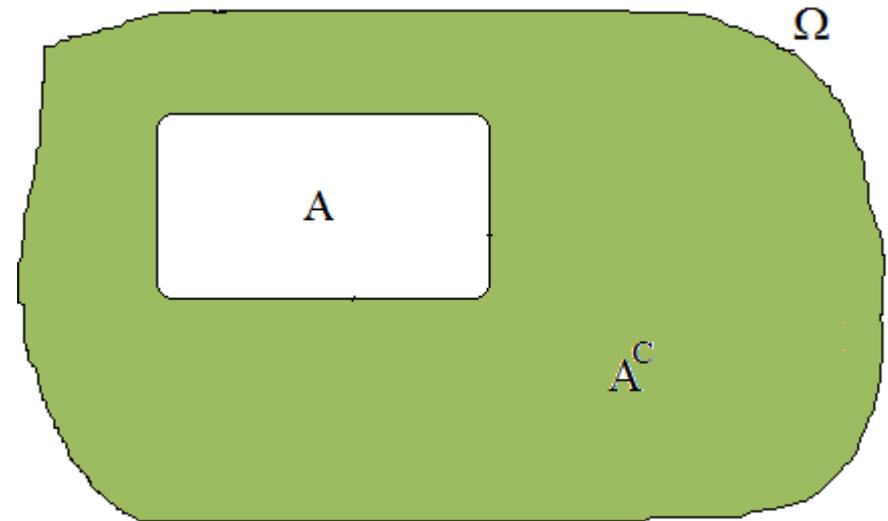
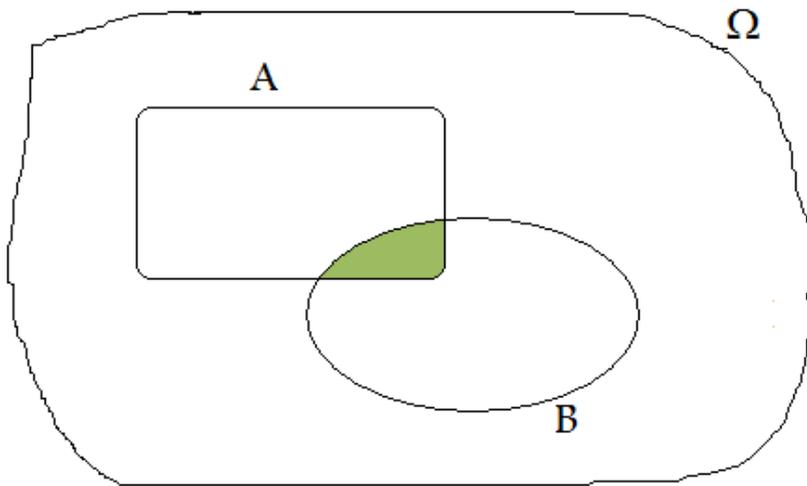


Operações com eventos

- $A \cap B$: intersecção dos eventos A e B

Ocorrência simultânea dos eventos A e B.

- A e B são **disjuntos ou mutuamente exclusivos** quando não têm elementos em comum, isto é, $A \cap B = \emptyset$.
- A e B são **complementares** se $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \Omega$.
- O **complementar** de um evento A é representado por A^c ou \bar{A}



Leis de Demorgan

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$$

Definições de probabilidade

Probabilidade clássica ou *a priori*

Se um experimento aleatório tiver $n(\Omega)$ resultados **mutuamente exclusivos** e **igualmente possíveis** e, se um evento A tiver $n(A)$ desses resultados, a probabilidade do evento A , representada por $P(A)$, é dada por

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Exemplo. Lançamento de dois dados balanceados. Calcular a probabilidade de

- se obter soma das faces igual a 7,
- se obter soma maior do que 5,
- que o resultado do primeiro dado seja maior do que o resultado do segundo.

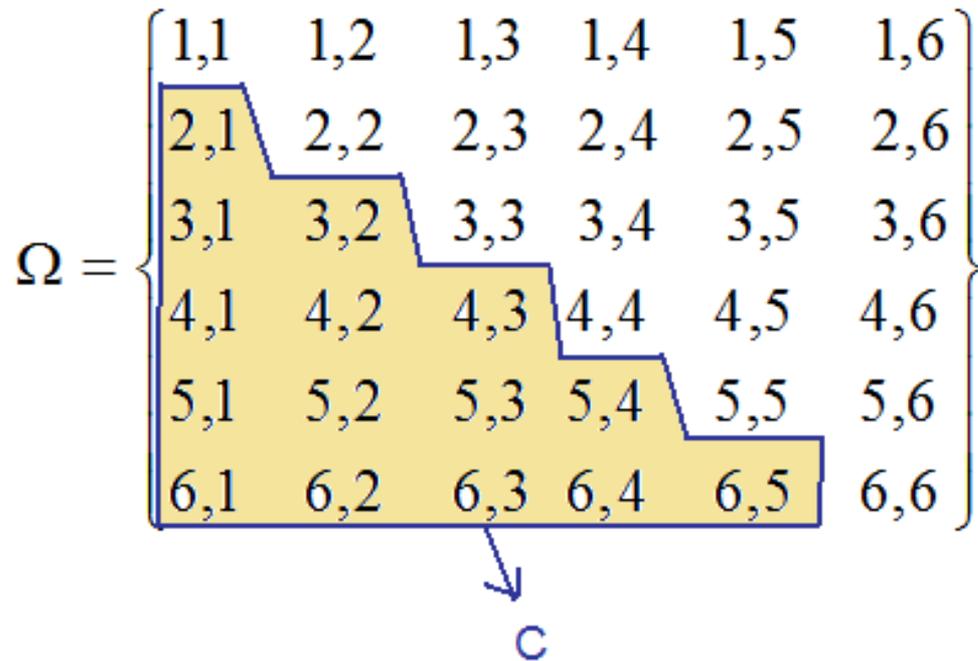
$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{array} \right\}$$

a) $A = \{(6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (6,1)\}$

$$\Rightarrow P(A) = n(A) / n(\Omega) = 6 / 36 = 1/6$$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{array} \right\} \rightarrow B$$

b) $P(B) = 26/36$.



c) $P(C) = 15/36$.

Definições de probabilidade

Probabilidade frequentista ou *a posteriori*

Um experimento é realizado n vezes (n “grande”). O evento A ocorre exatamente $n(A)$ vezes ($0 \leq n(A) \leq n$). A frequência relativa de vezes que ocorreu o evento A é uma forma de aproximar a probabilidade do evento A , ou seja,

$$f_r(A) = \frac{n(A)}{n}$$

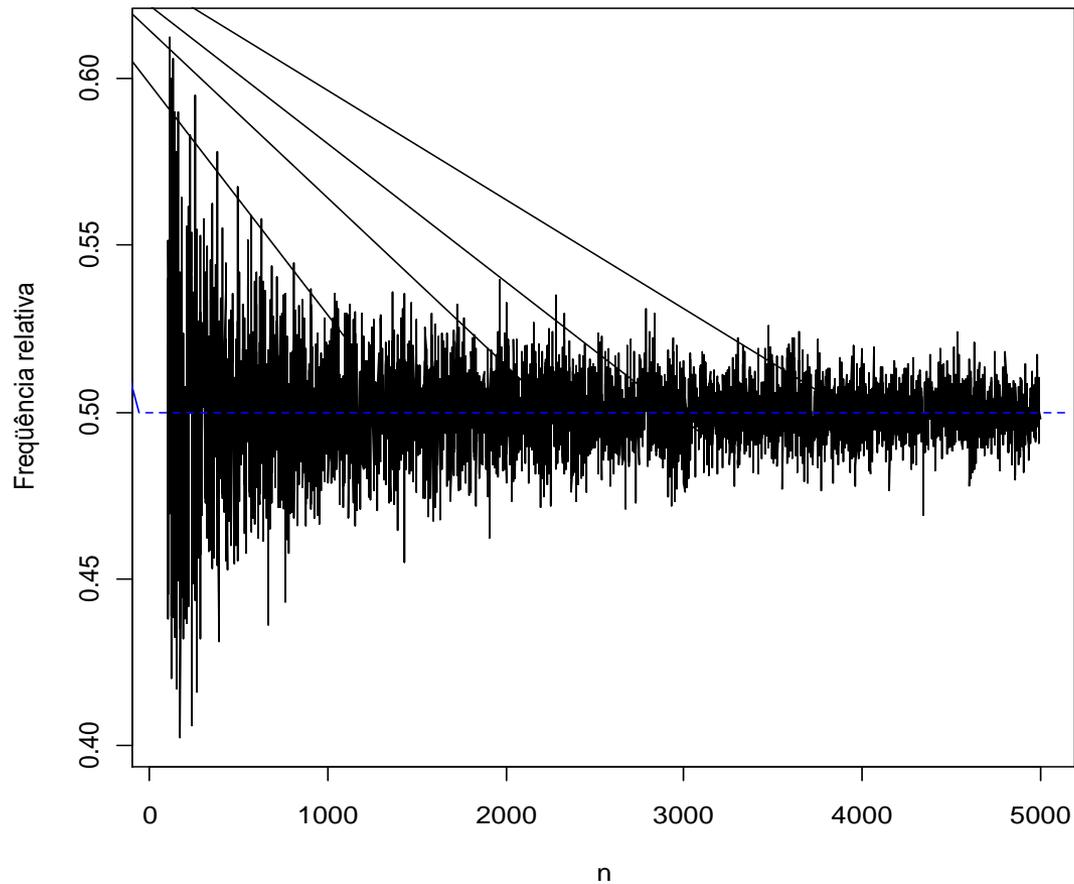
Quando $n \rightarrow \infty$, $f_r(A)$ se aproxima de $P(A)$.

Exemplo. Lançamento de uma moeda balanceada. Calcular a probabilidade de $A = \{\text{resultado obtido é cara}\}$.

	fr_1	fr_2	fr_3	fr_4	...	$P(A)$
Cara	2/5	6/10	22/50	47/100	...	0,5
n	5	10	50	100	...	∞

Um exemplo em R

```
> p0 = 1/2 # Moeda balanceada
> n = 100:5000
> fr = mapply(function(x) sum(rbinom(x,1,p0))/x, n)
> plot(n, fr, ylab="Frequência relativa", type = "l")
> abline(h = p0, lty=2, col="blue")
```



Definições de probabilidade

Definição axiomática

A probabilidade de um evento A é definida como sendo um número $P(A)$ satisfazendo aos seguintes **axiomas**:

(i) $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega,$

(ii) $P(\Omega) = 1,$

(iii) Se A_1, A_2, \dots são eventos mutuamente exclusivos, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Propriedades

1. $P(\Phi) = 0.$

2. Se $A \subset \Omega$, então $P(A) = 1 - P(A^c).$

3. Se $A \subset B \subset \Omega$, então $P(A) \leq P(B).$

4. Se $A, B \subset \Omega$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

5. Se $A, B, C \subset \Omega$, então

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Definições de probabilidade

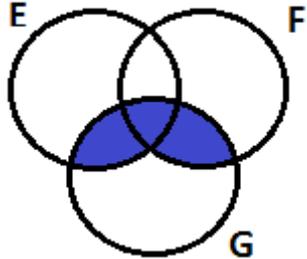
Propriedades

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + \dots +$$

$$(-1)^{R+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_R} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_R}) + \dots +$$

$$(-1)^{n+1} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_n})$$

Exemplo:



$$\begin{aligned} P(E \cup F \cup G) &= P[(E \cup F) \cup G] = \\ &= P(E \cup F) + P(G) - P[(E \cup F) \cap G] = \\ &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) + P(G) \\ &\quad - P[(E \cap G) \cup (F \cap G)] = \\ &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) + P(G) - \\ &\quad P(E \cap G) - P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G) = \\ &= P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) - P(E \cap G) \\ &\quad - P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G) \end{aligned}$$

Probabilidade condicional e independência

A e B são dois eventos em um mesmo espaço amostral Ω . A probabilidade condicional de A dado que ocorreu o evento B , denotada por $P(A|B)$, é definida como

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{se } P(B) > 0. \quad (1)$$

Exemplo. Selecionamos dois itens, ao acaso, um a um e sem reposição, de um lote que contém 10 itens do tipo A e 5 do tipo B. Qual é a probabilidade de que

- (a) o primeiro item seja do tipo A?
- (b) o segundo seja do tipo B se o primeiro item foi do tipo A?

Definimos os eventos

V_1 : "o 1º item é do tipo A";

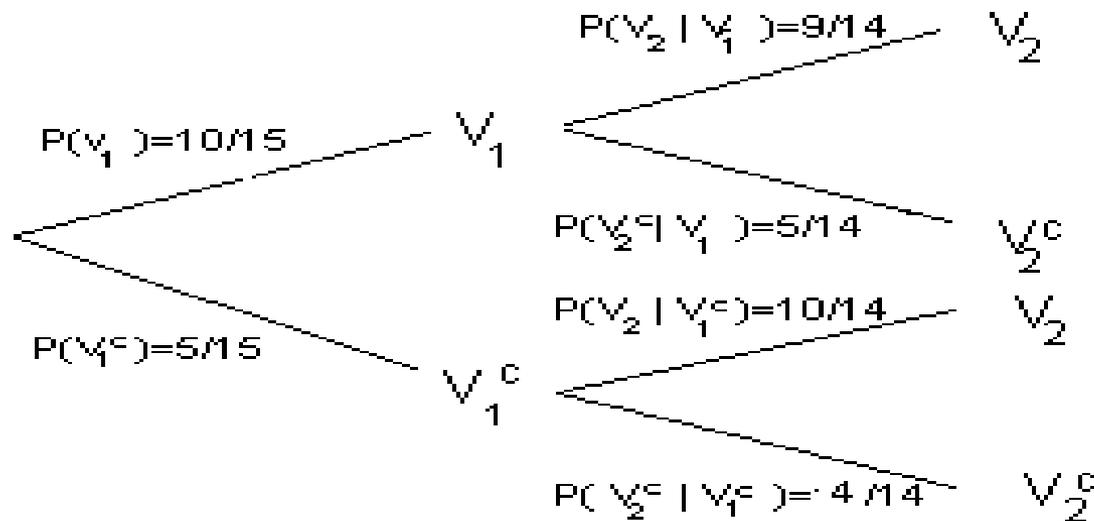
V_2 : "o 2º item é do tipo A"

$$(a) \quad P(V_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

$$(b) \quad P(V_2^c | V_1) = \frac{5}{14}$$

Essas probabilidades podem ser representados em uma [árvore de probabilidades](#).

Árvore de probabilidades



Da expressão (1) obtém-se uma relação útil:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A | B),$$

conhecida como [regra do produto de probabilidades](#) ou [probabilidade da interseção](#).

Exemplo. No exemplo anterior suponha que temos interesse em determinar a probabilidade de que os dois itens selecionados sejam do tipo B.

O evento é $V_1^c \cap V_2^c$: "o 1º e o 2º itens são do tipo B"

$$P(V_1^c \cap V_2^c) = P(V_1^c)P(V_2^c | V_1^c) = \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$$

Resultado. Se B é um evento em Ω tal que $P(B) > 0$, então

1. $P(\phi | B) = 0$

2. Se $A \subset \Omega$, então $P(A^c | B) = 1 - P(A | B)$ ou $P(A | B) = 1 - P(A^c | B)$

3. Se $A, C \subset \Omega$, então

$$P(A \cup C | B) = P(A | B) + P(C | B) - P(A \cap C | B).$$

Exemplo. Um representante avalia que sua probabilidade de realizar um bom negócio em um certo dia é 0,35 e a probabilidade de realizar bons negócios em dois dias consecutivos é 0,25.

Se um bom negócio foi realizado no primeiro dia, qual a probabilidade de que no dia seguinte não seja realizado um bom negócio ?

Solução. Definimos os eventos A: "um bom negócio é realizado no 1º dia" e B: "um bom negócio é realizado no 2º dia".

Do enunciado do problema temos $P(A) = 0,35$ e $P(A \cap B) = 0,25$. A probabilidade pedida é

$$P(B^c | A) = 1 - P(B | A) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \frac{0,25}{0,35} = 0,286.$$

Independência de eventos

Dois eventos A e B em Ω são **independentes** se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade de ocorrência de A . Isto é,

$$P(A | B) = P(A), \quad P(B) > 0.$$

Logo, dois eventos A e B são independentes se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Exemplo. Em uma fábrica 20% dos lotes produzidos têm componentes do fornecedor A, 8% têm componentes do fornecedor V e 4% têm componentes de ambos. Selecionamos ao acaso um item produzido nesta fábrica.

- (a) Os eventos relacionados aos dois fornecedores são independentes?
- (b) Se o lote selecionado tem componentes do fornecedor V, qual a probabilidade de que tenha componentes do fornecedor A?
- (c) Qual é a probabilidade de um lote não ter componentes destes dois fornecedores?

Solução. A: “o lote tem componentes do fornecedor A”, V: “o lote tem componentes do fornecedor V”.

Do enunciado temos $P(A) = 0,20$, $P(V) = 0,08$ e $P(A \cap V) = 0,04$.

$$(a) P(V)P(A) = 0,08 \times 0,2 = 0,016 \text{ e}$$

$$P(V \cap A) = 0,04.$$

Como $P(V \cap A) \neq P(V)P(A)$, A e V não são independentes.

$$(b) P(A|V) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{0,04}{0,08} = 0,50.$$

$$(c) P((V \cup A)^c) = 1 - P(V \cup A)$$

$$= 1 - \{P(V) + P(A) - P(V \cap A)\}$$

$$= 1 - (0,08 + 0,2 - 0,04) = 0,76.$$

Resultado. Se A e B são eventos independentes em Ω , então

(i) A e B^c são independentes.

(ii) A^c e B são independentes

(iii) A^c e B^c são independentes

Exemplo. Um atirador acerta 80% de seus disparos e outro (nas mesmas condições de tiro), 70%. Qual a probabilidade de o alvo ser acertado se ambos os atiradores dispararem simultaneamente?

Eventos : B_i : " o atirador i acerta o alvo " , $i = 1,2$.

$P(B_1) = 0,8$ e $P(B_2) = 0,7$. Logo,

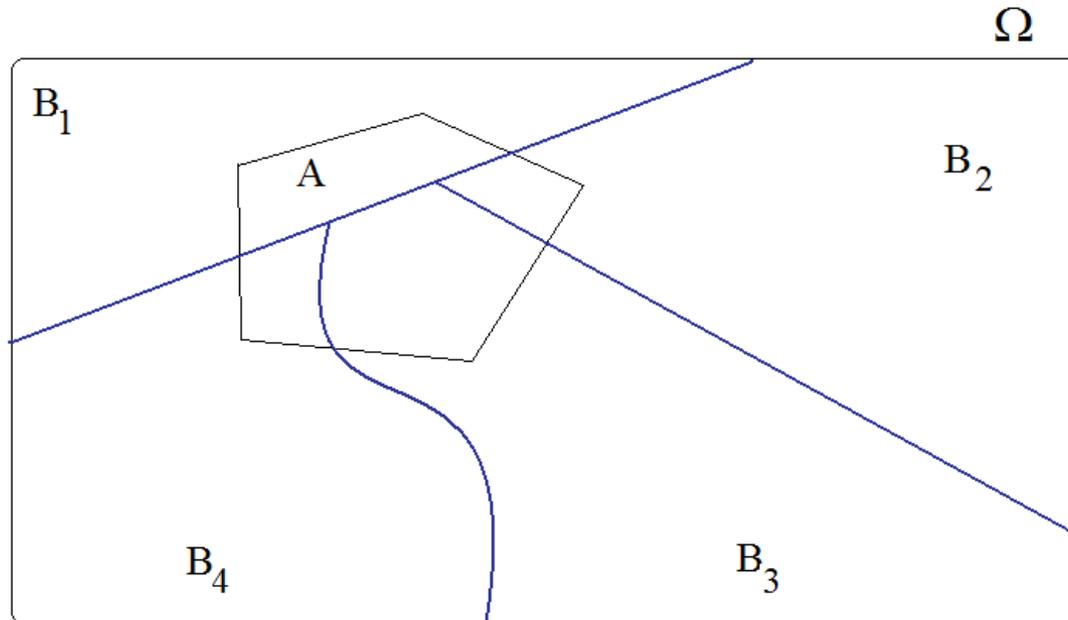
$$\begin{aligned} P(B_1 \cup B_2) &= P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) \\ &= P(B_1) + P(B_2) - P(B_1)P(B_2) \quad (\text{supondo independ\^encia}) \\ &= 0,8 + 0,7 - 0,8 \times 0,7 = 0,94. \end{aligned}$$

Outra solu\~ao :

$$\begin{aligned} P(B_1 \cup B_2) &= 1 - P((B_1 \cup B_2)^c) = 1 - P(B_1^c \cap B_2^c) = 1 - P(B_1^c)P(B_2^c) \\ &= 1 - [1 - P(B_1)][1 - P(B_2)] = 1 - [1 - 0,8][1 - 0,7] = 0,94. \end{aligned}$$

Fórmula de Bayes

Partição do espaço amostral. Uma coleção de eventos B_1, \dots, B_k forma uma partição do espaço amostral se eles são **mutuamente exclusivos** e se sua **união** é igual ao **espaço amostral**.



Fórmula da probabilidade total. Se B_1, \dots, B_k formam uma partição do espaço amostral Ω , então para qualquer evento A em Ω , vale

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + \dots + P(B_k)P(A|B_k) = \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i).$$

Exemplo. Em um programa de televisão são mostradas três portas (1, 2 e 3) fechadas e apenas uma delas guarda um valioso prêmio. O apresentador do programa sabe qual é a porta que leva ao prêmio. Um participante deve escolher uma das portas.

Em seguida, o apresentador informa o número de uma porta, diferente da escolha do participante, e que não guarda o prêmio.

O participante escolhe a porta 1. O apresentador informa que a porta 3 não guarda o prêmio e pergunta ao participante se ele gostaria de mudar sua escolha.

Se você fosse o participante, qual seria sua decisão? Vale a pena mudar a escolha?

Solução. Eventos:

X_i : “a porta número i guarda o prêmio” e Y_j : “apresentador informa que a porta número j **não** guarda o prêmio”.

Observe que $P(X_1) = P(X_2) = P(X_3) = 1/3$. A pergunta pode ser respondida comparando $P(X_1|Y_3)$ e $P(X_2|Y_3)$, pois $P(X_3|Y_3) = 0$.

Levando em conta que o participante escolheu a porta 1, temos

$P(Y_2|X_1) = P(Y_3|X_1) = 1/2$, $P(Y_2|X_2) = P(Y_3|X_3) = 0$ e

$P(Y_2|X_3) = P(Y_3|X_2) = 1$, de modo que

$$\begin{aligned} P(Y_3) &= P(Y_3|X_1) P(X_1) + P(Y_3|X_2) P(X_2) + P(Y_3|X_3) P(X_3) \\ &= 1/2 \times 1/3 + 1 \times 1/3 + 0 \times 1/3 = 1/2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_1|Y_3) &= P(X_1 \cap Y_3)/P(Y_3) = P(Y_3|X_1) P(X_1)/P(Y_3) = (1/2 \times 1/3)/1/2 \\ &= 1/3 \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2|Y_3) &= P(X_2 \cap Y_3)/P(Y_3) = P(Y_3|X_2) P(X_2)/P(Y_3) = (1 \times 1/3)/1/2 \\ &= 1/3 / 1/2 = 2/3. \end{aligned}$$

Vale a pena **mudar** a escolha!

Fórmula de Bayes. Se B_1, \dots, B_k formam uma partição do espaço amostral Ω , e A é evento em Ω com $P(A) > 0$, então

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A | B_i)}.$$

Exemplo. Uma montadora trabalha com **dois** fornecedores (A e B) de uma determinada peça. Sabe-se que **10%** e **5%** das peças proveniente dos fornecedores A e B, respectivamente, estão **fora** das especificações. A montadora recebe **30%** das peças do fornecedor A e **70%** de B. Se uma peça do estoque inteiro é escolhida ao acaso,

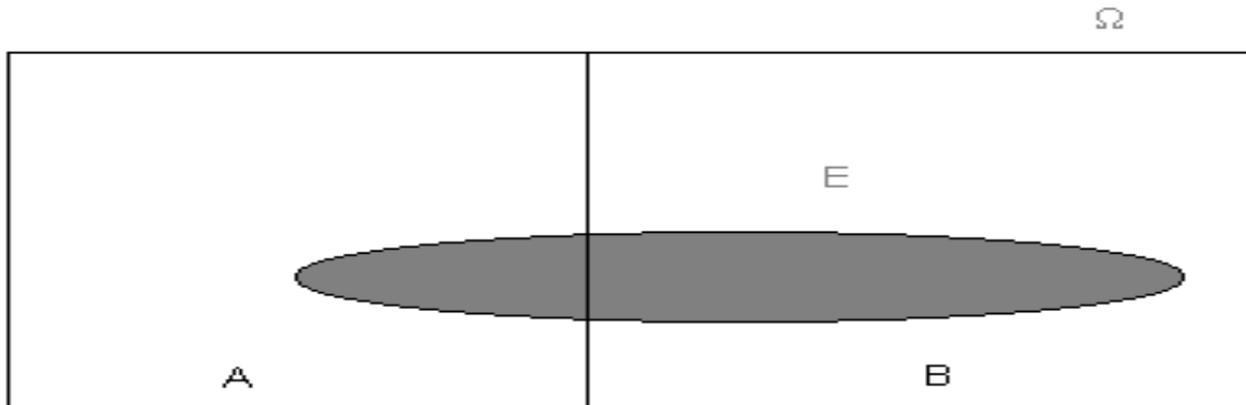
- calcule a probabilidade de que ela esteja fora das especificações.
- se uma peça escolhida ao acaso está fora das especificações, qual é a probabilidade de que tenha sido fornecida por A ?

Solução. Eventos:

A: “peça selecionada foi fornecida por A”,

B:”peça selecionada foi fornecida por B” e

E:”peça selecionada não atende às especificações”.



Do enunciado do problema temos $P(A) = 0,30$, $P(B) = 0,70$, $P(E|A) = 0,10$ e $P(E|B) = 0,05$.

(a) Fórmula da probabilidade total:

$$P(E) = P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) = 0,30 \times 0,10 + 0,70 \times 0,05 = 0,065.$$

(a) $P(A|E) = ?$

Pela fórmula de Bayes,

$$P(A|E) = \frac{P(A)P(E|A)}{P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B)} = \frac{0,30 \times 0,10}{0,30 \times 0,10 + 0,70 \times 0,05} = \frac{0,03}{0,065} = 0,46.$$

A solução do exemplo anterior é facilitada pela árvore de probabilidades:

