EST102 Inferência Estatística - Prof. Mariana Cúri
Lista de Exercícios 1 - Data: 23/03/2017

1. (Alex) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d com f.d.p.

$$f(x|\sigma) = \begin{cases} \sigma x^{\sigma-1}, & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{c.c.,} \end{cases}$$

   $\sigma > 0$. Mostre que $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ é um estimador não viciado de $\sigma/(\sigma+1)$.

2. (Fabiana) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n de uma f.d.p. $f(x|\sigma) = \{(1-\sigma) + \sigma/(2\sqrt{x})\} I_{[0,1]}(x)$ para algum $\sigma \in [0,1]$.
   (a) Mostre que $\bar{X}_n$ é um estimador viciado de σ e encontre o vício $b_n(\sigma)$.
   (b) $\lim_{n\to\infty} b_n(\sigma) = 0$ para qualquer $\sigma \in [0,1]$?

3. (Gabriela) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d com f.d.p. $f(x|\sigma) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty[}(x)$ para algum $\lambda > 0$. Note que $E(X_1) = 1/\lambda$.
   (a) Um estimador intuitivo de λ é $1/\bar{X}_n$. Mostre que este estimador é viciado e calcule seu vício $b_n(\lambda)$.
   (b) Baseado em (a), encontre um estimador não viciado de λ.

4. (Gustavo) Sejam $X_1, ..., X_n$ v.a.i.i.d. tal que X_1 tem f.d.p. $f(x \mid \theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)} I_{(x>0)}$. Encontre o LICR para as variâncias dos estimadores não viciados de:
   (a) $\theta^2 + 2$;
   (b) e^{θ};
   (c) $1/\theta$.

5. (Ian) Sejam $X_1, ...X_n$ v.a.i.i.d. com densidade comum Uniforme$(0, \theta)$, $\theta > 0$, $\bar{X} = \sum X_i/n$ e $X_{(n)} = Maximo(X_1, X_2, ..., X_n)$.
   (a) Mostre que $\frac{n+1}{n} X_{(n)}$ e que $2\bar{X}$ são ENV de θ.
   (b) Calcule as respectivas variâncias e compare-as com o LICR para as variâncias dos estimadores não viciados. Justifique o resultado.