EST102 Inferência Estatística - Prof. Mariana Cúri
Lista de Exercícios 2 - Data: 07/04/2017

1. (João Ferreira) Seja X uma v.a. X com distribuição Gama(α, β) e função densidade de probabilidade

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0.$$

Mostre que essa distribuição faz parte da família exponencial.

2. (João Victor) Considere as distribuições da família exponencial uniparamétrica na forma natural, ou seja, com funções de distribuição de probabilidade dadas por:

$$f(x \mid \eta) = h(\boldsymbol{x}) e^{\eta T(\boldsymbol{x}) + d_0(\eta)}.$$

Mostre que $E_\eta[T(\boldsymbol{X})] = -d_0'(\eta)$ e $Var_\eta[T(\boldsymbol{X})] = -d_0''(\eta)$.

3. (Juliana) Sejam $X_1, ..., X_n$ v.a.i.i.d. com distribuição $N(\theta, \theta^2)$, $\theta > 0$. Obtenha uma estatistica suficiente não trivial para θ.

4. (Katon) Um experimento consiste em testar um número de n lâmpadas. Suponha que as lâmpadas possuam tempos de vida aleatórios modelados como condicionalmente (dado λ) i.i.d. com densidade comum $f(y/\lambda) = \lambda e^{-\lambda y} I(y > 0)$.

   a) Exiba um espaço amostral para este experimento que torne a estatística V="número de lâmpadas que funcionam por mais de uma hora" uma estatística suficiente não trivial.

   b) Exiba outro espaço amostral para este experimento sob o qual V não seja mais suficiente para λ.

5. (Lucas Leite) Sejam $X_1, ..., X_n$ v.a.i.i.d. com distribuição $Beta(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Mostre que $T_1(X) = \prod_{i=1}^{n} X_i$ e $T_2(X) = \prod_{i=1}^{n} (1 - X_i)$ são conjuntamente suficientes para (α, β).

6. (Lucas Lopes) Sejam $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição de Poisson truncada, ou seja, $f(x \mid \mu) = \dfrac{e^{-\mu}\mu^x}{x!(1 - e^{-\mu})} I_{\{1,2,\cdots\}}(x), \quad \mu > 0.$

   a) Mostre que a distribuição conjunta de $X_1, ..., X_n$ é um membro da família exponencial.

   b) Encontre uma estatística suficiente para μ.

7. (Luiz) Suponha que $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_m$ sejam v.a.i.i.d. e que $X_i \sim N(\mu, \sigma_1^2)$ para $i = 1, \cdots, n$ e $Y_j \sim N(\mu, \sigma_2^2)$ para $j = 1, \cdots, m$, $\mu, \sigma_1^2 > 0, \sigma_2^2 > 0$ desconhecidos. Mostre que $T = (\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2, \sum_{j=1}^{m} Y_j, \sum_{j=1}^{m} Y_j^2)$ é uma estatística suficiente.

8. (Milene) Suponha que $(X_1, \cdots, X_s)$ tenha distribuição multinomial com parâmetros $n, p_1, \cdots, p_s$ (n fixo), isto é, $P(X_1 = x_1, \cdots, X_s = x_s) = \dfrac{n!}{x_1! \cdots x_s!} p_1^{x_1} \cdots p_s^{x_s}$. x_i; para $i = 1, \cdots, s$, são inteiros, não-negativos, tais que $\sum_{i=1}^{s} x_i = n$, $0 < p_i < 1$, $i = 1, \cdots, s$, com $\sum_{i=1}^{s} p_i = 1$. Escreva a f.p. de X na forma natural da família exponencial e calcule $E(X_i), i = 1, \cdots, s, \quad Var(X_i), i = 1, \cdots, s$ e $Cov(X_i, X_j), i = 1, \cdots, s$ e $i \neq j$.

9. (Milton) Sejam $X_1, ..., X_n$ v.a.i.i.d. com distribuição Gama(α, β), com α e β desconhecidos. Mostre que $(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} \log X_i)$ é uma estatística suficiente completa para (α, β).