EST102 Inferência Estatística - Prof. Mariana Cúri
Lista de Exercícios 4 - Data: 02/05/2017

1. (Gabriela) Sejam $X_1, ..., X_n$ v.a.i.i.d. com distribuição Gama(α, β) em que

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0.$$

   Encontre os estimadores do método dos momentos dos parâmetros α e β.

2. (Gustavo) Sejam $X_1, ..., X_n$ v.a. que, dado (β, π), são condicionalmente i.i.d. com distribuição $f(x/\beta, \pi) = [\beta\Gamma(\pi)]^{-1}(x/\beta)^{\pi-1}e^{-x/\beta}$, para $x > 0$. (β e π são parâmetros positivos e $\Gamma(\cdot)$ é a função gama). Definindo m como a média aritmética amostral e g é a média geométrica amostral, $(X_1 X_2 \cdots X_n)^{\frac{1}{n}}$, expresse o estimador $(\hat{\beta}, \hat{\pi})$ de máxima verossimilhança de (β, π) em função de m, g e $\psi(\hat{\pi})$, onde ψ é a funçao digama.

3. (Ian) Seja X uma variável aleatória de Poisson com média λ. Defina z como o valor assumido pela v.a. $Z = max\{1, x\}$. Determine a verossimilhança de λ e encontre a estimativa de máxima verossimilhança de λ baseada na observação z.

4. (João) Considere uma amostra aleatória simples da variável exponencial com média $\lambda^{-1} > 0$. O parâmetro de interesse é $\sigma = P(X > t|\lambda)$ (probabilidade de sobrevivência no tempo t). Encontre o EMV de σ.

5. (João Victor) Considere uma amostra aleatória simples de tamanho n de uma v.a. X cuja f.d.p. é dada por $f(x|\beta) = \beta x^{\beta-1} I_{[0,1]}(x)$, onde β é desconhecido. Encontre o EMV de β.

6. (Juliana) Suponha que $X \sim Binomial(n, p), 0 < p < 1$. Mostre que se $x = 0$ ou $x = n$, não haverá estimativa de máxima verossimilhança.

7. (Katon) Suponha que $X \sim Bernoulli(p), 1/3 \leq p \leq 2/3$. Qual é o EMV de p?

8. (Lucas Leite) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d com distribuição Normal$(\psi, \sigma^2), -\infty < \psi < \infty$ e $\sigma^2 > 0$.
   (a) Obtenha o EMV para $\theta = (\psi, \sigma^2)$.
   (b) Suponha que $\sigma = 1$. Qual é o EMV de $\gamma = \Phi(\mu - \psi)$? (aqui μ é um número real fixado e Φ é a f.d.a. da N(0,1)).

9. (Lucas Lopes) Considere a situação do problema anterior, mas com a restrição $\psi \in (0, \infty)$. Suponha também que $\theta = 1$. O que você pode dizer sobre EMV de ψ?

10. (Luiz) Uma urna contém 3 bolas, das quais exatamente m são verdes. Suponha que uma bola será retirada da urna. Seja $X = 1$, se a bola for verde, e $X = 0$, se a bola não for verde. Obtenha o EMV de m. Ele é não viciado?

11. (Milene) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a. que, dado λ, são condicionalmente i.i.d. com distribuição de Poisson de parâmetro λ.
    (a) Mostre que $Y = I(X_1 = 0)$ é um estimador não viciado de $\theta = e^{-\lambda}$.
    (b) Obtenha um estimador de máxima verossimilhanca de θ.

12. (Milton) Seja X uma v.a. com f.p. $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$

$$p_\theta(x) = \begin{cases} 1/4, & \text{se} \quad x = 1, 2 \\ 1/4 + \theta/4, & \text{se} \quad x = 3 \\ 1/4 - \theta/4, & \text{se} \quad x = 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(a) Mostre que $\hat{\theta}$ é um EMV de θ se, e somente se, $\hat{\theta}(3) = 1$ e $\hat{\theta}(4) = 0$. (O EMV não é único).
(b) Mostre que a estatística $t(\cdot)$. tal que $t(1) = t(2) = a$, $t(3) = b$ e $t(4) = c$, com a, b, c distintos, é uma estatística suficiente para θ.
(c) Conclua de (a) e (b) que existem EMVs que não são função da estatística suficiente t.

13. (Renata) Suponha que, dado θ, $X_1, ..., X_n$ seja uma amostra aleatória da densidade $f(x \mid \theta) = \frac{1}{2} exp\{-|x - \theta|\}$ (exponencial dupla). Calcule $e_{M_n, \bar{X}_n}$, onde $\bar{X} = \sum X_i/n$ e $M_n = Mediana(X_1, X2, ..., X_n)$ são estimadores de θ, ou seja, da mediana populacional.

14. (Rogerson) Suponha que, dado θ, $X_1, ..., X_n$ seja uma amostra aleatória da densidade

$$f(x \mid \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x > 0$$

a) Mostre que a mediana populacional é dada por $\theta log2$.

b) Considere os estimadores de θ: $T_1 = \dfrac{mediana(X_1, ...X_n)}{log2}$ e $T_2 = \overline{X}$. Encontre as distribuições assintóticas de T_1 e T_2 e a eficiência (assintótica) relativa de T_1 e T_2. Qual estimador é assintoticamente mais eficiente? Verifique se algum deles é assintoticamente eficiente.

15. (Thacyo) Suponha que, dado θ, $X_1, ..., X_n$ sejam v.a.i.i.d. com fdp

$$f(x \mid \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta - 1}, 0 < x < 1, \\ 0, 0 < \theta < \infty. \end{cases}$$

a) Encontre um EMV de $\varphi(\theta) = \theta/(\theta + 1)$.

b) Encontre a distribuição assintótica do estimador do item (a).

16. (Thiago) Suponha que, dado θ, $X_1, ..., X_n$ seja uma amostra aleatória da densidade $f(x \mid \theta) = \theta(\theta + 1)x^{\theta - 1}(1 - x), 0 < x < 1, \theta > 0$.
(a) Mostre que $T_n = 2\bar{X}/(1 - \bar{X})$ é o estimador do método dos momentos de θ.
(b) Encontre a distribuição assintótica de T_n convenientemente padronizado.
(c) Mostre que T_n não é assintoticamente eficiente.

17. (Victor Oliveira) Sejam $X_1, ...X_n$ tais que, dado θ, sejam v.a.i.i.d. com densidade comum

$$f(x \mid \theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x); \theta > 0$$

(a) Determine o EMV de θ.
(b) Verifique se a variância do EMV de $1/\theta$ atinge a cota de Cramer-Rao. Sugestão: determine a distribuiçao de $-logX_1$.

18. (Victor Fernandes) Sejam $X_1, ...X_n$ v.a.i.i.d., $n > 2$, tal que $X_i \sim$ Bernoulli(p), $0 \leq p \leq 1$. Sejam $T_n = X_1 + ... + X_n$ e $\hat{p_n} = T_n/n$.

a) Mostre que $\hat{p_n}$ é um ENVVUM de p.

b) Mostre que $T_n(n - T_n)(n - 1 - T_n)/[n(n-1)(n-2)]$ é um ENV de $p(1-p)^2$ e encontre o LICR para a variância desse estimador.

c) Mostre que $T_n(n - T_n)/[n(n-1)]$ é um estimador não viciado de $p(1-p)$ e tem maior variância do que o EMV de $p(1-p)$.

19. (Yuri) Sejam $X_1, \cdots, X_n$ v.a.'s que, dado θ, são condicionalmente independentes identicamente distribuídas com distribuição comum binomial negativa (k, θ), ou seja,

$$P\{X_1 = m \mid \theta\} = \binom{m-1}{k-1} \theta^k (1-\theta)^{m-k}, \quad m = k, k+1, \cdots$$

a) Construa um estimador não viciado de $\frac{1}{\theta}$.

b) Se, a priori, θ possui uma distribuição uniforme em (0,1), qual é o estimador de Bayes de θ baseado em $X_1, \cdots, X_n$ supondo perda quadrática?

20. (Alex) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. com distribuição $N(\alpha + \beta t, \sigma^2)$, onde α, β e σ^2 são desconhecidos.
(a) Encontre os estimadores de mínimos quadrados de α e β, ou seja, os valores de α e β que minimizam $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \alpha - \beta t_i)^2$.
(b) Mostre que esses estimadores são ENVVUM para α e β.