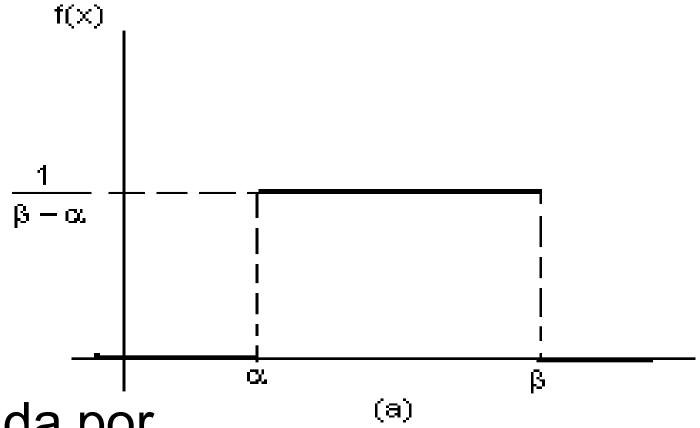
Principais Modelos Contínuos

1. Modelo uniforme

Uma v.a. contínua X tem distribuição uniforme com parâmetros α e β (α < β) se sua função densidade de probabilidade é dada por

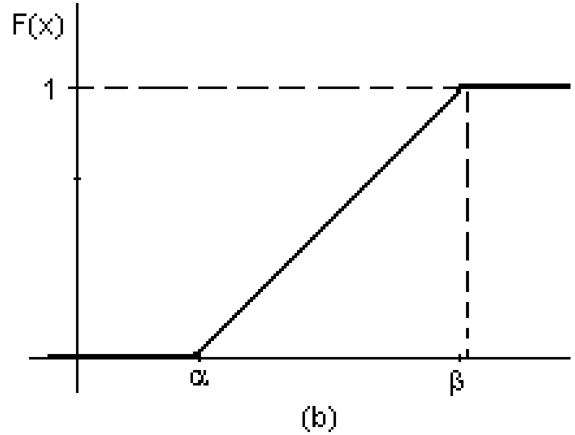
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & c.c \end{cases}$$



Notação: X ~ U(α , β)

A função de distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & x \geq \beta \end{cases}$$



Propriedades:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}.$$

Exemplo

A dureza de uma peça de aço pode ser pensada como sendo uma variável aleatória uniforme no intervalo (50,70) unidades. Qual a probabilidade de que uma peça tenha dureza entre 55 e 60?

Solução. X representa a dureza de uma peça de aço, sendo que X ~ U(50, 70) e

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & 50 \leq x \leq 70, \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

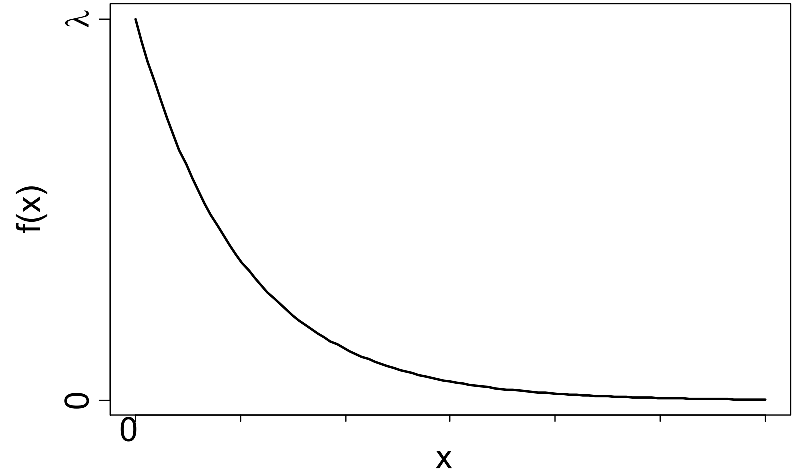
Portanto,

$$P(55 < X < 60) = \int_{55}^{60} \frac{1}{20} dx = \frac{5}{20} = 0,25.$$

2. Modelo exponencial

Uma v.a. contínua X tem distribuição exponencial com parâmetro $\lambda > 0$ se sua função de densidade é dada por

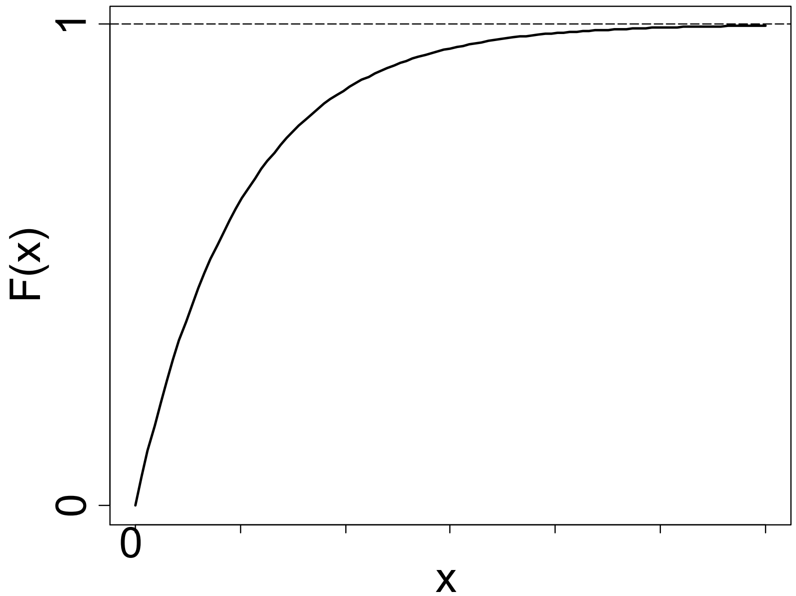
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & c.c. \end{cases}$$



Notação: $X \sim \text{Ex}(\lambda)$.

A função de distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$



Propriedades:

$$E(X) = 1/\lambda, \quad \text{Var}(X) = 1/\lambda^2.$$

2. Modelo exponencial

Propriedade. Se X ~ Ex(λ), então P(X > k + m | X > m) = P(X > k).

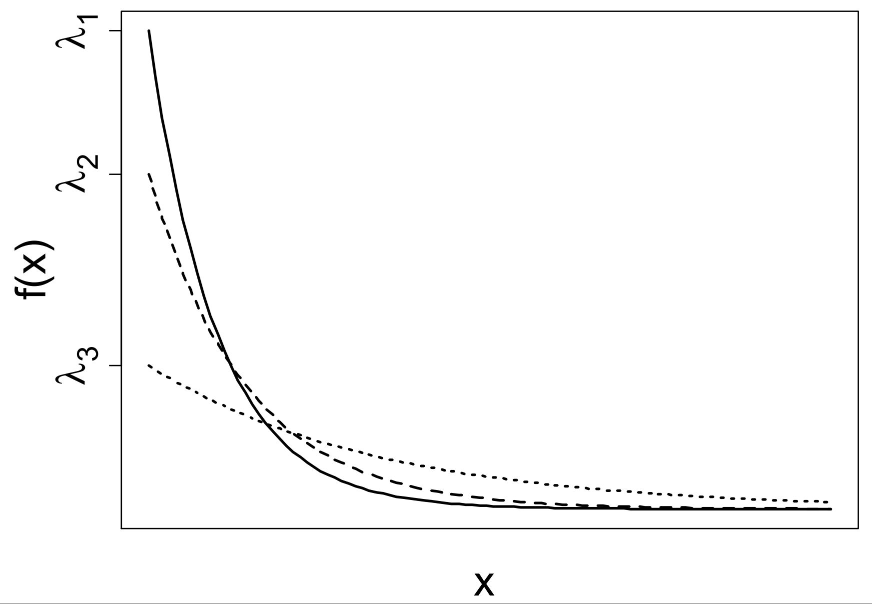
É a única distribuição contínua com esta propriedade ("falta de memória").

Observação. Também encontramos X ~ Ex(α), em que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}}, & x > 0, \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Relação: $\alpha = 1 / \lambda$.

Exemplo. Diferentes valores de λ.



Exemplo

Certo tipo de fusível tem duração de vida que segue uma distribuição exponencial com vida média de 100 horas. Cada peça tem um custo de \$10,0 e se durar menos de 200 horas há um custo adicional de \$8,0.

(a) Qual é a probabilidade de uma durar mais de 150 horas?

(b) Determinar o custo esperado.

Solução. Se X é o tempo de duração de uma peça, do enunciado tem-se que E(X) = 100 horas e X ~ Ex(0,01). Ou seja,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{100}}, & x \geq 0, \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

$$(a)\ \ P(X > 150) = 1 - P(X \leq 150) = 1 - (1 - e^{-\frac{150}{100}}) = e^{-1,5} = 0,223.$$

Exemplo

(b) O custo C é uma v.a. discreta dada por

$$C(X) = \begin{cases} 10, & \text{se } X \geq 200, \\ 10+8, & \text{se } X < 200. \end{cases}$$

O custo total esperado é E(C) = 10 P(C = 10) + 18 P(C = 18).
Usando a variável X calculamos

$$P(C=10) = P(X \geq 200) = 1 - P(X < 200) = 1 - F(200) = e^{-2},$$

$$P(C=18) = P(X \leq 200) = F(200) = 1 - e^{-2} \text{ e}$$

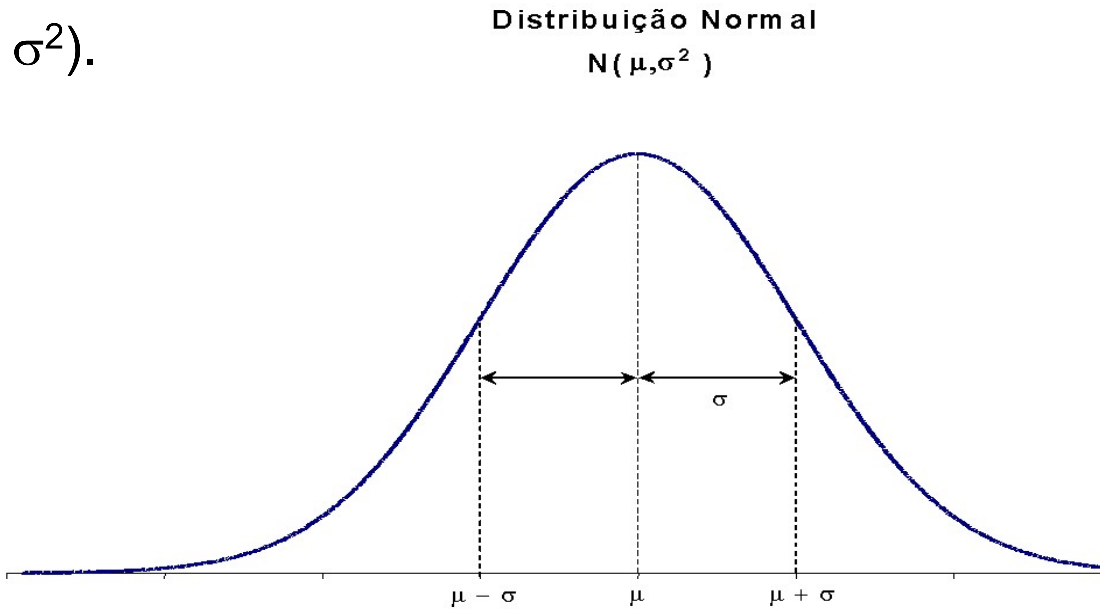
$$E(C) = 10 \times e^{-2} + 18 \times (1 - e^{-2}) = \$16,9.$$

3. Modelo normal (ou gaussiano)

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2 se sua função densidade é dada por

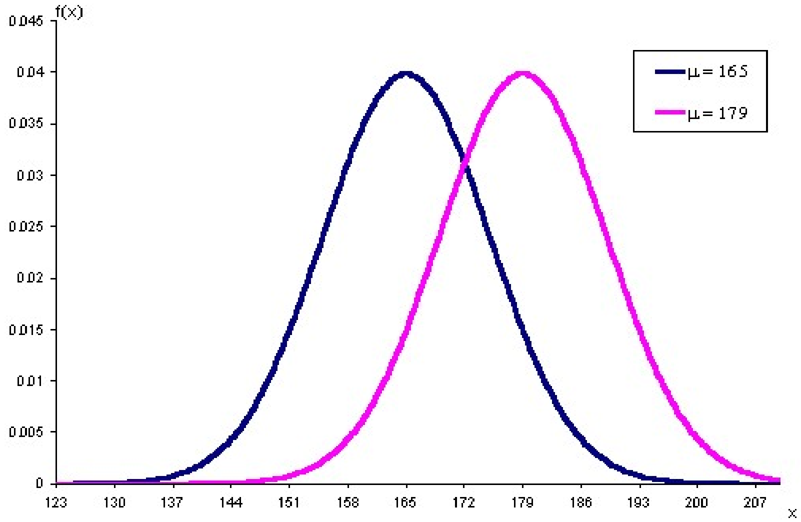
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \; x \in R.$$

Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

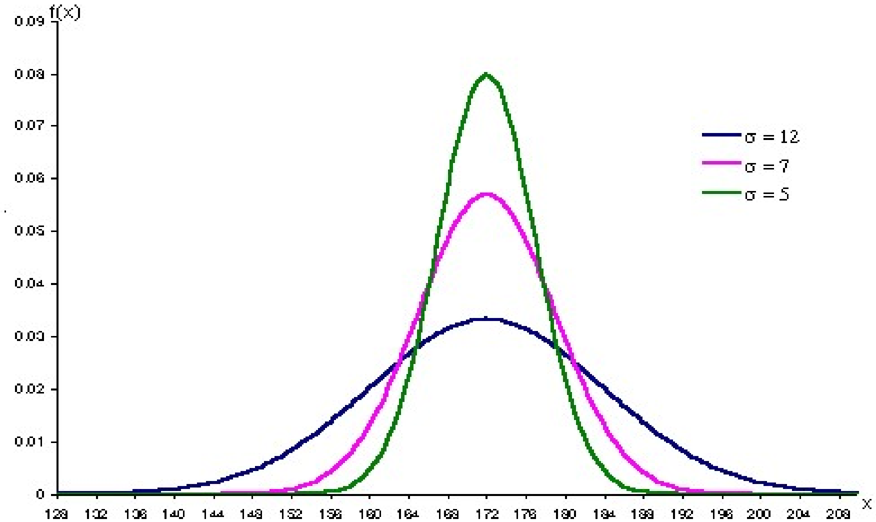


Exemplos

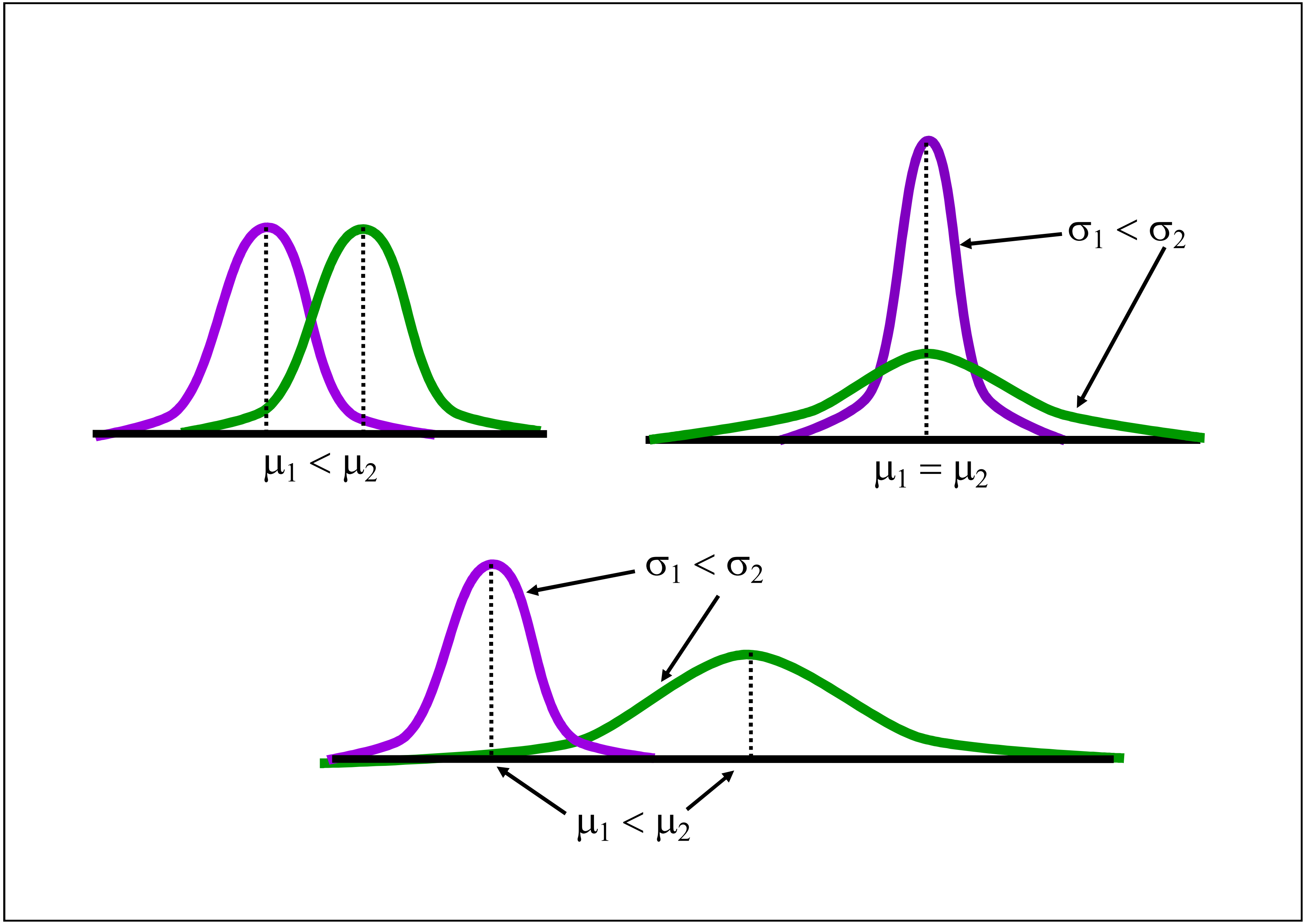
Distribuições normais com médias diferentes e variâncias iguais.



Distribuições normais com médias iguais e variâncias diferentes.



Exemplos



Propriedades

(a) E(X) = μ, Var(X) = σ^2 e mediana = moda = μ.

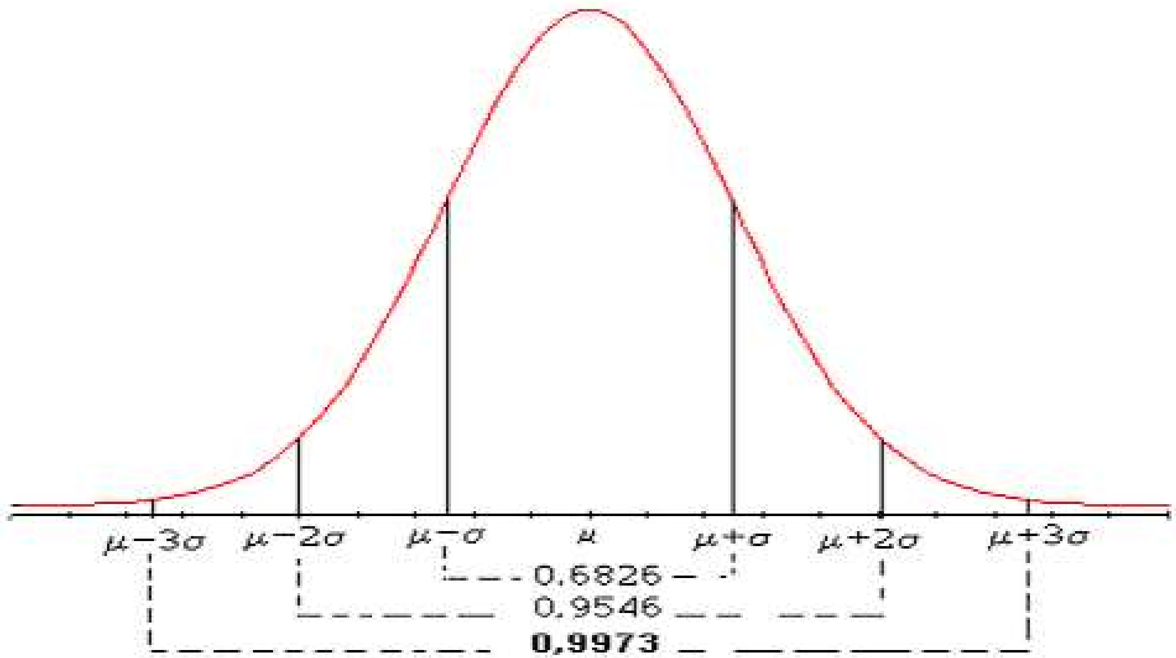
(b) A distribuição é simétrica em relação à média.

(c) Como a área total sob curva é igual a 1, cada metade da curva área = 0,5.

(d) $$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0{,}6896 \quad ,$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}9546 \quad \text{e}$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0{,}9973 \quad .$$



Propriedades

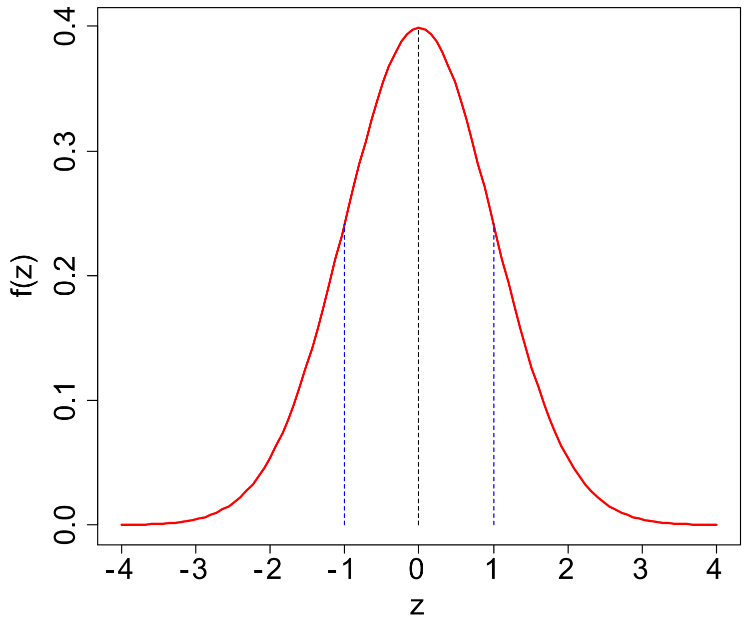
A função de distribuição acumulada de uma v.a. X ~ N(μ, σ²) é

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^{2}\right\}dt.$$

Integral sem solução analítica.
Cálculo de probabilidades com o auxílio de tabelas.

Normal padrão ou reduzida. Se Z é uma v.a. normal com média 0 e variância 1, então Z é chamada de uma v.a. normal padrão ou reduzida e sua função densidade é

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}},\ z\in R.$$



A função de distribuição acumulada de uma v.a. Z ~ N(0,1) é

$$\Phi(z)=P(Z\le z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}t^{2}\right)dt.$$

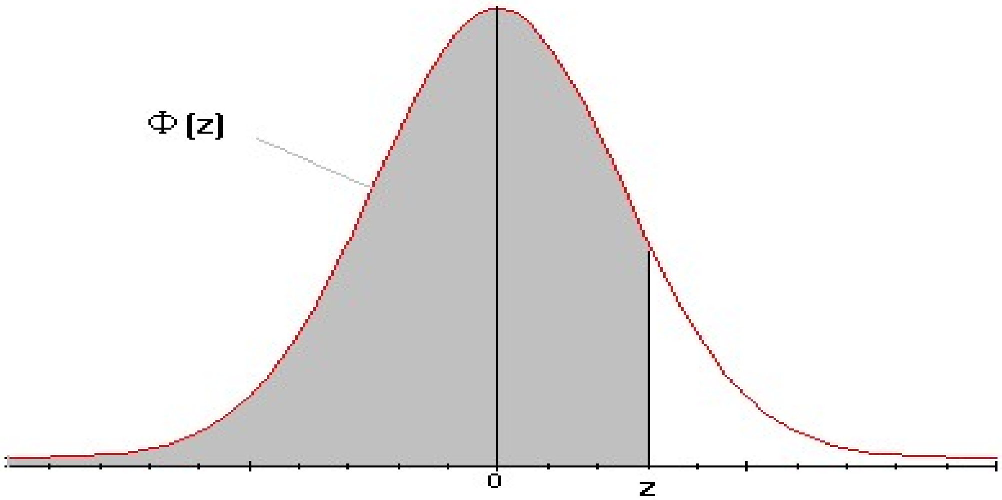
Uso da tabela normal

Table A.3. Areas under the normal curve.

Z ~ N(0,1): distribuição normal padrão.

Valores no corpo da tabela: $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, z com duas decimais.

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}t^2)\,dt\,, \quad -3{,}49 \leq z \leq 3{,}49\,.$$



Uso da tabela normal

1ª coluna: parte inteira de z e 1ª decimal.

1ª linha: 2ª decimal de z.

Exemplo. $P(Z \leq -1{,}25)$ é encontrada na interseção da linha correspondente a –1,2 com a coluna 0,05:

2ª decimal

Parte inteira e 1ª decimal

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,4										
...										
-1,2						0,1056				
...										
3,4										

Resposta. $P(Z \leq -1{,}25) = 0{,}1056$.

Exemplo

Seja Z ~ N(0,1). Calcular
(a) P(Z < 1,80),
(b) P(0,80 < Z < 1,40),
(c) P(Z > -0,57) e
(d) o valor de k tal que
P(Z < k) = 0,05.

Em R e Excel:

(a) pnorm(1.8) e =DIST.NORMP(1,8).

(b) pnorm(1.4)-pnorm(1.8) e

= DIST.NORMP(1,4)-DIST.NORMP(0,8).

(c) 1-pnorm(-0.57) e =1-DIST.NORMP(-0,57).

(d) qnorm(0.05) e =INV.NORMP(0,05).

Solução. Da tabela normal padrão tem-se

$$(a)\, P(Z < 1{,}80) = \Phi(1{,}80) = 0{,}9641,$$

$$\text{(b) } \mathrm{P}(0{,}80 < Z < 1{,}40) = \Phi(1{,}40) - \Phi(0{,}80) = 0{,}9192 - 0{,}7881 = 0{,}1311,$$

$$(c)\, P(Z > -0{,}57) = 1 - P(Z \le -0{,}57) = 1 - 0{,}2843 = 0{,}7157,$$

$$(d)\;\; P(Z < k) = 0{,}05 \Rightarrow k = -1{,}64.$$

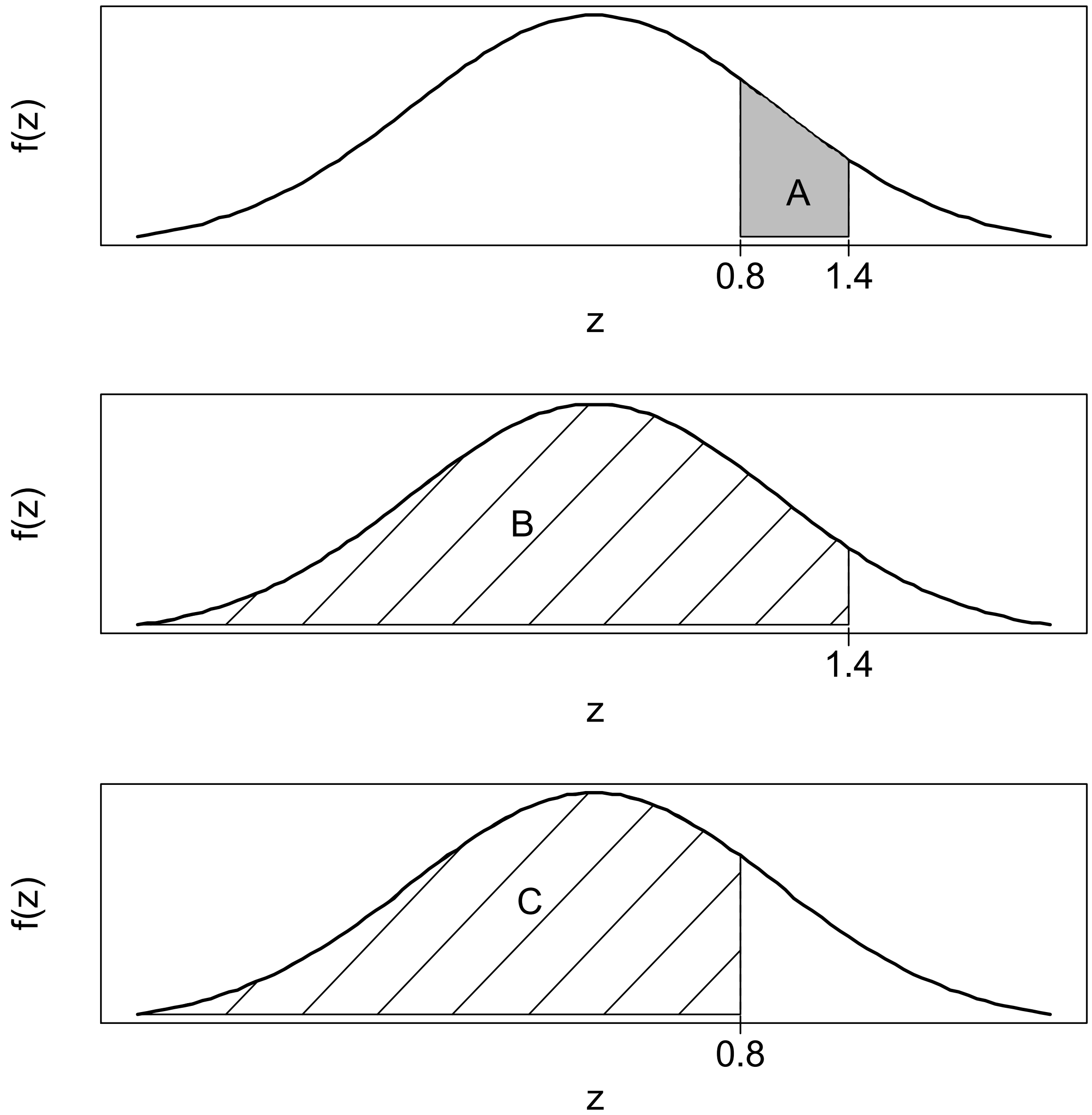
Observação. Para todo k > 0,

$$(i)\, \mathrm{P}(Z \le -k) = 1 - \mathrm{P}(Z \le k) \quad \text{e}$$

$$(ii)\, \mathrm{P}(-k \le Z \le k) = 2\mathrm{P}(Z \le k) - 1 = 1 - 2\mathrm{P}(Z \le -k).$$

Exemplo (b)

A = B – C, sendo que B e C são encontradas na tabela normal.



Transformação linear de uma variável normal

Se X é uma v.a. normal com média μ e variância σ^2, então a v.a. Y = a + bX tem distribuição normal com média μ_y = a + bμ e variância $\sigma_Y^2 = b^2\sigma^2$.

Tomando a = - μ / σ e b = 1 / σ obtemos a padronização

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

Exemplo. Se X ~ N(90,100), determinar

(a) P(80 < X < 100),

(b) P(|X - 90| < 30) e

(c) o valor de a tal que P(90 - 2a < X < 90 + 2a) = 0,99.

Exemplo

$$(a)\, P(80 < X < 100) = P\left(\frac{80-90}{10} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{100-90}{10}\right) = P(-1{,}00 < Z < 1{,}00)$$

$$= 2P(Z \leq 1{,}00) - 1 = 2 \times 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826.$$

$$(b)\ \ P(|\, X - 90\,| < 30) = P(-30 < X - 90 < 30) = P\left(-\frac{30}{10} < \frac{X-90}{10} < \frac{30}{10}\right)$$

$$= P(-3{,}00 < Z < 3{,}00) = 2P(Z < 3{,}00) - 1$$

$$= 2 \times 0{,}9987\ \text{-}1 = 0{,}9974.$$

$$(c)\, P(90-2a < X < 90+2a) = P(-2a < X-90 < 2a) = P\left(-\frac{2a}{10} < \frac{X-90}{10} < \frac{2a}{10}\right)$$

$$= 2P\left(Z \leq \frac{a}{5}\right) - 1 = 0{,}99 \Rightarrow P\left(Z < \frac{a}{5}\right) = 0{,}995$$

$$\Rightarrow \frac{a}{5} = 2{,}57 \Rightarrow a = 12{,}85.$$

Exemplo

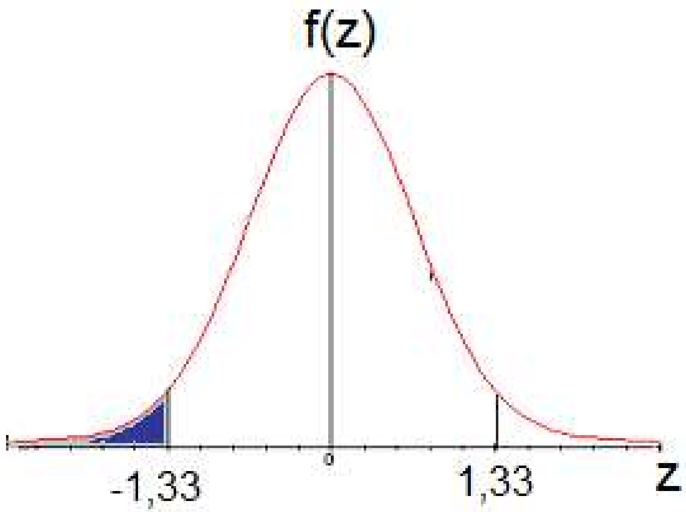
O tempo necessário para produzir um lote de itens tem distribuição normal com média 120 minutos e desvio padrão 15 minutos.

(a) Sorteando-se um lote produzido, qual a probabilidade de que tempo de produção seja inferior a 100 minutos?

Solução. Definimos X como o tempo de produção do lote. Pelo enunciado, $X \sim N(120, 15^2)$. Calculamos

$$P(X < 100) = P\left(Z < \frac{100-120}{15}\right) = P(Z \leq -1{,}33)$$

$$= \Phi(-1{,}33) = 0{,}0918.$$



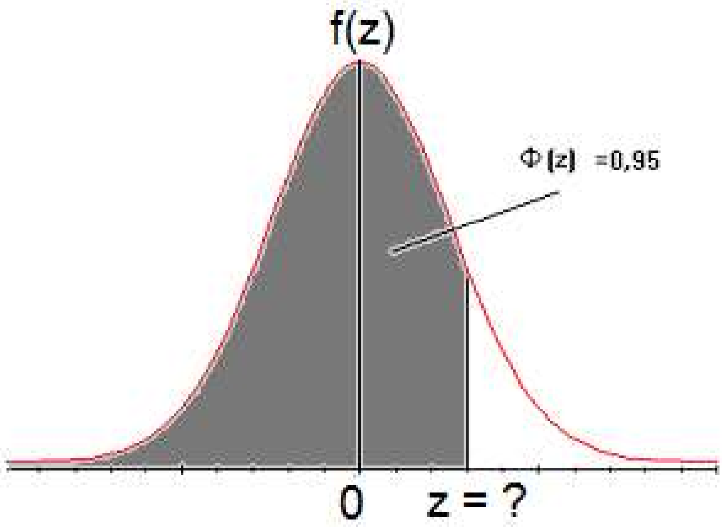
Exemplo

(b) Qual o tempo correspondente à produção de 95% dos itens?

Solução. Devemos encontrar x tal que P(X < x) = 0,95. Após uma transformação,

$$P(X < x) = P\left(Z < \frac{x-120}{15}\right) = 0{,}95.$$

Iniciamos encontrando z tal que Φ(z)=0,95.



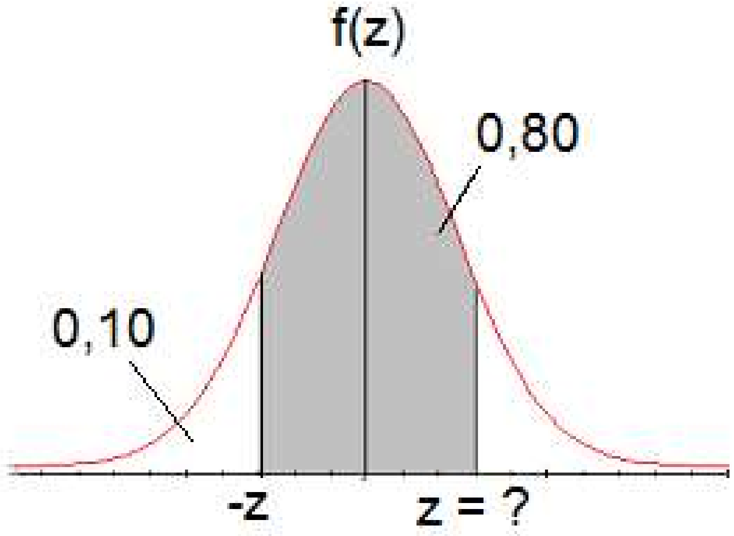
Da tabela normal, z = 1,64. Logo x = 120 + 1,64 $\times$ 15 = 144,6.

Exemplo

(c) Qual o intervalo de tempo central correspondente à produção de 80% dos itens?

Solução. Devemos encontrar x_1 e x_2 tais que

$$P(x_1 \le X \le x_2) = 0{,}80 \Rightarrow P\left(\frac{x_1 - 120}{15} \le Z \le \frac{x_2 - 120}{15}\right) = 0{,}80 .$$



Iniciamos encontrando z tal que $\Phi(z) = 0{,}90$. Da tabela normal, z = 1,28. Logo,

$$\frac{x_1 - 120}{15} = -1{,}28 \Rightarrow x_1 = 120 - 15 \times 1{,}28 \Rightarrow x_1 = 100{,}8 \text{ min},$$

$$\frac{x_2 - 120}{15} = 1{,}28 \Rightarrow x_2 = 120 + 15 \times 1{,}28 \Rightarrow x_2 = 139{,}2 \text{ min} .$$

Propriedade

Se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a. independentes tais que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, para i=1,...,n, então, a v.a.

$$Y = X_1 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

tem distribuição normal com média $n\mu$ e variância $n\sigma^2$, isto é, $Y \sim N(n\mu, n\sigma^2)$.

Padronização:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Exemplo. O peso de uma caixa de peças é uma v.a. normal com média 65 kg e desvio padrão de 4 kg. Um carregamento de 120 caixas de peças é despachado. Qual a probabilidade de que a carga pese entre 7.893 kg e 7.910 kg?

Exemplo

Solução. Pelo enunciado,

$$X_i : \text{peso da i-ésima caixa} \Rightarrow X_i \sim N(65{,}16),\ i = 1,\cdots,120.$$

Logo,

$$Y : \text{peso da carga} \Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{120} X_i \sim N(120 \times 65, 120 \times 16),$$

$$Y \sim N(7800, 1920).$$

Calculamos

$$P(7893 \le Y \le 7910) = P\left(\frac{7893 - 7800}{\sqrt{1920}} \le Z \le \frac{7910 - 7800}{\sqrt{1920}}\right)$$

$$= P(2{,}12 \le Z \le 2{,}51) = \Phi(2{,}51) - \Phi(2{,}12)$$

$$= 0{,}4940 - 0{,}4830 = 0{,}0110.$$