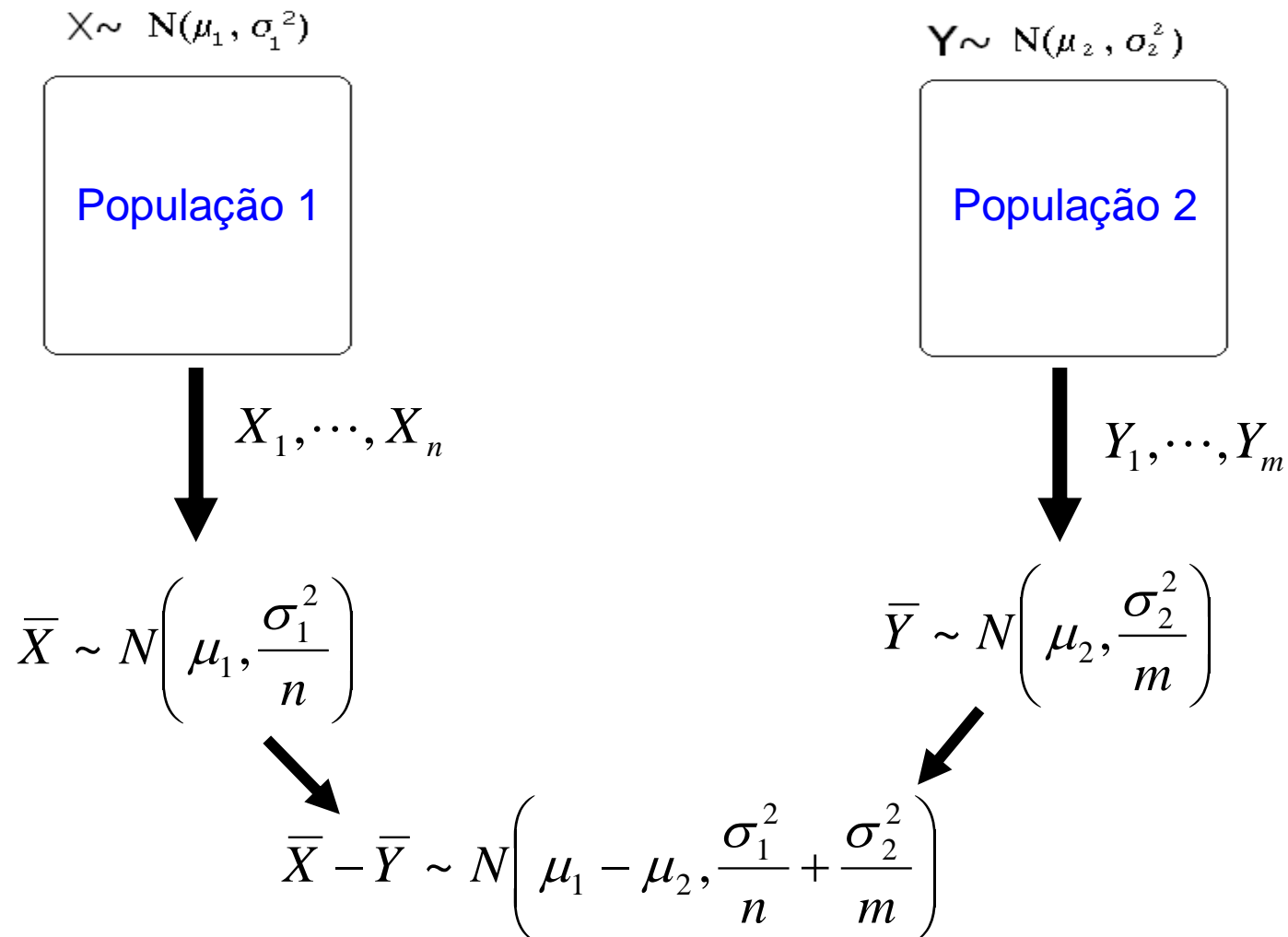




INFERÊNCIA ESTATÍSTICA PARA DUAS POPULAÇÕES

1. Populações independentes com distribuição normal



Obs. Se a distribuição de X e/ou Y não for normal, os resultados são válidos **aproximadamente**.

Testes de hipóteses sobre $\mu_1 - \mu_2$

X_1, \dots, X_n é uma amostra aleatória de tamanho n de uma população com distribuição normal com média μ_1 e variância σ_1^2 .

Y_1, \dots, Y_m é uma amostra aleatória de tamanho m de uma população com distribuição normal com média μ_2 e variância σ_2^2 .

As duas populações são **independentes**.

(i) Formulação das hipóteses:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$$

À esquerda

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$$

À direita

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0,$$

Bilateral

sendo que Δ_0 é uma constante conhecida (**valor de teste**). $\Delta_0 = 0$ corresponde à **igualdade** das duas médias.

Testes de hipóteses sobre $\mu_1 - \mu_2$

(ii) Estatística de teste

(a) σ_1^2 e σ_2^2 conhecidas: $Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1).$

(b) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ desconhecida:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta_0}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} t_{n+m-2}, \quad (\text{distribuição t de Student com } n + m - 2 \text{ g.l.})$$

em que $S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$ é a **variância combinada** (*pooled variance*),

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad \text{e} \quad S_2^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2.$$

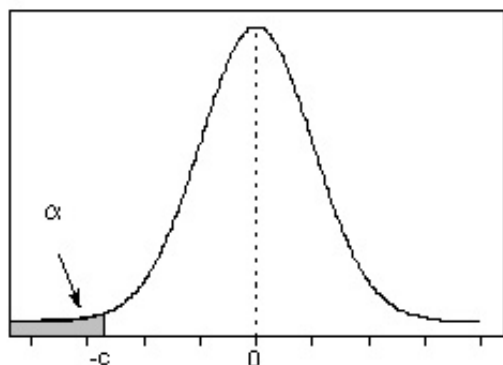
(c) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, ambas desconhecidas: $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} t_g$, aproximadamente,

$$\text{em que } g = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m} \right)^2}{\frac{(S_1^2/n)^2}{n-1} + \frac{(S_2^2/m)^2}{m-1}}.$$

Testes de hipóteses sobre $\mu_1 - \mu_2$

(iii) Região crítica para um nível de significância α escolhido:

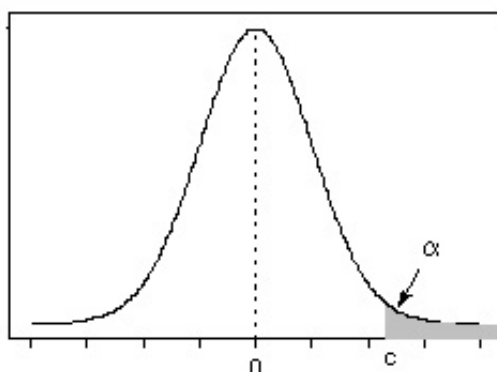
$$H_1: \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$$



$$R_c^{(Z)} = \{Z < -c\}$$

$$R_c^{(T)} = \{T < -c\}$$

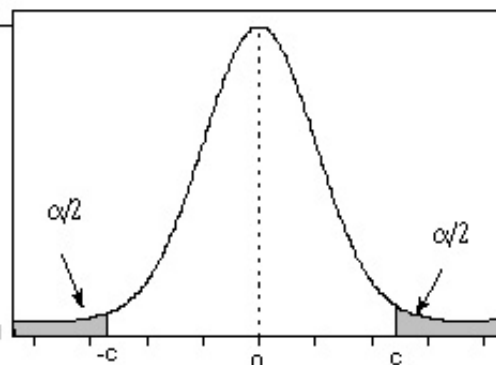
$$H_1: \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$$



$$R_c^{(Z)} = \{Z > c\}$$

$$R_c^{(T)} = \{T > c\}$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$$



$$R_c^{(Z)} = \{|Z| > c\}$$

$$R_c^{(T)} = \{|T| > c\}$$

(iv) Se $Z \in R_C$ ou $T \in R_C$, rejeita-se H_0 ; caso contrário, não se rejeita H_0 .

Obs. Nas regiões críticas com Z e T o valor de c não é o mesmo.

2. Populações dependentes com distribuição normal

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

População 1

$$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

População 2

Pares: $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$.

Diferença: $D = X - Y$ com $\mu_D = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = \mu_1 - \mu_2$ e $\text{var}(D) = \sigma_D^2$.

Calculamos $D_1 = X_1 - Y_1, \dots, D_n = X_n - Y_n$,

$$\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i = \bar{X} - \bar{Y} \text{ e } s_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2.$$

Distribuição: $\bar{D} \sim N\left(\mu_D, \frac{\sigma_D^2}{n}\right)$.

Obs. Se a distribuição de D não for normal, o resultado é válido **aproximadamente**.

Testes de hipóteses sobre $\mu_1 - \mu_2$

D_1, \dots, D_n é uma amostra aleatória de tamanho n de uma população com distribuição normal com média μ_D e variância σ_D^2 .

(i) Formulação das hipóteses:

$$H_0 : \mu_D = \Delta_0$$

$$\underbrace{H_1 : \mu_D < \Delta_0}$$

À esquerda

$$H_0 : \mu_D = \Delta_0$$

$$\underbrace{H_1 : \mu_D > \Delta_0}$$

À direita

$$H_0 : \mu_D = \Delta_0$$

$$\underbrace{H_1 : \mu_D \neq \Delta_0,}$$

Bilateral

sendo que Δ_0 é uma constante conhecida (**valor de teste**). $\Delta_0 = 0$ corresponde à **igualdade** das duas médias ($\mu_D = \mu_1 - \mu_2$).

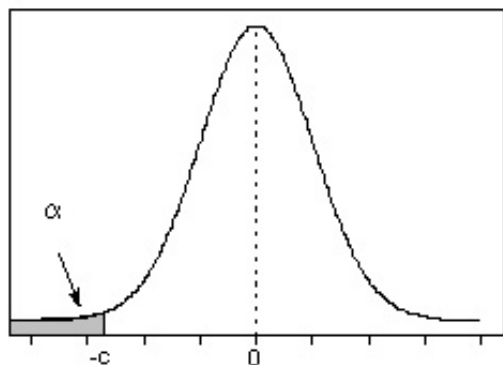
(ii) Estatística de teste:

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{D} - \Delta_0)}{s_D} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} t_{n-1}. \quad (\text{distribuição t de Student com } n - 1 \text{ g.l.})$$

Testes de hipóteses sobre $\mu_1 - \mu_2$

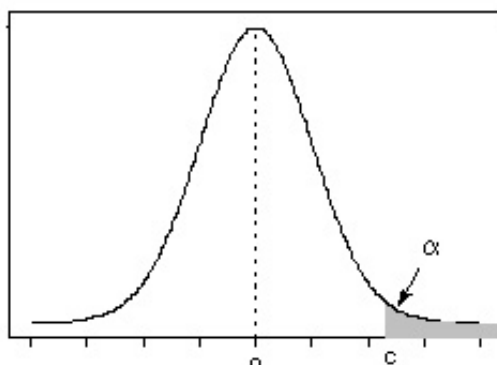
(iii) Região crítica para um nível de significância α escolhido:

$$H_1: \mu_D < \Delta_0$$



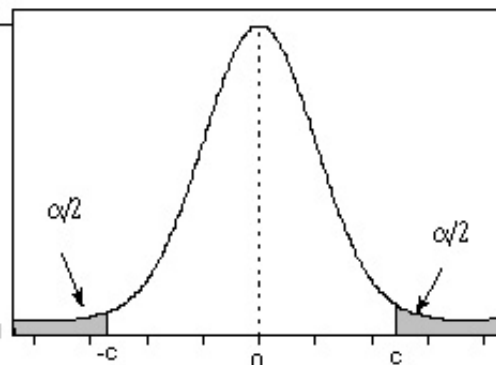
$$R_c = \{T < -c\}$$

$$H_1: \mu_D > \Delta_0$$



$$R_c = \{T > c\}$$

$$H_1: \mu_D \neq \Delta_0$$



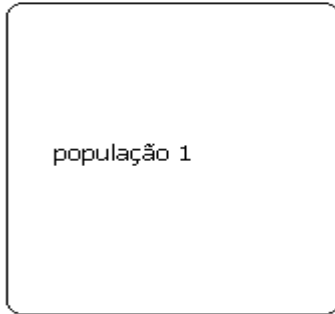
$$R_c = \{|T| > c\}$$

(iv) Se $T \in R_c$, rejeita-se H_0 ; caso contrário, não se rejeita H_0 .

Obs. Conhecido como teste t pareado ou emparelhado (*paired t test*).

3. Populações independentes com distribuição Bernoulli

Bernoulli(p_1)



X_1, \dots, X_n

$$\bar{p}_1 \sim N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n}\right), \text{ aproximadamente.}$$

Bernoulli(p_2)



Y_1, \dots, Y_m

$$\bar{p}_2 \sim N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right), \text{ aproximadamente.}$$

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right), \text{ aproximadamente,}$$

em que $\bar{p}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ e $\bar{p}_2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i$ são as proporções amostrais de sucesso.

Testes de hipóteses sobre $p_1 - p_2$

X_1, \dots, X_n é uma amostra aleatória de tamanho n de uma população com distribuição Bernoulli com probabilidade de sucesso p_1 .

Y_1, \dots, Y_m é uma amostra aleatória de tamanho m de uma população com distribuição Bernoulli com probabilidade de sucesso p_2 .

As duas populações são **independentes**.

(i) Formulação das hipóteses:

$$\begin{array}{ccc} H_0 : p_1 = p_2 & H_0 : p_1 = p_2 & H_0 : p_1 = p_2 \\ \underbrace{H_1 : p_1 < p_2}_{\text{À esquerda}} & \underbrace{H_1 : p_1 > p_2}_{\text{À direita}} & \underbrace{H_1 : p_1 \neq p_2}_{\text{Bilateral}} \end{array}$$

(ii) Estatística de teste:

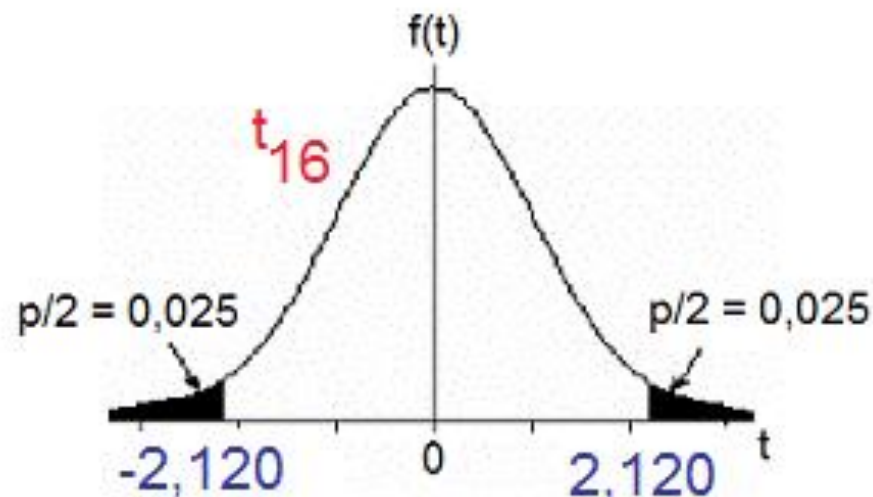
$$Z = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1), \text{ aproximadamente,}$$

$$\text{em que } \bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^m Y_i}{n+m} = \frac{n\bar{p}_1 + m\bar{p}_2}{n+m}.$$

Exemplo 1

A região crítica para $\alpha = 0,05$ é obtida consultando a tabela da distribuição t de Student com $g = 16$ g.l.:

$$R_c = \{ |T| > 2,120 \}.$$



Calculamos

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - 0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}} = \frac{30,82 - 30,63}{\sqrt{\frac{0,0142}{12} + \frac{0,0290}{10}}} = 2,972.$$

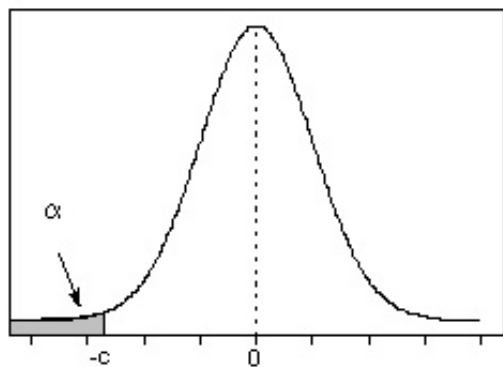
Como $|T| = 2,972 \in R_c$, rejeitamos H_0 .

Conclusão. De acordo com os dados coletados e com um nível de significância de 5%, verificamos que **há** diferença entre os volumes médios envasados pelas duas máquinas.

Testes de hipóteses sobre $p_1 - p_2$

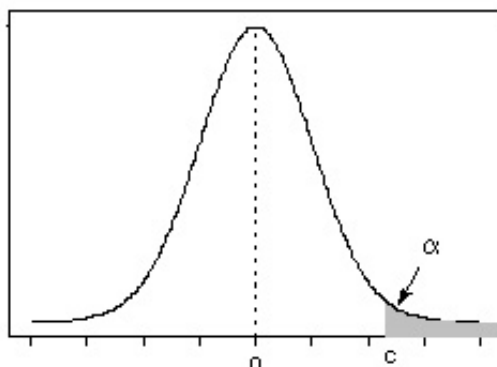
(iii) Região crítica para um nível de significância α escolhido:

$$H_1: p_1 < p_2$$



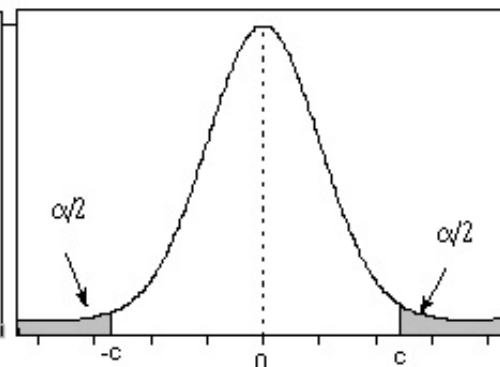
$$R_c = \{Z < -c\}$$

$$H_1: p_1 > p_2$$



$$R_c = \{Z > c\}$$

$$H_1: p_1 \neq p_2$$



$$R_c = \{|Z| > c\}$$

(iv) Se $Z \in R_c$, rejeita-se H_0 ; caso contrário, não se rejeita H_0 .

IC para $p_1 - p_2$

Estimador **pontual** para $p_1 - p_2$: $\bar{p}_1 - \bar{p}_2$.

De forma análoga ao Cap. 7, um intervalo de confiança (IC) **aproximado** de $100(1 - \alpha)\%$ para $p_1 - p_2$ é dado por

$$\text{IC} = [L; U] = [\bar{p}_1 - \bar{p}_2 - E; \bar{p}_1 - \bar{p}_2 + E],$$

sendo que E é o **erro máximo** do IC:

$$E = z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1(1 - \bar{p}_1)}{n} + \frac{\bar{p}_2(1 - \bar{p}_2)}{m}}.$$

IC para $p_1 - p_2$ e testes de hipóteses

O teste da hipótese $H_0: p_1 = p_2$ contra $H_1: p_1 \neq p_2$ a um nível de significância α pode ser efetuado utilizando um IC com coeficiente de confiança igual a $1 - \alpha$.

Construímos o IC de $100(1-\alpha)\%$ para $p_1 - p_2$, dado por

$$[L;U] = [\bar{X} - \bar{Y} - E; \bar{X} - \bar{Y} + E],$$

sendo que no cálculo do erro máximo (E) utilizamos a lâmina 16.

Se $0 \notin \text{IC}$, rejeitamos H_0 ; caso contrário, não rejeitamos H_0 .

Exemplo 1

Duas máquinas são utilizadas para envasar um líquido em frascos de plástico. Com o objetivo de verificar se há diferença entre os volumes médios envasados, duas amostras de 12 e 10 frascos foram selecionadas. Os volumes (em ml) foram medidos resultando nos seguintes valores :

Máquina 1: 30,9, 30,9, 30,8, 30,7, 30,9, 30,6, 30,8, 30,9, 30,7, 30,9, 30,7 e 31,0;

Máquina 2: 30,8, 30,9, 30,7, 30,5, 30,5, 30,6, 30,7, 30,3, 30,6 e 30,7.

Utilizando os dados coletados, qual o resultado da verificação. Adote $\alpha = 5\%$.

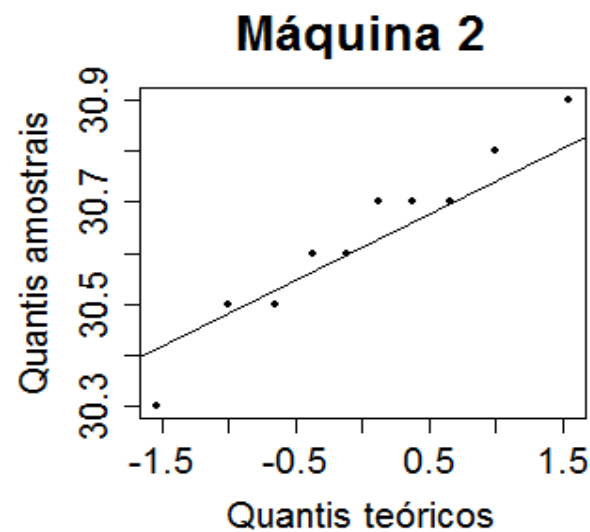
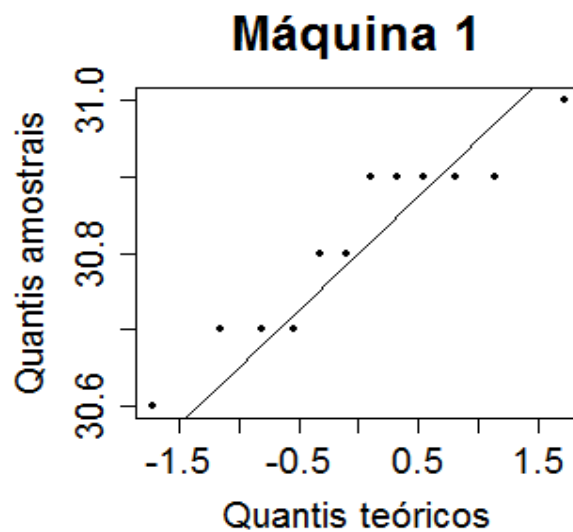
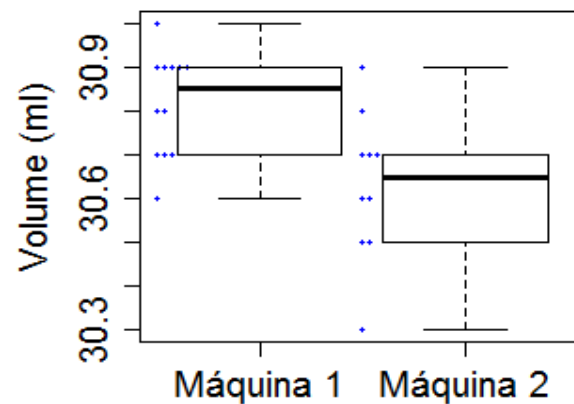
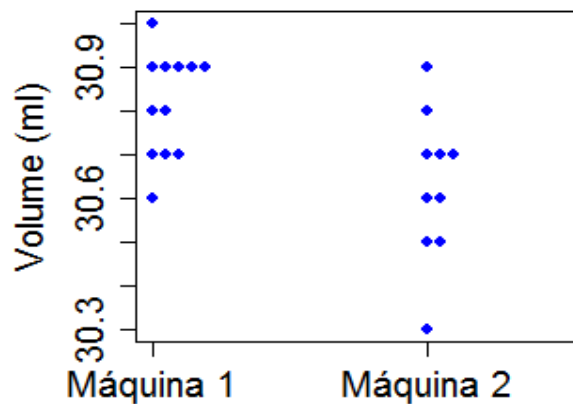
Solução. Problema envolve duas médias de variáveis contínuas.

Definimos X e Y como sendo os volumes envasados pelas máquinas 1 e 2, tais que $E(X) = \mu_1$, $\text{var}(X) = \sigma_1^2$, $E(Y) = \mu_2$ e $\text{var}(Y) = \sigma_2^2$.

Hipóteses: $H_0: \mu_1 = \mu_2$ contra $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (ou seja, $\Delta_0 = 0$).

Exemplo 1

Análise exploratória:



Exemplo 1

Estatística de teste (variâncias diferentes e desconhecidas):

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - 0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}}$$

Utilizando os dados coletados calculamos

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{12} X_i}{12} = \frac{369,8}{12} = 30,82 \text{ ml}, \quad \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^m Y_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{10} Y_i}{10} = \frac{306,3}{10} = 30,63 \text{ ml},$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{12-1} \sum_{i=1}^{12} (X_i - 30,82)^2 = 0,0142 \text{ ml}^2,$$

$$S_2^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2 = \frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (Y_i - 30,63)^2 = 0,0290 \text{ ml}^2 \text{ e}$$

$$g = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n)^2}{n-1} + \frac{(S_2^2/m)^2}{m-1}} = \frac{\left(\frac{0,0142}{12} + \frac{0,0290}{10}\right)^2}{\frac{(0,0142/12)^2}{12-1} + \frac{(0,0290/10)^2}{10-1}} = 16.$$

Exemplo 2

Dois tipos de solução de polimento estão sendo avaliados para possível uso na fabricação de lentes intra-oculares. Trezentas lentes foram polidas usando a primeira solução de polimento e, desse número 217 não apresentaram defeitos causados pelo polimento. Outras 250 lentes foram polidas usando a segunda solução de polimento, sendo que 162 lentes foram consideradas satisfatórias. Há motivo para acreditar que as duas soluções diferem quanto aos defeitos causados quando usadas em polimentos? Adote $\alpha = 0,01$.

Solução. Problema envolve duas proporções. Uma peça não apresentar defeitos causados pelo polimento é o evento sucesso.

Definimos $X_i = 1$ se ocorre sucesso quando a solução 1 é usada; $X_i = 0$, caso contrário, com $P(X_i = 1) = p_1$, $i = 1, \dots, n$ ($n = 300$).

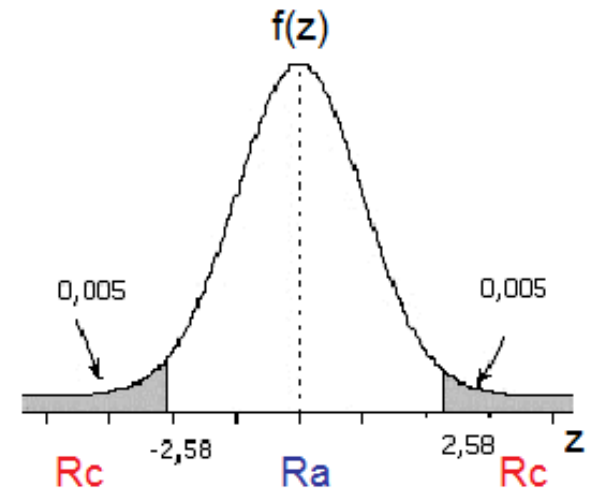
Definimos $Y_i = 1$ se ocorre sucesso quando a solução 2 é usada; $Y_i = 0$, caso contrário, com $P(Y_i = 1) = p_2$, $i = 1, \dots, m$ ($m = 250$).

Hipóteses: $H_0: p_1 = p_2$ contra $H_1: p_1 \neq p_2$.

Exemplo 2

Estatística de teste:
$$Z = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}$$

A região crítica para $\alpha = 0,01$ é obtida consultando a tabela da distribuição normal padrão: $R_c = \{|Z| > 2,58\}$.



Pelo enunciado,

$$\bar{p}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{217}{300} = 0,723, \quad \bar{p}_2 = \frac{\sum_{i=1}^m Y_i}{m} = \frac{162}{250} = 0,648 \text{ e } \bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^m Y_i}{n+m} = \frac{217+162}{300+250} = 0,689,$$

de modo que
$$Z = \frac{0,723 - 0,648}{\sqrt{0,689 \times (1 - 0,689) \times \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{250}\right)}} = 1,90.$$

Como $|Z| = 1,90 \notin R_c$, não rejeitamos H_0 .

Conclusão. De acordo com os dados coletados e com um nível de significância de 1%, **não há** motivo para acreditar que as duas soluções diferem quanto aos defeitos causados quando usadas em polimentos.

4. Nível descritivo ou p-valor

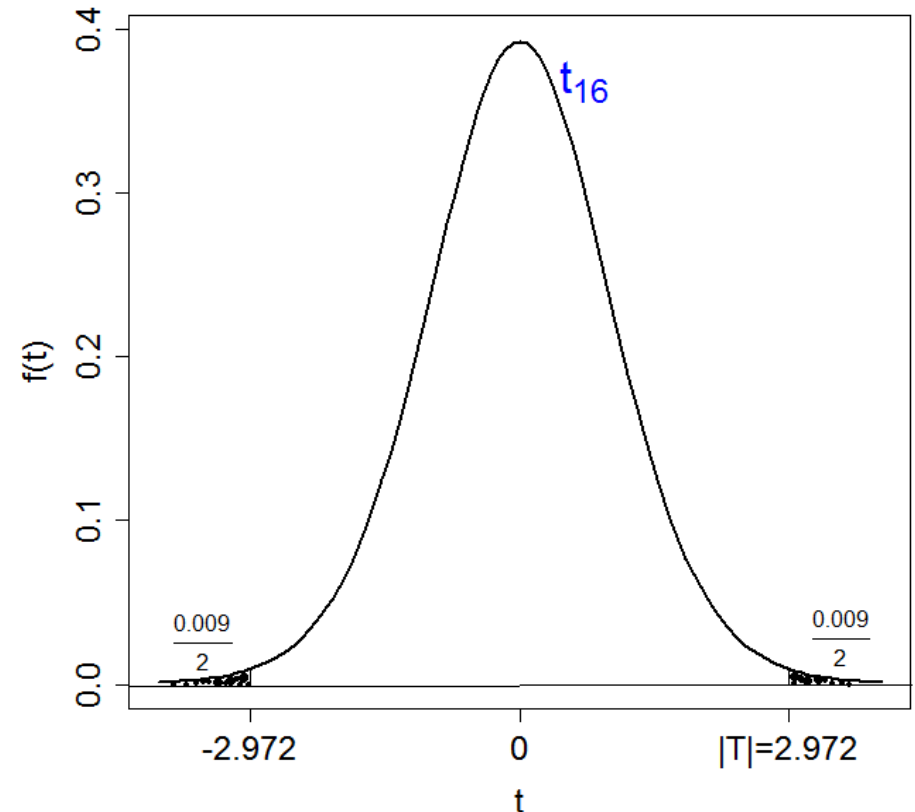
No exemplo 1 (lâmina 18) a região crítica é da forma $R_c = \{|T| > c\}$, sendo que, se H_0 for verdadeira, T tem distribuição t de Student com 16 g.l. Com os dados coletados calculamos

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}} = 2,972.$$

Se adotarmos $c = |T| = 2,972$ obtemos $R_c = \{|T| > 2,972\}$ e a probabilidade do erro tipo I é $P(|T| > 2,972; H_0 \text{ verdadeira}) = P(|T| > 2,972; \mu_1 = \mu_2) = 0,0090 = 0,9\%$.

Em Excel: =DISTT(2,972; 16; 2).

0,0090 é chamado de probabilidade de significância, nível descritivo, p-valor (*p-value*) ou *p*.



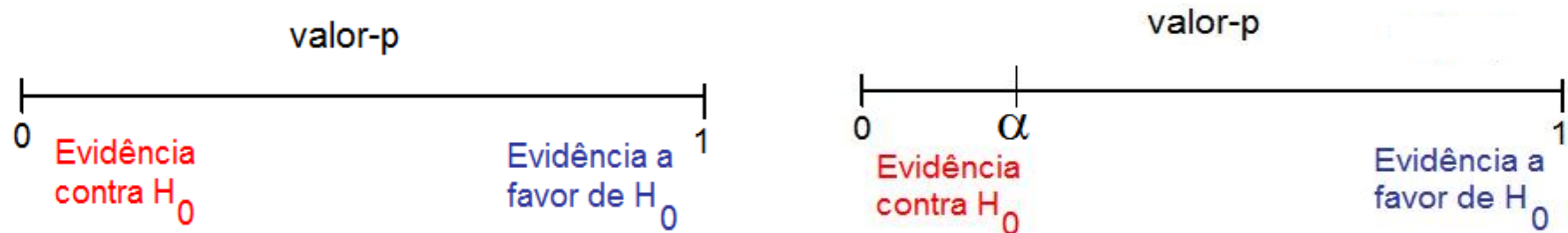
4. Nível descritivo ou p-valor

Como o nível de significância é a probabilidade de um **erro tipo I** (rejeição de H_0 verdadeira), quanto **menor** for **p-valor**, **mais** fortemente **rejeitamos** H_0 .

Quanto **menor** for **p-valor**, **mais evidência contra** H_0 (e vice-versa).

No exemplo 2 (lâmina 22) a região crítica é da forma $R_c = \{|Z| > c\}$, sendo que Z tem distribuição $N(0,1)$, se H_0 for verdadeira. Com os dados coletados calculamos $|Z| = 1,90$.

Neste caso, $\text{valor-p} = P(|Z| > 1,90) = 2 \times P(Z < -1,90) = 2 \times 0,0287 = 0,0574$.



Escolhemos o nível de significância (α). Calculamos o valor-p. Se **p-valor** $< \alpha$, **rejeitamos** H_0 ; se **p-valor** $\geq \alpha$, **não rejeitamos** H_0 .

No exemplo 2, se $\alpha = 5\%$ o resultado do teste seria **inconclusivo**.

Exemplo 3

Em um teste de dureza uma esfera de aço é pressionada contra a superfície de um bloco de material a uma carga padrão. Mede-se o diâmetro (em mm) da cavidade produzida, que está relacionado à dureza do material da superfície. Na realização do teste **duas** esferas (A e B) estão disponíveis. Suspeita-se que a esfera A gera cavidades com **diâmetro** médio com **diferença superior** a **0,2** mm em relação à esfera B.

As duas esferas foram utilizadas em 10 blocos ($n = 10$) obtendo-se os dados abaixo:

Diâmetro das cavidades (mm)										
Esfera	Bloco									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	7,5	4,6	5,7	4,3	5,8	3,2	6,1	5,6	3,4	6,5
B	5,2	4,1	4,3	4,7	3,2	4,9	5,2	4,4	5,7	6,0
Diferença	2,3	0,5	1,4	-0,4	2,6	-1,7	0,9	1,2	-2,3	0,5

O que os dados permitem concluir sobre a suspeita formulada?
Adote $\alpha = 5\%$.

Exemplo 3

Solução. Problema envolve **duas** médias de variáveis contínuas.

Definimos X e Y como sendo os diâmetros das crateras produzidas pelas esferas A e B, tais que $E(X) = \mu_1$ e $E(Y) = \mu_2$.

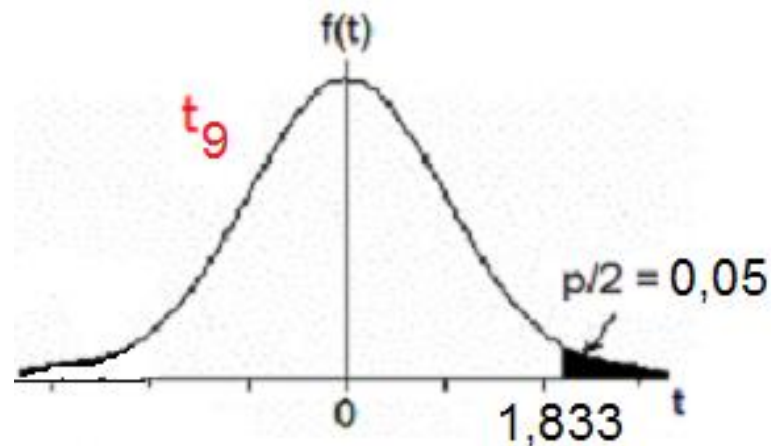
Como os dados são **pareados**, utilizamos $D = X - Y$ com $\mu_D = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = \mu_1 - \mu_2$ e $\text{var}(D) = \sigma_D^2$.

Hipóteses: $H_0: \mu_D = 0,2$ contra $H_1: \mu_D > 0,2$ (ou seja, $\Delta_0 = 0,2$).

Estatística de teste:
$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{D} - \Delta_0)}{s_D}$$

A região crítica para $\alpha = 0,05$ é obtida consultando a tabela da distribuição t de Student com **9** g.l. ($= n - 1$) e $p = 10\%$:

$R_c = \{ T > 1,833 \}$.



Exemplo 3

Calculamos

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} D_i}{10} = \frac{5,0}{10} = 0,5 \text{ mm}, \quad S_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2 = \frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (D_i - 0,5)^2 = 2,51 \text{ mm}^2$$

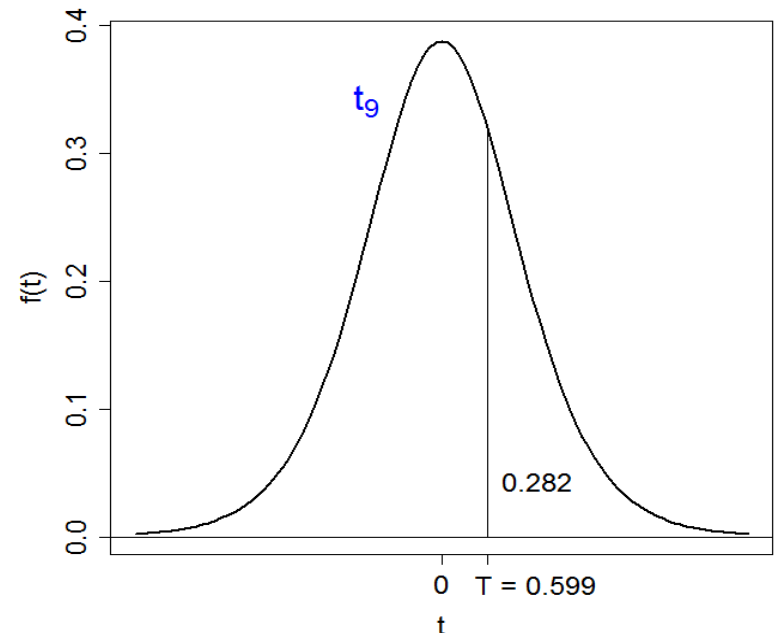
$$\text{e } T = \frac{\sqrt{n}(\bar{D} - \Delta_0)}{s_D} = \frac{\sqrt{10}(0,5 - 0,2)}{\sqrt{2,51}} = 0,599. \quad \text{Como } T = 0,599 \notin R_c, \text{ não rejeitamos } H_0.$$

Conclusão. De acordo com os dados coletados e com um nível de significância de 5%, **não** se confirma a suspeita de que a esfera A gera cavidades com diâmetro médio superior a 0,2 mm em relação à esfera B.

Obs. $R_c = \{ T > c \}$, sendo que, se H_0 for verdadeira, T tem distribuição t de Student com 9 g.l..

Neste caso, valor-p = $P(T > 0,599)$ = 0,282. **Não** rejeitamos H_0 , pois **p-valor** $\geq \alpha$.

Em Excel: **=DISTT(0,599; 9; 1)**.



Exemplo 4

Estudos anteriores indicam que a vida (em horas) de um termopar produzido em uma indústria é uma variável aleatória com distribuição aproximadamente normal. Um grande comprador suspeita que o tempo de vida médio é inferior a 560 h.

Em uma amostra aleatória de 15 termopares adquiridos foram medidos os tempos de vida (em h) 553, 552, 567, 579, 550, 541, 537, 553, 552, 546, 538, 553, 581, 539 e 529.

O que os dados permitem concluir sobre a suspeita do comprador?
Adote $\alpha = 5\%$.

Solução. Problema envolve uma população com distribuição normal.

Definimos X como sendo o tempo de vida (em h) de um termopar, com $E(X) = \mu$ e $\text{var}(X) = \sigma^2$. Pelo enunciado, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 desconhecida.

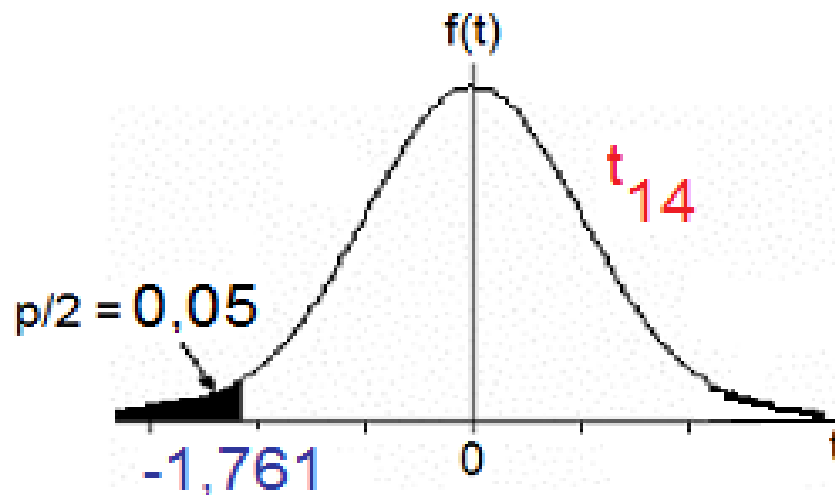
Hipóteses: $H_0: \mu = 560$ contra $H_1: \mu < 560$ (ou seja, $\mu_0 = 560$).

$$\text{Estatística de teste: } T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{s}.$$

Exemplo 4

A região crítica para $\alpha = 0,05$ é obtida consultando a tabela da distribuição t de Student com 14 g.l. ($= n - 1$) e $p = 10\%$:

$$R_c = \{ T < -1,761 \}.$$



Calculamos

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_i}{15} = \frac{8270}{15} = 551,3 \text{ h}, \quad S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{15-1} \sum_{i=1}^{15} (X_i - 551,3)^2} = 14,8 \text{ h}$$

$$\text{e } T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{s} = \frac{\sqrt{15}(551,3 - 560)}{14,8} = -2,266.$$

Como $T = -2,266 \in R_c$, rejeitamos H_0 .

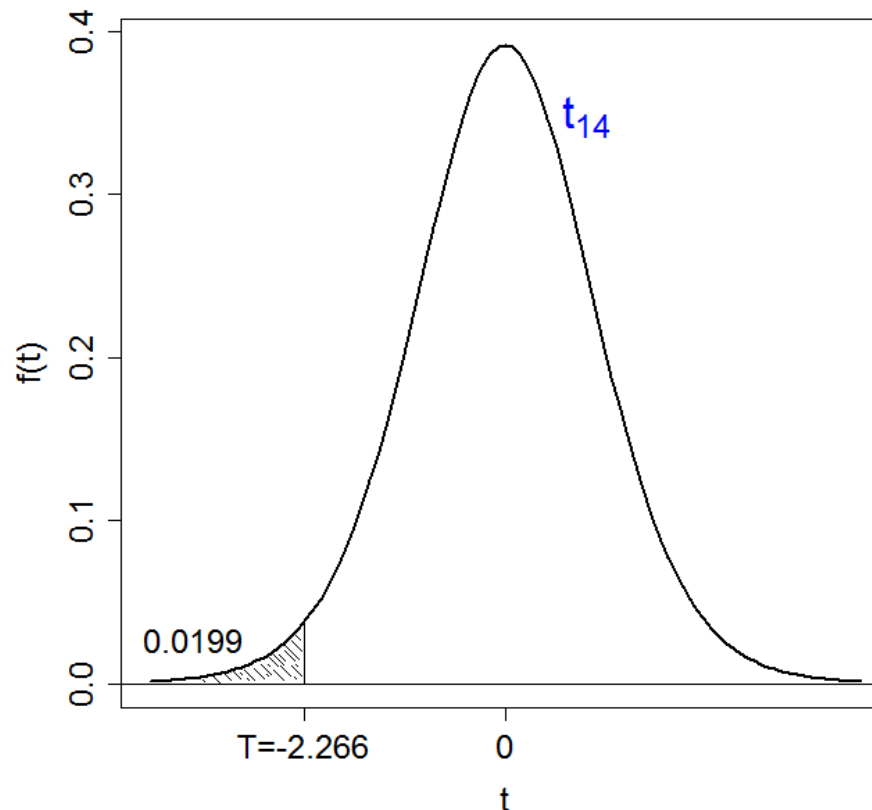
Conclusão. De acordo com os dados coletados e com um nível de significância de 5%, concluímos que a vida média dos termopares é inferior a 560 h.

Exemplo 4

Obs. $R_c = \{ T < -c \}$, sendo que T tem distribuição t de Student com 14 g.l., se H_0 for verdadeira.

Neste caso, $\text{valor-p} = P(T < -2,266) = 0,0199$. Rejeitamos H_0 , pois $\text{valor-p} < \alpha$.

Em Excel: `=DISTT(2,266; 14; 1)`.



Exemplo 5

Heim & Peng (2010), The impact of information technology use on plant structure, practices, and performance: An exploratory study, *Journal of Operations Management* 26, 144 – 162.

This study examines the **impact** of information technology (IT) use on the structure, practices, and performance of manufacturing plants.

O impacto de uma variável sobre outra é quantificado por um **coeficiente** (b).

É de interesse verificar a **significância** do coeficiente ($H_0: b = 0$ versus $H_1: b \neq 0$). Em um primeiro momento não é necessário saber que teste foi utilizado.

Resultados. SPC has a **marginally positive** association with the total number of plant employees ($b = 0.126$, $p = 0.080$) and with plant sales ... ($b = 0.161$, $p = 0.074$). The SPC variable is not significantly related to any of the productivity measures at the **0.10 level**.

Ou seja, $\alpha = 10\%$ (estudo **exploratório**). Se o problema envolvesse a comparação de dois métodos de medição em que se pretende substituir um dos métodos por outro melhor, o nível de significância seria menor.

SPC is negatively related to willingness to introduce new products ($b = -0.393$, $p = 0.000$).

Integration intelligence only exhibits a **weak** positive relationship with developing unique practices ($b = 0.012$, $p = 0.077$).

Teste de hipóteses para a igualdade de variâncias

A distribuição F-Snedecor

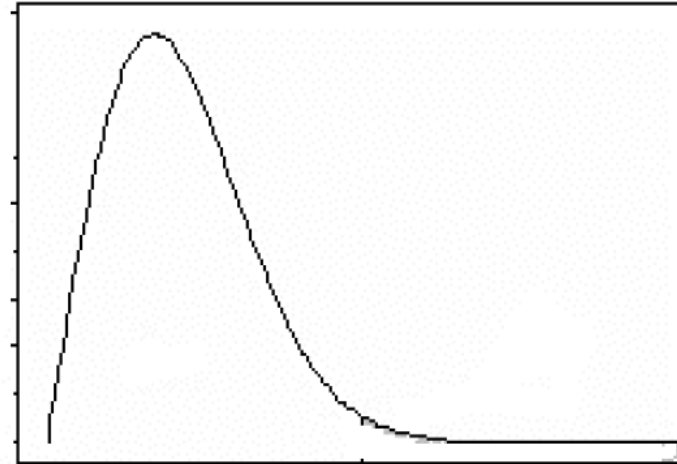
Suponha que X_1, \dots, X_n é uma a. a. de tamanho n de uma população com característica $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$. Considere que Y_1, \dots, Y_m é uma a.a. de tamanho m , de uma população com característica $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Se X e Y são independentes então a v.a.

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \quad (3)$$

Tem distribuição F-Snedecor com $n-1$ (numerador) e $m-1$ (denominador) graus de liberdade.

A função de densidade de um v.a F-Snedecor com u e v graus de liberdade é dado por:.

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right)(u/v)^{u/2} t^{u/2-1}}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-(u+v)/2}}; \quad t > 0$$

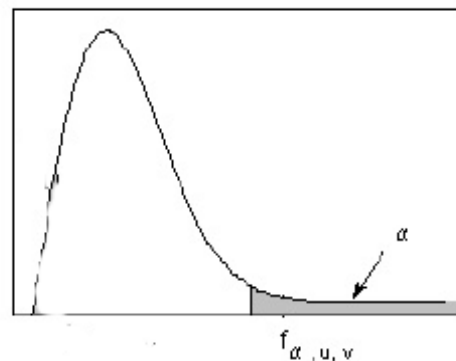


$$E(T) = \frac{v}{v-2}, v > 2; \quad Var(T) = \frac{2v^2(u+v-2)}{u(v-2)^2(v-4)}, v > 4.$$

Notação: $T \sim F(u, v)$

Uso Da Tabela Distribuição F-Snedecor

$$P(Y > f_{\alpha,u,v}) = \alpha$$

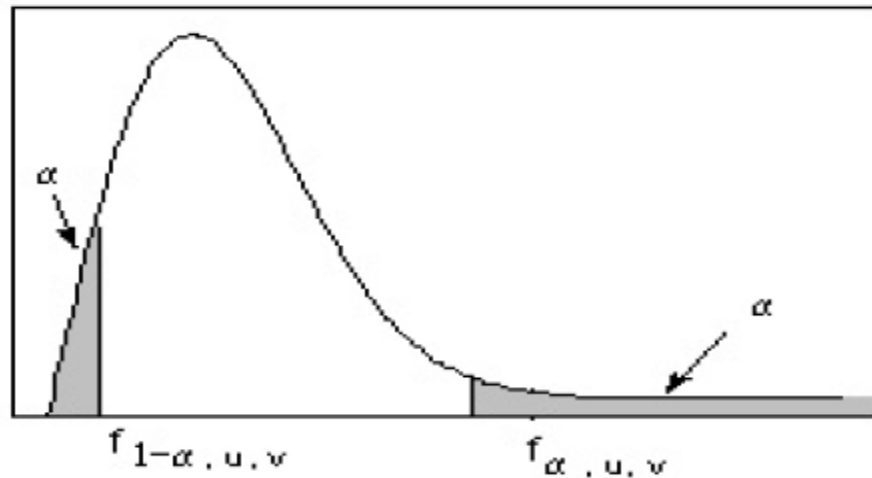


Exemplo 4: Suponha que $Y \sim F(5, 10)$

$$P(Y > f_{0,05,5,10}) = P(Y > 3,33) = 0,05$$

A tabela apresenta pontos críticos na cauda superior (valores de $f_{\alpha,u,v}$) da distribuição F. Os pontos críticos na cauda inferior $f_{1-\alpha,u,v}$ pode ser obtido

$$f_{1-\alpha,u,v} = \frac{1}{f_{\alpha,v,u}}$$



Por exemplo, o ponto crítico de $f_{0,95,5,10}$ é

$$f_{0,95,5,10} = \frac{1}{f_{0,5,10,5}} = \frac{1}{4,74} = 0,211$$

Suponha que temos amostras aleatórias de duas populações normais independentes, isto é, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Temos interesse em verificar se as variâncias populacionais são homogêneas ou heterogêneas.

Nosso interesse é testar as hipóteses seguintes:

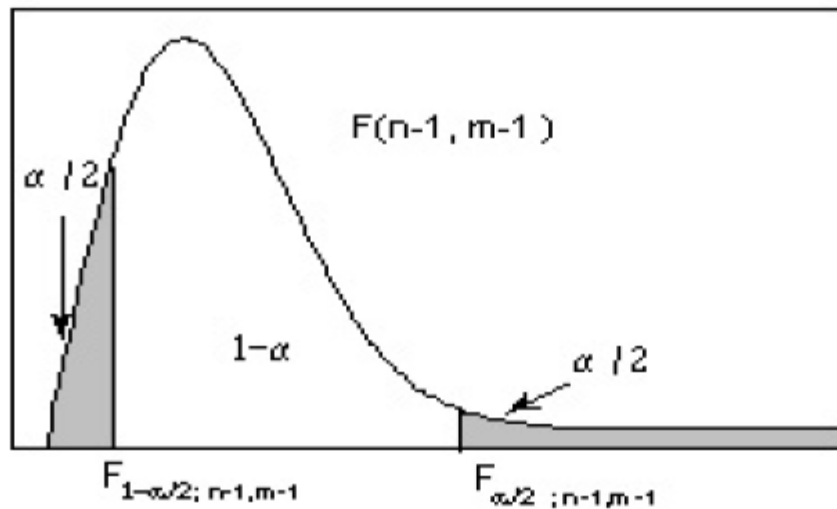
$$(i) \quad H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

(ii) A estatística de teste

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} F(n-1, m-1)$$

(iii) A região crítica, para α fixado é mostrado na figura.



$$R_c = \left\{ F \leq f_{1-\alpha/2, n-1, m-1} \text{ ou } F \geq f_{\alpha/2, n-1, m-1} \right\}$$

(iv) Se a $ET_{\text{obs}} \in R_c$, rejeita-se H_0 em caso contrário não se rejeita H_0 .

Exemplo: A tabela seguinte sintetiza medidas de corrente elétrica (em mA) obtidas por dois engenheiros na análise de placas de circuito integrado.

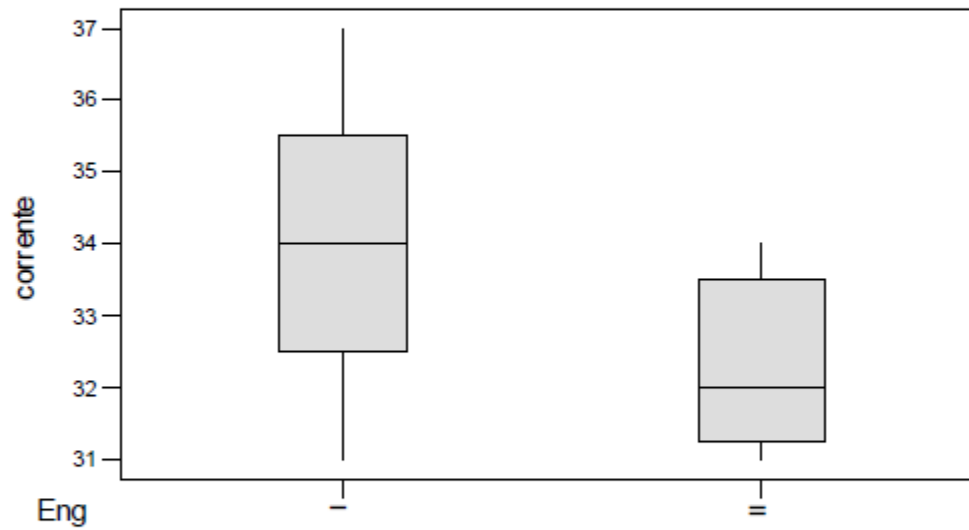
I: 35 35 37 33 31 33

II: 32 34 34 31 32

Há evidência para se afirmar que as medidas possuem a mesma homogeneidade?

Engenheiro	Média	Mediana	Desvio Padrão
I	34,00	34,00	2,098
II	32,25	32,00	1,258

Boxplots of corrente by Eng



Sejam X : Medição do Eng. I

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

Y : Medição do Eng. II

$$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

Nosso interesse é provar as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

(ii) A estatística de teste

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} F(n-1, m-1)$$

onde $n=6$, e $m=5$

(iii) Os valores críticos, para $\alpha=0,10$ são

$$f_{0,05,5,4} = 6,26 \text{ e } f_{0,95,5,4} = \frac{1}{f_{0,05,4,5}} = \frac{1}{5,19} = 0,193$$

A região crítica é dado por

$$R_c = \{F \leq 0,193 \text{ ou } F \geq 6,26\}$$

(iv) A estatística calculada é

$$F_{cal} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \left(\frac{2,098}{1,258} \right)^2 = 2,781$$

Já que, $F_{cal} \notin R_c$, então não rejeitar H_0