

Lista 1: Solução Numérica de Sistema Lineares

NORMAS DE VETORES E MATRIZES

1. Dado o vetor $v = (-3, 1, 8, 2)^T$, calcule $\|v\|_1$, $\|v\|_2$ e $\|v\|_\infty$.
2. Dada a matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & -3 & 6 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcule $\|\mathbf{A}\|_1$;
- (b) Calcule $\|\mathbf{A}\|_\infty$;
- (c) Calcule $\|\mathbf{A}\|_F$.

MÉTODOS DIRETOS

1. Resolver o sistema linear abaixo utilizando o método de eliminação de Gauss com pivoteamento parcial:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

2. Considere o sistema linear abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/6 \\ 13/12 \\ 47/60 \end{pmatrix}$$

- (a) Resolva o sistema usando o método de eliminação de Gauss;
- (b) Resolva o sistema usando o método de eliminação de Gauss com pivoteamento parcial.

3. Resolva o sistema linear a seguir usando o método de Eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

4. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 6 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ -3x_1 + x_2 + 7x_3 = 11 \end{cases}$$

- (a) Resolva-o usando o método de Eliminação de Gauss;
- (b) Calcule o determinante de \mathbf{A} usando o item anterior;
- (c) Determine a decomposição LU da matriz \mathbf{A} usando a Eliminação de Gauss .

5. Através do método de eliminação de Gauss, verifique se o sistema linear abaixo tem ou não solução:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

6. Usando o método de eliminação de Gauss, verificar que o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + \alpha x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2\alpha x_3 = 3 \\ \alpha x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

- (a) Possui uma única solução quando $\alpha = 0$;
(b) Infinitas soluções quando $\alpha = 1$;
(c) Não tem soluções quando $\alpha = -1$.

7. Considere o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Sabendo-se que A^{-1} tem a forma

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & c_{12} & 1/2 \\ 1/12 & c_{22} & 1/4 \\ 1/2 & c_{32} & -1/2 \end{bmatrix},$$

calcule a 2ª coluna de A^{-1} pelo método de eliminação de Gauss.

8. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

- (a) Resolva-o usando decomposição LU;
(b) Calcule o determinante de \mathbf{A} usando a decomposição.

9. Seja:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 12 & -3 & 16 \\ -4 & 17 & -31 \end{pmatrix}$$

- (a) Verificar se \mathbf{A} satisfaz as condições da decomposição LU;
(b) Decompor \mathbf{A} em LU;
(c) Calcule o determinante de \mathbf{A} usando a decomposição LU;

(d) Resolver o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, onde $\mathbf{b} = (21, 54, -63)^T$, usando a decomposição LU.

10. Aplicando-se o método da decomposição LU à matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \times & \times & 3 & \times \\ 4 & -1 & 10 & 8 \\ \times & -3 & 12 & 11 \\ 0 & -2 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

obteve-se as matrizes:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \times & 0 & \times & \times \\ 2 & \times & \times & \times \\ 3 & 0 & \times & 0 \\ 0 & \times & 1 & \times \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \times & -1 & \times & 5 \\ \times & 1 & \times & -2 \\ \times & 0 & 3 & -4 \\ 0 & \times & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Preencher os espaços \times com valores adequados.

11. Resolva o sistema linear a seguir usando a decomposição LU:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$$

12. Usando decomposição LU, inverter a matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Considere o seguinte conjunto "esparso" de equações:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Mostre que usando o método de Eliminação de Gauss o sistema triangular resultante permanece esparso. Um sistema como este é chamado TRIDIAGONAL. Tais sistemas aparecem frequentemente na solução de equações diferenciais.

14. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

Obtenha a factorização desta matriz pelo método de Doolittle e calcule $\text{Det}A$;

MÉTODOS ITERATIVOS

ERRO RELATIVO NA ITERAÇÃO $\mathbf{x}^{(k+1)}$: $\frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}^{(k+1)}\|}$

ESTIMATIVA DO ERRO NA ITERAÇÃO $\mathbf{x}^{(k+1)}$:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)}\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|$$

1. Supomos que o sistema

$$\begin{cases} x_1 - \alpha x_2 & = c_1 \\ -\alpha x_1 + x_2 - \alpha x_3 & = c_2 \\ -\alpha x_2 + x_3 & = c_3 \end{cases}$$

seja resolvido iterativamente pelas fórmulas:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \alpha x_2^{(k)} + c_1 \\ x_2^{(k+1)} = \alpha(x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) + c_2 \\ x_3^{(k+1)} = \alpha x_2^{(k)} + c_3 \end{cases}$$

Para que valores de α a convergência do método definido acima é garantida? Justifique.

2. Um processo iterativo para resolver sistemas de equações do tipo $A\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ é assim definido:

- somar $I\mathbf{x}$ a ambos os membros, obtendo $(I + A)\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{x}$
- realizar iterações a partir de $\mathbf{x}^{(0)}$ fazendo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I + A)\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b} \tag{1}$$

- a) Dê uma condição suficiente que assegure a convergência deste processo iterativo.
- b) Mostre que o método iterativo definido por (1) aplicado ao sistema abaixo converge. Tome $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ e calcule iterações até que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k+1}\|_\infty < 10^{-4}$.

$$\begin{cases} -1.1x_1 + 0.1x_2 = 1 \\ 0.3x_1 - 0.3x_2 = 0 \end{cases}$$

3. Considere cada um dos seguintes sistemas de 3 equações:

$$(I) \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 18 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 = 10 \\ 10x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 27 \end{cases} \quad ; \quad (II) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$$

- a) Sem rearranjar as equações, tente achar as soluções iterativamente, usando os métodos de Jacobi, começando com $\mathbf{x}^{(0)} = (1.01, 2.01, 3.01)^t$.
- b) Rearranje as equações de tal modo que satisfaçam os critérios de convergência e repita o que foi feito em 21.1).
- c) Verifique suas soluções nas equações originais.

4. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 8x + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x + 5x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 1, \end{cases}$$

determine:

- a) A matriz C_J e o vetor \mathbf{g}_J para o Método de Jacobi;
- b) A matriz C_{GS} e o vetor \mathbf{g}_{GS} para o Método de Gauss-Seidel.

5. Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

- a) Verifique o critério das linhas.
- b) Resolva o sistema linear utilizando o Método de Jacobi com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0.7, -1.6, 0.6)^T$ e com erro relativo de $\varepsilon < 10^{-2}$.

6. Usando o Método de Jacobi, obter solução do sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

com três casas decimais correta.

7. Dado o sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 20 \\ 7x_1 + x_2 + 10x_3 = 30 \end{cases}$$

- a) Verificar a possibilidade de aplicação do Método de Jacobi;
- b) Se possível, resolvê-lo pelo método do item (a), obtendo o resultado com erro relativo de $\varepsilon < 10^{-2}$.

8. Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} 5x + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

- a) Verifique o critério das linhas.
- b) Verifique o critério das colunas.
- c) Calcule $\rho(C_{GS})$ e verifique se $\rho(C_{GS}) < 1$.
- c) Se caso algum dos critérios (a), (b) ou (c) for satisfeito, resolva o sistema usando o Método de Gauss-Seidel com $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ e erro relativo de $\varepsilon < 10^{-2}$.

9. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 5x + 2x_2 + x_3 = 7 \\ -x + 4x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = -1 \end{cases}$$

- a) Verificar a possibilidade de aplicação do Método de Gauss-Seidel, usando o critério de Sassenfeld.
- b) Se possível, resolvê-lo pelo método do item (a) com erro relativo de $\varepsilon < 10^{-2}$.