Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
SME300 - Cálculo Numérico
Prof. Murilo F. Tomé $\qquad$ 2^{o} **sem/2012**

3^{a} Lista de Exercícios

1. Dadas as funções:

1.1) $xe^x - 4 = 0$

1.2) $\ln(x) - x + 2 = 0$

pesquisar a existência de raízes e isolá-las em intervalos.

2. A equação $x^2+5x-1 = 0$ tem uma raiz no intervalo $[0,\ 0.5]$. Verifique quais dos processos abaixo podem ser usados, com sucesso, para obtê-la:

2.1) $x_{n+1} = \frac{1-x_n^2}{5}$

2.2) $x_{n+1} = \frac{1-5x_n}{x_n}$

2.3) $x_{n+1} = \sqrt{1-5x_n}$.

3. A equação $f(x) = e^x - 3x^2 = 0$ tem três raízes. Um método iterativo pode ser definido usando a preparação óbvia da equação:

$$x = \pm\sqrt{\frac{e^x}{3}}$$

3.1) Verificar que começando com $x_0 = 0$ haverá convergência para a raiz próxima de -0.5, se o valor negativo for usado e que haverá convergência para a raiz próxima de 1.0, se o valor positivo for usado.

3.2) Mostrar que a forma acima não converge para a terceira raiz próxima de 4.0, qualquer que seja a aproximação inicial próxima da raiz.

4. A fórmula $x_{n+1} = 2x_n - Ax_n^2$ é candidata para se determinar o inverso de um número A; $\frac{1}{A}$. Mostre que se a fórmula converge, então converge para $\frac{1}{A}$ e determine os limites da estimativa inicial x_0 para convergir. Teste suas conclusões nos casos:

4.1) $A = 9$ e $x_0 = 0.1$

4.2) $A = 9$ e $x_0 = 1.0$.

5. Mostre que $x^3 - 2x - 17 = 0$ tem apenas uma raiz real e determine seu valor correto até 5 casas decimais usando o método de Newton.

6. Mostre que a fórmula para determinar raiz cúbica de um número real Q,

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{Q}{x_n^2}\right), n = 0, 1, ...$$

é um caso especial de iteração de Newton.

7. Aplique o método iterativo definido no exercício 6 para determinar a raiz cúbica de 2 com precisão de 10^{-5}. Obtenha o valor inicial, x_0 gráficamente.

8. A equação $x^3 - 2x - 1 = 0$ possui apenas uma raiz positiva.

8.1) Se desejássemos também pesquisar as raízes negativas usando intervalos de amplitude $\frac{1}{2}$, até o ponto -2, em que intervalos seriam encontradas tais raízes?

8.2) Obtenha a menor raiz negativa (em módulo), usando o método de Newton. Trabalhe com arredondamento para 6 casas decimais.

9. Usando o método de Newton determine, sem efetuar a divisão, o valor numérico de $x = \frac{1}{3}$ com 5 casas decimais corretas, iniciando com $x_0 = 0.3$.

10. Seja a função

$$g(x) = \frac{1}{3}\ln(x^2 + 1)$$

a) Prove que a sucessão definida por

$$x_{m+1} = \frac{1}{3}\ln(x_m^2 + 1), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

converge para um número $z \in [-1, 1]$. Determine z e a ordem de convergência.

b) Efectue algumas iterações, começando com $x_0 = 5$, e calcule os quocientes

$$\frac{|e_1|}{(e_0)^2}, \quad \frac{|e_2|}{(e_1)^2}, \frac{|e_3|}{(e_2)^2}, \ldots$$

Os resultados parecem estar de acordo com o que provou na alínea anterior ?

11. Considere os seguintes métodos para obter um valor aproximado de $\sqrt{10}$:

a) método de Newton aplicado a função $f(x) = x^2 - 10$. Mostre que se escolher $x_0 = 4^*$ então o método de Newton converge e a ordem é dois. Calcule três iteradas e determine um majorante para o erro de x_3. Quantos algarismos significativos pode garantir ? (* Note que pode concluir convergência se escolher para x_0 qualquer valor ≥ 4)

b) método de Newton aplicado à função $f(x) = x^{-1/2}(x^2 - 10)$. Admitindo que o método converge, mostre que a ordem de convergência é 3.