CÁLCULO DE AUTO-VALORES E AUTO-VETORES

Teorema1: Se $\left\{\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2, \ldots, \mathbf{V}^n\right\}$ é um conjunto L.I. no $I\!R^n$ então qualquer vetor $\mathbf{x} \in I\!R^n$ pode ser escrito unicamente como

$$\mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{V}^1 + \beta_2 \mathbf{V}^2 + \ldots \beta_n \mathbf{V}^n$$

Teorema2: Seja $A_{n\times n}$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os auto-valores de A com respectivos autovetores $\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2, \ldots \mathbf{V}^n$. Então o conjunto $\{\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2, \ldots, \mathbf{V}^n\}$ é um conjunto L.I. no $I\!R^n$.

MÉTODO DAS POTÊNCIAS

Esse é um método iterativo para determinar o maior auto-valor em módulo de uma matriz $A_{n\times n}$. Além de calcular o maior auto-valor, esse método fornece também o auto-vetor associado ao auto-valor encontrado.

Seja $A_{n\times n}$ com n-auto-valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e $\left\{\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2, \ldots, \mathbf{V}^n\right\}$ os auto-vetores associados ao respectivos auto-valores, isto é, $A\mathbf{V}^i = \lambda_i \mathbf{V}^i$ $(A\mathbf{V}^1 = \lambda_1 \mathbf{V}^1, A\mathbf{V}^2 = \lambda_2 \mathbf{V}^2, \ldots, A\mathbf{V}^n = \lambda_n \mathbf{V}^n)$.

Seja $\mathbf{x} \in I\!R^n$. Como $\left\{\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2, \ldots, \mathbf{V}^n\right\}$ é L.I., existem $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ tal que

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{V}^j = \beta_1 \mathbf{V}^1 + \beta_2 \mathbf{V}^2 + \ldots + \beta_n \mathbf{V}^n \tag{1}$$

Multiplicando (1) por $A, A^2, A^3, \ldots, A^k$, temos:

$$A\mathbf{x} = A\Big(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{V}^j = \beta_1 \mathbf{V}^1 + \beta_2 \mathbf{V}^2 + \ldots \beta_n \mathbf{V}^n\Big) = \beta_1 A\mathbf{V}^1 + \beta_2 A\mathbf{V}^2 + \ldots + \beta_n A\mathbf{V}^n$$

$$hspace * 1.0cm = \beta_1 \lambda_1 A\mathbf{V}^1 + \beta_2 \lambda_2 A\mathbf{V}^2 + \ldots + \beta_n \lambda_n A\mathbf{V}^n$$

$$A\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j \mathbf{V}^j$$

$$A^2\mathbf{x} = AA\mathbf{x} = A\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j \mathbf{V}^j\right) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j A\mathbf{v}^j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j (\lambda_j \mathbf{v}^j)$$

$$hspace * 1.0cm = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j^2 \mathbf{V}^j$$

$$hspace * 1.0cmhspace * 1.0cmhspace * 1.0cm\vdots hspace * 1.0cmhspace * 1.0cm$$

$$A^k\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j^k \mathbf{V}^j$$

Fatorando λ_1^k, vem:

$$A^k\mathbf{x} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{\lambda_j^k}{\lambda_1^k} \mathbf{V}^j$$

Como $|\lambda_1| > |\lambda_j|, j = 2, 3, \ldots, n$, temos que

$$\lim_{k\to\infty} A^k\mathbf{x} = \lambda_1^k \beta_1 \mathbf{V}^1 \tag{2}$$

que converge para 0 se $|\lambda_1| < 1$ e diverge se $|\lambda_1| > 1$ (se $\beta_1 \neq 0$). No entanto, podemos modificar eq. (2) de modo que o limite seja sempre finito e não-nulo como segue:

Seja $\mathbf{x}$ um vetor unitário, digamos, $\mathbf{x}^{(0)}$ e $x_{p_0}^{(0)}$ a componente de $\mathbf{x}^{(0)}$ tal que

$$x_{p_0}^{(0)} = 1 = \|\mathbf{x}^{(0)}\|_\infty hspace*1.0cm \left(\begin{array}{c} \text{ex: } \mathbf{x}^{(0)} = [0.2 \;\; 0.6 \;\; 1.0]^T \\ x_{p_0}^{(0)} = |x_3^{(0)}| = 1.0, \quad \therefore \; p_0 = 3 \end{array} \right)$$

Seja $\mathbf{y}^{(1)} = A\mathbf{x}^{(0)}$ e defina $\mu^{(1)} = y_{p_0}^{(1)}$. Então

$$\mu^{(1)} = y_{p_0}^{(1)} = \frac{y_{p_0}^{(1)}}{x_{p_0}^{(0)}} = \frac{\beta_1\lambda_1 V_{p_0}^1 + \beta_2\lambda_2 V_{p_0}^2 + \ldots + \beta_n\lambda_n V_{p_0}^n}{\beta_1 V_{p_0}^1 + \sum_{j=2}^n \beta_j V_{p_0}^j} = \frac{\beta_1\lambda_1 V_{p_0}^1 + \sum_{j=2}^n \beta_j\lambda_j V_{p_0}^j}{\beta_1 V_{p_0}^1 + \sum_{j=2}^n \beta_j V_{p_0}^j}$$

Seja p_1 o menor inteiro tal que

$$|y_{p_1}^{(1)}| = \|\mathbf{y}^{(1)}\|_\infty$$

e defina $\mathbf{x}^{(1)}$ como sendo

$$\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{y_{p_1}^{(1)}} \mathbf{y}^{(1)} = \frac{1}{y_{p_1}^{(1)}} A\mathbf{x}^{(0)}$$

Então ,

$$x_{p_1}^{(1)} = 1 = \|\mathbf{x}\|_\infty$$

Seja agora,

$$\mathbf{y}^{(2)} = A\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{y_{p_1}^{(1)}} A^2\mathbf{x}^{(0)}$$

e

$$\mu^{(2)} = y_{p_1}^{(2)} = \frac{y_{p_1}^{(2)}}{x_{p_1}^{(1)}} = \frac{\left[\beta_1\lambda_1^2 V_{p_1}^1 + \sum_{j=2}^n \beta_j\lambda_j^2 V_{p_1}^j\right]/y_{p_1}^{(1)}}{\left[\beta_1\lambda_1 V_{p_1}^1 + \sum_{j=2}^n \beta_j\lambda_j V_{p_1}^j\right]/y_{p_1}^{(1)}}$$

$$hspace*1.0cm = \lambda_1 \frac{\left[\beta_1 V_{p_1}^1 + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^2 V_{p_1}^j\right]}{\left[\beta_1 V_{p_1}^1 + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right) V_{p_1}^j\right]}$$

Seja p_2 o menor inteiro com

$$|y_{p_2}^{(2)}| = \|\mathbf{y}^{(2)}\|_\infty$$

e definamos

$$\mathbf{x}^{(2)} = \frac{1}{y^{(2)}_{p_2}}\mathbf{y}^{(2)} = \frac{1}{y^{(2)}_{p_2}}A\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{y^{(2)}_{p_2}y^{(1)}_{p_1}}A^2\mathbf{x}^{(0)}.$$

De maneira semelhante, podemos definir sequencias de vetores $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}_0^\infty$ e $\left\{\mathbf{y}^{(m)}\right\}_0^\infty$ e uma sequencia de escalares $\left\{\mu^{(m)}\right\}_0^\infty$, indutivamente por:

$$\mathbf{y}^{(m)} = A\mathbf{x}^{(m-1)} \tag{3}$$

$$\mu^{(m)} = y^{(m)}_{pm-1} = \lambda_1 \left[\frac{\beta_1 V^1_{p_{m-1}} + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^m V^j_{p_{m-1}}}{\beta_1 V^1_{p_{m-1}} + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{m-1} V^j_{p_{m-1}}} \right] \tag{4}$$

$$\mathbf{x}^{(m)} = \frac{\mathbf{y}^{(m)}}{y_{p_m}} = \frac{A^{(m)}\mathbf{x}^{(0)}}{\prod_{k=1}^m y^{(k)}_{p_k}} \tag{5}$$

onde em cada iteração , p_m é utilizado para representar o menor inteiro tal que

$$|y^{(m)}_{p_m}| = \|\mathbf{y}^{(m)}\|_\infty$$

Examinando Eq. (4), vemos que se $\mathbf{x}^{(0)}$ for escolhido de modo que tenhamos $\beta_1 \neq 0$ então teremos (desde que $|\lambda_j/\lambda_1| < 1, j = 2, 3, \ldots n$):

$$\lim_{m\to\infty} \mu^{(m)} = \lambda_1$$

Pode-se provar ainda que se sequencia de vetores $\left\{\mathbf{x}^{(m)}\right\}_0^\infty$ converge para o auto-vetor associado ao auto-valor λ_1.

OBSERVAÇÕES:

1. No início, não se sabe se a matriz tem autovalor dominante único (por ex. a matriz pode ter autovalores $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_3 = -10$).
2. Também não se sabe como escolher $\mathbf{x}^{(0)}$ de modo a assegurar que sua representação em termos dos autovetores $\left\{\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2, \ldots, \mathbf{V}^n\right\}$ tenha contribuição não -nula de $\mathbf{V}^1$ (isto é, $\beta_1 \neq 0$).

Exemplo: A matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

tem autovalores $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$. Logo, podemos aplicar o método das potências.

Seja $\mathbf{x}^{(0)} = (1 \;\; 1 \;\; 1)^T$. Então ,

Cálculo de $\mathbf{y}^{(1)}, \mu^{(1)}, \mathbf{x}^{(1)}$

$$\mathbf{y}^{(1)} = A\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e assim,

$$\|\mathbf{y}^{(1)}\|_\infty = |y_1^{(1)}| = 10$$
$$p_1 = 1, \quad \mu^{(1)} = y_1^{(1)} = 10, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \frac{\mathbf{y}^{(1)}}{y_1^{(1)}} = \frac{[10 \;\; 8 \;\; 1]^T}{10} = [1 \;\; 0.8 \;\; 0.1]^T$$

Cálculo de $\mathbf{y}^{(2)}, \mu^{(2)}, \mathbf{x}^{(2)}$

$$\mathbf{y}^{(2)} = A\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.2 \\ 5.4 \\ -0.8 \end{bmatrix}$$

e assim,

$$\|\mathbf{y}^{(2)}\|_\infty = |y_1^{(2)}| = 7.2$$
$$p_2 = 1, \quad \mu^{(2)} = y_{p_2}^{(2)} = 7.2, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \frac{\mathbf{y}^{(1)}}{y_2^{(1)}} = \frac{[7.2 \;\; 5.4 \;\; 0.1]^T}{7.2} = [1 \;\; 0.75 \quad -0.11111111]^T$$

Continuando dessa maneira, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\mu^{(3)} = 6.5, hspace*1.0cm \mathbf{x}^{(3)} = [1 \;\; 0.730769, \quad -0.188803]^T \\
&\mu^{(4)} = 6.230769, hspace*1.0cm \mathbf{x}^{(4)} = [1 \quad 0.722200 \quad -0.220850]^T \\
&\mu^{(5)} = 6.111000, hspace*1.0cm \mathbf{x}^{(5)} = [1 \quad 0.718182 \quad -0.235915]^T \\
&\mu^{(6)} = 6.054546, hspace*1.0cm \mathbf{x}^{(6)} = [1 \quad 0.716216 \quad -0.243095]^T \\
&\mu^{(7)} = 6.027027, hspace*1.0cm \mathbf{x}^{(7)} = [1 \quad 0.715247 \quad -0.246588]^T \\
&\mu^{(8)} = 6.013453, hspace*1.0cm \mathbf{x}^{(8)} = [1 \quad 0.714765 \quad -0.248306]^T \\
&\mu^{(9)} = 6.006711, hspace*1.0cm \mathbf{x}^{(9)} = [1 \quad 0.714525 \quad -0.249157]^T \\
&\vdots hspace*1.0cm \vdots hspace*1.0cm \vdots \\
&\vdots hspace*1.0cm \vdots hspace*1.0cm \vdots \\
&\vdots hspace*1.0cm \vdots hspace*1.0cm \vdots \\
&\mu^{(12)} = 6.000837, hspace*1.0cm \mathbf{x}^{(12)} = [1 \quad 0.714316 \quad -0.249895]^T
\end{aligned}$$

Desses valores, vemos que a sequencia de escalares $\mu^{(m)} \to 6.00000$ e a sequencia de vetores $\mathbf{x}^{(m)} \to [1.0 \;\; 0.714316 \quad -0.25]^T$.

Convergencia do met. da potencias: A taxa de convergencia do metodo das potencias é $O(|\lambda_2/\lambda_1|)^m$.

Deficiencia do metodo das potencias: se $\lambda_2/\lambda_1 \approx 1$ (ex. $\lambda_2/\lambda_1 = 0.9$) esse metodo pode requerer muitas iteracoes para convergir com uma precisão ϵ.

METODO DAS POTENCIAS SIMETRICO

Quando A é simétrica, uma variação na escolha dos vetores $\mathbf{x}^{(m)}$, $\mathbf{y}^{(m)}$ e $\mu^{(m)}$ pode ser feita de modo a aumentar a taxa de convergencia da sequencia $\mu^{(m)}$ para o auto-valor λ_1. A taxa de convergencia do metodo modificado (p/ matrizes simetricas) é $O(|\lambda_2/\lambda_1|)^{2m}$. O algoritmo pode ser descrito como segue.

Algoritmo MÉTODO DAS POTÊNCIAS PARA MATRIZES SIMÉTRICAS

Calcula o autovalor dominante e o autovetor associado de uma matriz simetrica.

Parâmetros de ENTRADA: n, matriz $A_{n\times n}$, vetor não-nulo $\mathbf{x}$, tolerancia TOL, numero maximo de iteracoes $itmax$.

Parâmetros de SAIDA: Autovalor aproximado μ; autovetor aproximado $\mathbf{x}$ ou uma mensagem que o numero maximo de iteracoes foi excedido.

1. $k = 1$
   $\mathbf{x} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2$;

2. Enquanto $((k \leq itmax)$ AND $(ERR < TOL))$ faça
   $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$;
   $\mu = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$;
   Se $(\|\mathbf{y}\|_2 = 0)$ Então
      Escreva(A tem autovalor 0);
      Faça $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
      Escreva(Selecione novo vetor $\mathbf{x}$ e reinicie);
      Faça $ERR = 0$;
   Fim-se
   $ERR = \|\mathbf{x} - \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_2}\|_2$;
   $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_2}$;
   $k = k + 1$;
Fim-enquanto
Se $(ERR < TOL)$ Então
   Escreva('Procedimento bem sucedido');
   Escreva('Autovalor $\lambda_1 =$ ', μ);
   Escreva('Autovetor $\mathbf{x} =$ ', $\mathbf{x}$);
Senão
   Escreva('Procedimento nao foi bem-sucedido') ;
   Escreva('Numero max. de iteracoes atingido - ITMAX = ', k);
Fim-se

Exemplo: A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix},$$

tem autovalores $\lambda_1 = 12.07377, \lambda_2 = 3.539929, \lambda_3 = 2.38693$. Logo, podemos aplicar o método das potências.

Seja $\mathbf{x}^{(0)} = (1 \;\; 1 \;\; 1)^T$. Então,

normX $= 1.732051$

$x = [0.577350 \;\; 0.577350 \;\; 0.577350]^T$

Cálculo de $\mathbf{y}^{(1)}, \mu^{(1)}, \mathbf{x}^{(1)}$

$$\mathbf{y}^{(1)} = A\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.577350 \\ 0.577350 \\ 0.577350 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.3508529 \\ 6.9282032 \\ 7.505553 \end{bmatrix}$$

$\mu = 12.00000000000$

$normY = 12.027745701779146$

$x = [0.5280168968 \quad 0.576018432884 \quad 0.6240199689]^T$

Continuando dessa maneira, obtemos:

$$\begin{array}{ll} \mu^{(2)} = 12.0691244, & \mathbf{x}^{(2)} = [0.516965018 \;\; 0.572638174 \;\; 0.636264638]^T \\ \mu^{(3)} = 12.07343918, & \mathbf{x}^{(3)} = [0.514474111 \quad 0.5711255 \quad 0.63963426]^T \\ \mu^{(5)} = 12.0737447, & \mathbf{x}^{(5)} = [0.5138956817 \quad 0.570582974 \quad 0.6405827793]^T \end{array}$$