Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
SME305 Métodos Numéricos e Computacionais I
Prof. Murilo Tomé — **1º sem/2012**

2ª Lista de Exercícios: Solução Numérica de Sistemas Lineares

MÉTODOS ITERATIVOS

1. Supomos que o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & \alpha x_2 & & & = & c_1 \\ -\alpha x_1 & + & x_2 & - & \alpha x_3 & = & c_2 \\ & - & \alpha x_2 & + & x_3 & = & c_3 \end{array}\right.$$

seja resolvido iterativamente pelas fórmulas:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \alpha x_2^{(k)} + c_1 \\ x_2^{(k+1)} = \alpha(x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) + c_2 \\ x_3^{(k+1)} = \alpha x_2^{(k)} + c_3 \end{array}\right.$$

Para que valores de α a convergência do método definido acima é garantida? Justifique.

2. Um processo iterativo para resolver sistemas de equações do tipo $A\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ é assim definido:

- somar $I\mathbf{x}$ a ambos os membros, obtendo $(I + A)\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{x}$
- realizar iterações a partir de $x^{(0)}$ fazendo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I + A)\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b} \tag{1}$$

a) Dê uma condição suficiente que assegure a convergência deste processo iterativo.

b) Mostre que o método iterativo definido por (1) aplicado ao sistema abaixo converge. Tome $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ e calcule iterações até que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k+1}\|_\infty < 10^{-4}$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -1.1x_1 & + & 0.1x_2 & = & 1 \\ 0.3x_1 & - & 0.3x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

3. Considere cada um dos seguintes sistemas de 3 equações:

$$(I)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 18 \\ x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & = & 10 \\ 10x_1 & - & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 27 \end{array}\right. \quad ; \quad (II)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 20 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 12 \end{array}\right.$$

a) Sem rearranjar as equações, tente achar as soluções iterativamente, usando os métodos de Jacobi, começando com $x^{(0)} = (1.01, 2.01, 3.01)^t$.

b) Rearranje as equações de tal modo que satisfaçam os critérios de convergência e repita o que foi feito em 21.1).

c) Verifique suas soluções nas equações originais.

4. Uma maneira de se obter a solução da equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

em uma região retangular consiste em se proceder a uma discretização que transforma a equação em um problema aproximado consistindo em uma equação de diferenças cuja solução, em um caso particular, exige a solução do sistema:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O método de Jacobi pode ser aplicado com garantia de convergência? Caso afirmativo, calcule iteradas $\mathbf{x}^{(k+1)}$ até que $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty < 10^{-3}$.

5. Considere um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1/2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Prove que está garantida a convergência do método de Gauss-Seidel para a solução do sistema, independentemente da aproximação inicial escolhida.

b) Com $\mathbf{x}^{(\mathbf{0})} = \mathbf{b} = [1\ 1\ 1]^T$, obtenha o vetor $\mathbf{x}^{(1}$ pelo método de Gauss-Seidel e calcule uma estimativa do erro $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(1}\|_\infty$.

6. Considere a resolução do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$ com $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ c & 1 & c \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}$, $\quad c \in R$ e $\mathbf{x}$ e $\mathbf{d}$ vetores de R^3.

a) Mostre que se $|c| < 1/2$ o método de Jacobi é convergente, independentemente da iterada inicial $\mathbf{x}^{(\mathbf{0})}$, e é válida a seguinte fórmula do erro:

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_\infty \leq \frac{2|c|}{1-2|c|} \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty$$

b) Faça $c = 1/5$ e $\mathbf{b} = [2\ 1\ 2]^T$. Tomando para iterada inicial $[2\ 0\ 2]^T$, efetue uma iteração pelo método de Jacobi.

7. Verificar se o método de Gauss-Seidel aplicado ao sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é convergente. Caso afirmativo, obter a solução com precisão $\epsilon = 10^{-2}$.

EXERCICIOS EXTRAS EXTRAIDOS DE PROVAS ANTERIORES

1. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & \alpha & \beta \\ 1 & 10 & \beta & 1 \\ \alpha & \beta & 10 & 1 \\ \beta & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix} \tag{2}$$

i) [**1.0**]Para quais valores de α e β o método de Jacobi aplicado a esse sistema linear converge para a solução do mesmo independente da aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.

ii) [**1.5**] Tome $\alpha = \beta = 1$ e $\mathbf{x}^{(0)} = [1.5\ 1.5\ 1.5\ 1.5]$ e, usando o método de Jacobi, calcule aproximações $\mathbf{x}^{(k+1)}$ até que $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty < 0.01$ e calcule um majorante para o erro cometido.

2. Considere o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & & & = & -1 \\ x & - & 3y & & & = & 0 \\ & & y & + & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. , \tag{3}$$

i) [**1.0**] Prove que o método de Jacobi aplicado a esse sistema linear converge para a solução do mesmo independente da aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.
ii) [**1.0**] Tome $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ e mostre que as iteradas satisfazem a desigualdade: $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)}\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{(k+1)}$
iii)[**1.5**]Mostre que o método de Gauss-Seidel aplicado ao sistema acima converge e calcule $\mathbf{x}^{(2)}$. Forneça uma estimativa para erro cometido na iterada $\mathbf{x}^{(2)}$.