Nome: **No. USP:**

RESOLUÇÃO DA 2ª PROVA - 22/06/2012

1. **[1.5]** Considere o seguinte método iterativo

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1.1x_1^{(k)} + g_1 \\ x_2^{(k+1)} = 0.5x_3^{(k)} + g_2 \\ x_3^{(k+1)} = 0.5x_2^{(k)} + g_3 \end{cases}$$

Esse método é convergente? Justifique sua resposta.

SOLUÇÃO: Basta mostrar que o raio espectral da matriz de iteração desse método é $\rho(C) > 1$.

De fato, escrevendo esse método na forma matricial $\mathbf{x}^{(k+1)} = C\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$, tem-se

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.5 & 0.0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g} \text{ onde } \mathbf{g} = [g_1\ g_2\ g_3]^T$$

de onde vemos que a matriz C tem um auto-valor $\lambda = 1.1$ Logo, $\rho(C) \geq 1.1$ e portanto o método iterativo é divergente.

2. **[1.0]** O método de Gauss-Seidel aplicado ao sistema linear

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix},$$ converge? Justifique a sua resposta.

SOLUÇÃO: Para concluir se diverge, precisa calcular o raio espectral da matriz de iteração. Se $\rho(C_{GS}) > 1$ então o método diverge. Os outros critérios ($\|C_{GS}\|$, matriz diag. dominante, SPD, etc) são de suficiência (se forem satisfeitos, conclui-se que o método converge).

Calculando a matriz de iteração do método de Gauss-Seidel,

$$C_{GS} = -(L+D)^{-1}U \quad \left(\text{onde } L = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}\right)$$

obtemos $C_{GS} = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & -1.66666 \end{bmatrix}$ que tem auto-valores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1.66666$. Logo, $\rho(C_{GS}) = |\lambda_2| = 1.66666 > 1$ e portanto o método de Gauss-Seidel aplicado ao sistema linear diverge.

3. **[2.0]** Seja a matriz A abaixo.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ a & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}..$$

Determine para quais valores de a o método de Jacobi aplicado ao sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge e tem-se

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_\infty < \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty$$

SOLUÇÃO: A fórmula do erro na iteração $\mathbf{x}^{(k+1)}$ fornece:

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_\infty \leq \frac{\|C_J\|_\infty}{1 - \|C_J\|_\infty} \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty.$$

Logo, se $\dfrac{\|C_J\|_\infty}{1 - \|C_J\|_\infty} < 1$ teremos $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_\infty < \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty$.

Calculando C_J, vem:

$$C_J = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 1/5 \\ a/5 & 0 & 2/5 \\ 1/5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\|C_J\|_\infty = \max\left\{2/5, |a|/5 + 2/5, 1/5\right\} = (|a|+2)/5$ e impondo

$$\frac{\|C_J\|_\infty}{1 - \|C_J\|_\infty} < 1,$$

obtemos:

$$\frac{\|C_J\|_\infty}{1 - \|C_J\|_\infty} < 1 \Longrightarrow \|C_J\|_\infty < 1 - \|C_J\|_\infty \Longrightarrow 2\|C_J\|_\infty < 1 \Longrightarrow \|C_J\|_\infty < 1/2. \qquad (1)$$

Substituindo o valor de $\|C_J\|_\infty$ na eq. (1), tem-se

$$(|a|+2)/5 < 1/2 \Longrightarrow |a| + 2 < 5/2 \Longrightarrow |a| < 5/2 - 2 = 1/2 \quad \therefore \quad a \in [-1/2,\ 1/2]$$

4. Considere a forma quadrática:

$$f(x,y,z) = 4x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xz + 2yz - 5x + z - 10$$

(i) **[1.0]** Determine o sistema linear proveniente do método do Gradiente para obter o ponto de mínimo da função quadrática acima.

SOLUÇÃO: Basta calcular o gradiente de $f(x,y,z)$ e igualar a zero. Calculando o gradiente vem:

$$\nabla(f) = \begin{bmatrix} (\partial f/\partial x) \\ (\partial f/\partial y \\ (\partial f/\partial z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x - 4z - 5 \\ 4y + 2z \\ 6z - 4x + 2y + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Igualando o gradiente ao vetor nulo, obtemos o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(ii) **[1.5]** Tome $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]$ e calcule uma iteração do método do Gradiente para encontrar o ponto de mínimo de $f(x, y, z)$.

Quem não fez (i), use $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. **[1.0]**

SOLUÇÃO: Tomando $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ e utilizando a matriz obtida no item (i) vem:

- Calcular $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$:

$$r^{(0)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Calcular $\alpha^{(0)}$:

$$\alpha^{(0)} = \frac{\left(\mathbf{r}^{(0)}\right)^T \mathbf{r}^{(0)}}{\left(\mathbf{r}^{(0)}\right)^T A\mathbf{r}^{(0)}} = [5 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0.10569$$

- Calcular $\mathbf{x}^{(1)}$:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha^{(0)}\mathbf{r}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.10569 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.52845 \\ 0 \\ -0.10569 \end{bmatrix}$$

Quem usou $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$ obteve $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.16666 \\ 0.16666 \\ 0.16666 \end{bmatrix}$

5. **[2.0]** Considere a matriz abaixo e $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$.

$$A = \begin{bmatrix} -4.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -2.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 & 4.0 \end{bmatrix}.$$

Utilizando o método das potências, calcule as 3 primeiras aproximações $\mu^{(m)}$ para $|\lambda_1|$.

SOLUÇÃO: Utilizando as fórmulas referentes ao método da potência para calcular o modulo do maior autovalor da matriz A, vem:

- $m = 0$ - Cálculo de $\mathbf{y}^{(1)}, \mu^{(1)}, \mathbf{x}^{(1)}$.

$$\mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T, \qquad x_4^{(0)} = \|\mathbf{x}^{(0)}\|_\infty = 1 = x_p^{(0)}0 \Longrightarrow p_0 = 4$$

$$\mathbf{y}^{(1)} = A\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -4.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -2.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 & 4.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.50 \\ 0.0 \\ 4.0 \end{bmatrix},$$

$$p_1 = 4, \quad \mu^{(1)} = y_{p_0}^{(1)} = y_4^{(1)} = 4.0 \quad \mathbf{x}^{(1)} = \frac{\mathbf{y}^{(1)}}{y_{p_1}^{(1)}} = [0.125 \ \ 0.125 \ \ 0.0 \ \ 1]^T$$

- $m = 1, p_1 = 4$ - Cálculo de $\mathbf{y}^{(2)}, \mu^{(2)}, \mathbf{x}^{(2)}$.

$$\mathbf{x}^{(1)} = [0.125 \;\; 0.125 \;\; 0.0 \;\; 1]^T,$$
$$\mathbf{y}^{(2)} = A\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -4.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -2.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 & 4.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.125 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.3125 \\ 0.1250 \\ 4.1250 \end{bmatrix},$$
$$p_2 = 4, \quad \mu^{(2)} = y_{p_1}^{(2)} = y_4^{(2)} = 4.125 \quad \mathbf{x}^{(2)} = \frac{\mathbf{y}^{(2)}}{y_{p_2}^{(2)}} = [0.0 \;\; 0.07575 \;\; 0.03030 \;\; 1]^T$$

- $m = 2, p_2 = 4$ - Cálculo de $\mathbf{y}^{(3)}, \mu^{(3)}, \mathbf{x}^{(3)}$.

$$\mathbf{x}^{(2)} = [0.0 \;\; 0.07575 \;\; 0.03030 \;\; 1]^T,$$
$$\mathbf{y}^{(3)} = A\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -4.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -2.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 & 4.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.07575 \\ 0.03030 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.515151 \\ 0.348484 \\ 0.037878 \\ 4.106060 \end{bmatrix},$$
$$p_3 = 4, \quad \mu^{(3)} = y_{p_2}^{(3)} = y_4^{(3)} = 4.106060 \quad \mathbf{x}^{(3)} = \frac{\mathbf{y}^{(3)}}{y_{p_3}^{(3)}} = [0.12546 \;\; 0.084870 \;\; 0.009225 \;\; 1]^T$$

AUTO-VALOR $\lambda_1 = 4.1052917...$

6. **[2.0]** Aplique o método de Householder e tridiagonalise a matriz 4×4 abaixo.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix}. \qquad \text{(Obtenha a matriz } A^{(3)} = P^2 A^2 P^2\text{).}$$

SOLUÇÃO: Utilizando o método de HOUSEHOLDER com $k = 2$ obtém-se:

$$\alpha = -5.65685$$
$$r = 5.22625$$
$$\mathbf{w} = [0 \;\; 0 \;\; 0.92387 \;\; 0.38268]$$
$$-2\mathbf{w}\mathbf{w}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.70710 & -0.70710 \\ 0 & 0 & -0.70710 & -0.29289 \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)} = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7071 & -0.7071 \\ 0 & 0 & -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix},$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 10 & 4.0 & 0 & 0 \\ 4.0 & 10 & -5.65666 & 0.000075 \\ 0 & -5.65666 & 14.0 & -0.000279 \\ 0 & 0.000075 & -0.0002789 & 5.99992 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 10 & 4.0 & 0 & 0 \\ 4.0 & 10 & -5.6567 & 0 \\ 0 & -5.6567 & 14.0 & -0.0003 \\ 0 & 0 & -0.0003 & 6.0 \end{bmatrix}$$