Nome e assinatura:

Nro. USP:

Primeira Prova - 16/01/2017

EST101 - Teoria das Probabilidades / PIPGEs

Prof. Pablo Martín Rodríguez

Exercício	Pontos
1	
2	
3	
4	
Total	

- A prova é individual, sem consulta, com duração de 2h30.
- Justifique adequadamente todas as questões, deixando claras as respostas.
- Se for constatada a existência de "cola" ou "cópia" durante a realização da prova, esta será anulada.

---

1. (2 pontos) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e suponha que $(A_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência decrescente de eventos de $\mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) \leq \alpha < 1$, para todo n, onde α é uma constante. Mostre que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

2. O número de erros tipográficos em uma página de um livro é uma variável aleatória Poisson de parâmetro 0.1.
   (a) (1.5 pontos) Supondo que o livro tem 500 páginas obtenha uma aproximação para a probabilidade de que pelo menos uma página do livro contenha pelo menos um erro tipográfico. Que suposições você está fazendo?
   (b) (1.5 pontos) Contando desde a primeira página, encontre a função de probabilidade do número de páginas que devem ser revisadas até que uma página com pelo menos um erro tipográfico seja encontrada ou até que todas as páginas sejam revisadas. Que suposições você está fazendo?

3. (a) (1.5 pontos) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ uma partição de Ω. Mostre que para todo evento $A \in \mathcal{F}$, com $\mathbb{P}(A) > 0$, vale que
   $$\mathbb{P}(A_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|A_i)\mathbb{P}(A_i)}. \tag{1}$$
   (b) (1.5 pontos) Use a equação (1) do item (a) para resolver o seguinte problema: uma urna contém 10 moedas honestas e 6 moedas viciadas. Cada uma das moedas viciadas tem probabilidade 3/4 de dar cara. Suponha que uma moeda é selecionada da urna, ao acaso, e depois é jogada. Determine a probabilidade de que a moeda selecionada seja uma das moedas viciadas, dado que o resultado observado é coroa.

4. (a) (1 ponto) Se X é uma variável aleatória de Poisson tal que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2)$, determine $\mathbb{P}(0 < X < 3)$.
   (b) (1 ponto) Se X é uma variável aleatória de Poisson com média 1, mostre que $\mathbb{E}(|X - 1|) = 2/e$.