Nome e assinatura:

Nro. USP:

Segunda Prova - 30/01/2017
EST101 - Teoria das Probabilidades / PIPGEs
Prof. Pablo Martín Rodríguez

Exercício	Pontos
1	
2	
3	
4	
Total	

- A prova é individual, sem consulta, com duração de 2h30.
- Justifique adequadamente todas as questões, deixando claras as respostas.
- Se for constatada a existência de "cola" ou "cópia" durante a realização da prova, esta será anulada.

---

1. (2 pontos) Seja X uma variável aleatória continua com função densidade de probabilidade f e seja Y uma variável aleatória discreta. A função densidade condicional de X, dado que $Y = i$, é definida por

$$f_{X|Y}(x|i) := \frac{\mathbb{P}(Y = i|X = x)}{\mathbb{P}(Y = i)} f(x). \tag{1}$$

Aplique a Equação 1 na resolução do seguinte problema: suponha que n lançamentos sucessivos da mesma moeda são realizados, mas que não sabemos qual é a probabilidade da moeda usada dar cara. Suponha que tal probabilidade é uma v.a. Uniforme no $(0, 1)$. Mostre que, dado que dos n lançamentos i resultaram em cara, a probabilidade da moeda dar cara tem distribuição *Beta* com parâmetros $i + 1$ e $n - i + 1$.

2. (a) (1.25 pontos) Seja X uma variável aleatória Normal com média 2 e variância 9. Calcule $\mathbb{P}(|X - 1| \leq 2)$.
   (b) (1.25 pontos) Seja X uma variável aleatória Normal com média $\mu > 0$ e variância $\sigma^2 = \mu^2$. Expresse $\mathbb{P}(X < -\mu | X < \mu)$ em termos da função distribuição acumulada Normal Padrão.

3. Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias independentes com distribuição Uniforme no $(0, 1)$.
   (a) (2 pontos) Se $X_{(2)} := \max\{X_1, X_2\}$, calcule $Var\left(X_{(2)}\right)$.
   (b) (1 ponto) Encontre a função densidade de $X_1 + X_2$.

4. Suponha que os tempos de vida, em horas, dos componentes eletrônicos produzidos por uma fábrica são uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com a mesma função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{200}{x^3} & , \quad x > 10; \\ 0 & , \quad x \leq 10. \end{cases}$$

   (a) (1.5 pontos) Calcule a probabilidade aproximada de que um lote de 160 componentes contenha no máximo 10 componentes cujo tempo de vida seja maior do que 40 horas. Pode deixar a resposta em termos da função distribuição acumulada Normal Padrão $\phi(x)$.
   (b) (1 ponto) Calcule o número médio de componentes, em um lote de 160 componentes, cujo tempo de vida seja de no máximo 40 horas.