Equações Diferenciais Ordinárias

Prof Tiago Pereira

Equações Escalares

1. As vezes é possível resolver uma equação não-linear realizando uma mudança de variável que converte a equação original numa equação linear. Uma classe importante que equação tem a forma

$$y' + p(t)y = q(t)y^n$$

é chamada de equação de Bernoulli.

a) Resolva a equação de Bernoulli para $n = 0$ e $n = 1$.

Para $n = 0$ resolva a equação pelo método do fator integrante. Obtendo

$$y(t) = e^{-\int_0^t p(s)ds} + \int_0^t e^{-\int_u^t p(s)ds} q(u)du$$

Para $n = 1$ a equacao reduz a $y' = [q(t) - p(t)]y$ e obtemos

$$y(t) = e^{-\int_0^t [q(s)-p(s)]ds} y_0$$

b) Mostre que se $n \neq 0, 1$, então a substituição $v = y^{1-n}$ reduz a equação de Bernoulli a uma equação linear.

A ideia é escrever a EDO para v notando que $v' = \frac{1}{(1-n)y^n} y'$ e substituindo a EDO para y.

2. Resolva as seguintes equações de Bernoulli

a) $y' + \frac{y}{x} = xy^2$ $\qquad y = \frac{1}{-x^2+Cx}$

b) $y' + y - y^3 = 0$ $\qquad y = \frac{1}{\sqrt{1-ae^{2t}}}$

c) $y' = ry(1-y)$, com $r > 0$ $\qquad y = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{y_0}-1\right)e^{-rt}}$

3. Certo material radioativo decresce a uma taxa proporcional a quantidade de material presente. Se, para uma quantidade inicial de 100 mg, se observa um decréscimo de 5% após dois anos, determine.

a) A quantidade restante como função do tempo

Tomando $\alpha = \ln\left(\frac{95}{100}\right)^{1/2}$, então

$$m(t) = 100e^{\alpha t}$$

b) O tempo necessário para uma redução de 10% da quantidade inicial

$$T = \frac{1}{\alpha}\ln 0.9$$

4. Uma partícula de massa m desloca-se sobre o eixo Ox sob a ação da força resultante $f(x)$, onde f é contínua. Seja $V(x)$ uma função definida em J tal que para todo $x \in J$ tal que

$$V' = -f(x)$$

(diz-se que a força f deriva do potencial V). Seja $x : I \to J$ a função de posição da partícula, (para cada instante $t \in I$, $x(t) \in J$ é a posição da partícula em t). Assuma que o movimento da partícula pela lei de Newton:

$$m\ddot{x}(t) = f(x(t)).$$

a) Demonstre que existe uma constante $E \in \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in I$:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + V(x(t)) = E$$

Primeiramente notamos que E é a energia mecanica do sistema. Portanto, resolvendo o exercicio provamos a Lei de conservação de Energia. Primeiro note que a Lei de Newton pode ser reescrita como

$$m\ddot{x} + \frac{dV(x)}{dt}.$$

Se E é constante então $\dot{E} = 0$. Logo, aplicando a regra da cadeia obtemos

$$\frac{dE}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{1}$$

$$= \underbrace{\left(m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dx}\right)}_{=0}\frac{dx}{dt} \tag{2}$$