Equações Diferenciais

2º ordem linear não homogênea

Tiago Pereira
tiago@icmc.usp.br

ICMC CeMEAI USP

Caso não homogêneo

As EDO's de 2º ordem lineares autônomas são

$$x'' + ax' + bx = f(t)$$

Termo não homogêneo
forçamento

Caso não homogêneo

Solução tem duas partes

$$x'' + ax' + bx = f(t)$$

Solução da homogênea

$$x_h'' + ax_h' + bx_h = 0$$

Solução da particular

$$x_p'' + ax_p' + bx_p = f(t)$$

Caso não homogêneo

Considere a EDO escalar de 2º ordem

$$x'' + ax' + bx = f(t)$$

Então a solução geral tem a forma

$$x_g(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Caso não homogêneo

Considerando a EDO

$$x'' + ax' + bx = f(t)$$

$$x = z + y$$

Homogênea   Particular

Caso não homogêneo

Considerando a EDO

$$x'' + ax' + bx = f(t)$$

Substituindo

$$(z + y)'' + a\,(z + y)' + b(z+y) = f$$

Reagrupando

$$\underbrace{z'' + a\,z' + bz}_{=0} + \boxed{y''+ay' + by = f}$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Exemplo 1

Considere a EDO

$$x'' + 5x' + 6x = 12$$

1. Achar a solução da homogênea
2. Achar a solução da particular

Exemplo 1

1. Achar a solução da homogênea

$$x_h'' + 5x_h' + 6x_h = 0$$

Pela equação característica

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

Exemplo 1

1. Achar a solução da homogênea

$$x_h'' + 5x_h' + 6x_h = 0$$

Solução da homogênea

$$x_h(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

Exemplo 1

2. Achar a solução da particular

$$x_p'' + 5x_p' + 6x_p = 12$$

Ideia é chutar a solução $x_p(t) = c$

$$6c = 12 \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

Exemplo 1

Solução geral de

$$x'' + 5x' + 6x = 12$$

é dada por

$$x_g(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + 2$$

Caso não homogêneo

Ideia fundamental: Chutar a solução da particular

$$x'' + ax' + bx = f(t)$$

mesma forma da f

Exercício: Determine a particular

$$x'' + 3x' + 2x = 8t$$

Estrategia: chutar f um polinomio

$$x_p(t) = \alpha + \beta t$$

$$x_p'(t) = \beta$$

$$x_p''(t) = 0$$

Exercício: Determine a particular

$$\boxed{x''} + \boxed{3x'} + \boxed{2x} = 8t$$

$$\boxed{0} + \boxed{3\beta} + \boxed{2\alpha + 2\beta t} = 8t$$

Logo, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2\beta & = 8 \\ 3\beta + 2\alpha & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \beta = 4 \\ \alpha = -6 \end{array}$$

Exercício: Caso exponencial

Determine a solução da particular

$$x'' + 3x' + 2x = a\boxed{e^{bt}}$$

onde c e d são constantes

Estratégia

$$x_p(t) = \alpha \boxed{e^{bt}}$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Exercício: Caso exponencial

Simplificando

$$\alpha\boxed{(b^2 + 3b + 2)} = a$$

Equação característica

b não pode ser raiz

$$b \notin \{-1, -2\}$$

Exercício: Caso exponencial

Determine a solução da particular

$$x'' + 3x' + 2x = a\boxed{e^{bt}}$$

Método do chute é bom se b não é raiz

$$x_p(t) = \frac{a}{b^2 + 3b + 2} e^{bt}$$