Capítulo 2

Equação Diferencial Linear de Primeira Ordem

Uma equação diferencial de primeira ordem pode ser colocada na forma:

$$\dot{y} = f(t, y), \tag{2.1}$$

onde f é uma função real definida em um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$.

Se a função f depender apenas de t, então a equação fica:

$$\dot{y} = f(t). \tag{2.2}$$

Se f for integrável, então para resolver (2.2) integramos ambos os membros em relação a t, o que nos fornece:

$$y(t) = \int f(t)\, dt + c,$$

em que c é uma constante arbitrária e $\displaystyle\int f(t)\, dt$ é qualquer primitiva de f.

Este procedimento é impossível na maioria dos casos e, portanto, não conseguiremos resolver, sem o auxílio de computadores, a maioria das equações diferenciais. Partiremos, então, de equações mais simples, as quais poderemos resolver, que são as lineares.

Definição 2.1. *Uma* **equação diferencial linear de primeira ordem** *é uma equação da forma:*

$$\dot{y} + a(t)\,y = b(t), \tag{2.3}$$

em que $a(t)$ e $b(t)$ são funções contínuas num intervalo I.

Observação 2.1. A equação (2.3) é chamada linear pois, se a escrevermos na forma (2.1), teremos $f(t,y) = -a(t)\,y + b(t)$ e a parte que depende de y, isto é, $g(t,y) = -a(t)\,y$ é linear em y. De fato, $g(t, \alpha_1\,y_1 + \alpha_2\,y_2) = -a(t)\,[\alpha_1\,y_1 + \alpha_2\,y_2] = -\alpha_1\,a(t)\,y_1 - \alpha_2\,a(t)\,y_2 = \alpha_1\,g(t,y_1) + \alpha_2\,g(t,y_2)$. □

Observação 2.2. O P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{y} + a(t)\,y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

possui solução única. Isto segue do Teorema 1.1, pois as funções $f(t,y) = -a(t)\,y + b(t)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y) = -a(t)$ são contínuas em t e em y. □

Exemplo 2.1.

1. $\dot{y} = t^2\,y + \operatorname{sen} t$ é uma equação diferencial linear de 1ª ordem, pois neste caso $g(t,y) = t^2\,y$ é linear em y.
2. $\dot{y} = t\,y^2 + \operatorname{sen} t$ não é E.D.O. linear de 1ª ordem, pois $g(t,y) = t\,y^2$ não é linear em y.
3. $\dot{y} = t\,\cos y + t$ não é E.D.O. linear de 1ª ordem, pois $g(t,y) = t\,\cos y$ não é linear em y. □

2.1 A Equação Homogênea

Como uma solução da equação (2.3) não é imediata, vamos simplificá-la ainda mais, colocando $b(t) \equiv 0$. Obtemos

$$\dot{y} + a(t)\,y = 0 \tag{2.4}$$

que é chamada **equação diferencial linear homogênea** [L.H.] associada a (2.3). A equação (2.3) é chamada **equação diferencial linear não homogênea** [L.N.H.].

A equação (2.4) pode ser resolvida facilmente. Dividindo ambos os membros da equação por y, obtemos:

$$\frac{\dot{y}}{y} = -a(t).$$

Lembrando que $\dfrac{\dot{y}}{y} = \dfrac{d}{dt}\,(\,\ln|y(t)|\,)$ temos que a equação (2.4) pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dt}\,(\,\ln|y(t)|\,) = -a(t).$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$\ln|y(t)| = -\int a(t)\,dt + c_1,$$

em que c_1 é uma constante de integração. Tomando exponenciais de ambos os membros, encontramos

$$|y(t)| = \exp(-\int a(t)\,dt + c_1).$$

Logo,

$$y(t) = c\exp(-\int a(t)\,dt). \tag{2.5}$$

Observamos que $y(t)$, dada por (2.5), é uma solução de (2.4). Podemos dizer mais, qualquer outra solução de (2.4) será desta forma para algum $c \in \mathbb{R}$. Neste caso dizemos que (2.5) é a **solução geral** da equação diferencial linear homogênea.

Exemplo 2.2. Determine a solução geral da equação: $\dot{y} + 2\,t\,y = 0$.

Solução: Neste caso $a(t) = 2\,t$. Logo,

$$y(t) = c\,e^{-\int a(t)\ dt} = c\,e^{-\int 2\,t\,dt} = c\,e^{-t^2}.$$

Portanto,

$$y(t) = c\,e^{-t^2}$$

é a solução geral. □

Exemplo 2.3. Determine a solução do P.V.I.: $\dot{y} + (\operatorname{sen} t)\,y = 0$ com $y(0) = 2$.

Solução: Aqui $a(t) = \operatorname{sen} t$. Logo,

$$y(t) = c\,e^{-\int \operatorname{sen} t\,dt} = c\,e^{\cos t}$$

e, portanto, a solução geral é

$$y(t) = ce^{\cos t}.$$

Como $y(0) = 2$, temos

$$2 = y(0) = c\ e^{\cos 0},$$

o que implica que $c = 2e^{-1}$. Logo, a solução do P.V.I. será

$$y(t) = 2\,e^{\cos t - 1}. \ \square$$

Exercícios 2.1. (1) Determine a solução do P.V.I. $\dot{y} + e^t\,y = 0$ com $y(0) = 3/2$.

(2) Determine o comportamento, quando $t \to \infty$, de todas as soluções da equação $\dot{y} + a\,y = 0$, em que a é constante.

(3) Mostre que o conjunto das soluções de (2.4) possui as seguintes propriedades:

i) Se y_1 e y_2 são soluções, então $y_1 + y_2$ também é solução.

ii) Se y_1 é solução, então $c\,y_1$ também é solução, para todo $c \in \mathbb{R}$.

iii) A função $y(t) \equiv 0$ é solução.

Observação 2.3. O exercício (3) nos diz que o conjunto das soluções de (2.4) é um **espaço vetorial**. Como toda solução de (2.4) é da forma (2.5), segue-se que este espaço vetorial tem dimensão 1 e que $y_1(t) = e^{-\int a(t)\,dt}$ é uma base para este espaço. □

2.2 A Equação não Homogênea

Consideremos agora a equação não homogênea

$$\dot{y} + a(t)\,y = b(t). \tag{2.6}$$

Se conseguíssemos escrever a equação acima como

$$\frac{d}{dt}(\text{“algo”}) = b(t),$$

o nosso problema estaria resolvido, pois bastaria integrar ambos os membros para encontrar o valor de “algo”. Porém, a expressão $\dot{y} + a(t)y$ não aparece como derivada de alguma expressão simples. Para resolvermos o problema procuraremos uma função $\mu(t)$, contínua e diferenciável tal que multiplicando-se ambos os membros da expressão (2.6) por $\mu(t)$ obteremos a equação equivalente:

$$\mu(t)\dot{y} + \mu(t)a(t)y = \mu(t)b(t) \tag{2.7}$$

(onde, por equação equivalente entendemos que toda solução de (2.7) é uma solução da (2.6) e reciprocamente) de modo que o primeiro membro de (2.7)

$$\mu(t)\,\dot{y} + \mu(t)\,a(t)\,y$$

seja a derivada de alguma expressão simples.

Observamos que

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)y) = \mu(t)\,\dot{y} + \dot{\mu}(t)\,y.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mu(t)\,\dot{y} + a(t)\,\mu(t)\,y = & \frac{d}{dt}(\mu(t)\,y) \Leftrightarrow \dot{\mu}(t) = a(t)\,\mu(t)\\ & \Leftrightarrow \dot{\mu}(t) - a(t)\,\mu(t) = 0 \Leftrightarrow \mu(t) = e^{\int a(t)\ dt}.\end{aligned}$$

Logo, para esta $\mu(t)$ a equação (2.6) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)\,y) = \mu(t)\,b(t).$$

Por integração obtemos

$$\mu(t)\,y = \int \mu(t)\,b(t)\,dt + c$$

ou

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}[\int \mu(t)\,b(t)\,dt + c] = e^{-\int a(t)\,dt}[c + \int e^{\int a(t)\,dt}\,b(t)\ dt].$$

Portanto,

$$y(t) = c\,e^{-\int a(t)\,dt} + e^{-\int a(t)\,dt}\int e^{\int a(t)\,dt}\,b(t)\,dt \tag{2.8}$$

é a **solução geral** da equação não homogênea.

Observação 2.4. Vemos que a 1ª parcela da fórmula (2.8) é a solução geral da homogênea associada e que

$$y_p(t) = e^{-\int a(t)\,dt}\int e^{\int a(t)\ dt}\,b(t)\,dt$$

é uma solução particular da equação não homogênea (obtida quando $c = 0$). Logo, a solução geral da [L.N.H.] é a soma da geral da [L.H.] asssociada com uma particular da [L.N.H.]. □

Observação 2.5. A função $\mu(t) = e^{\int a(t)\,dt}$ é chamada **fator integrante** para a equação não homogênea. $\square$

Observação 2.6. Um outro método de resolver uma equação [L.N.H.] é o chamado **método da variação das constantes**, que consiste em fazer

$$y = u\,v$$

que implica

$$\dot{y} = u\,\dot{v} + \dot{u}\,v.$$

Logo, a equação [L.N.H.], $\dot{y} + a(t)\,y = b(t)$, se torna

$$u\,\dot{v} + v\,\dot{u} + a(t)\,u\,v = b(t),$$

ou seja,

$$u(\dot{v} + a(t)\,v) + (v\,\dot{u} - b(t)) = 0.$$

Se cada termo for nulo, então esta equação será satisfeita. Portanto, fazendo

$$\dot{v} + a(t)\,v = 0 \quad \text{e} \quad v\,\dot{u} - b(t) = 0$$

e resolvendo a primeira delas, obteremos v em função de t (não se acrescenta constante de integração porque se deseja um simples valor de v). Em seguida, substituindo este valor na segunda equação e integrando, obteremos o valor de u (agora acrescentamos a constante de integração pois desejamos que $y = uv$ seja a solução geral do problema). $\square$

Exemplo 2.4. Determine a solução geral da equação: $\dot{y} + 2\,t\,y = t$.

Solução: Aqui $a(t) = 2\,t$. Logo,

$$\mu(t) = e^{\int a(t)\,dt} = e^{\int 2\,t\,dt} = e^{t^2}.$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação por $\mu(t)$, obtemos a equação equivalente:

$$e^{t^2}(\dot{y} + 2\,t\,y) = t\,e^{t^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{dt}(y\,e^{t^2}) = t\,e^{t^2}.$$

Portanto,

$$y\,e^{t^2} = \int t\,e^{t^2}\,dt + c = \frac{1}{2}\,e^{t^2} + c$$

que implica

$$y(t) = c\,e^{-t^2} + \frac{1}{2}. \ \square$$

Exemplo 2.5. Determine a solução do P.V.I.: $\dot{y} - 3\,t^2\,y = t^2$, $y(0) = 1$.

Solução: Aqui $a(t) = -3\,t^2$. Logo

$$\mu(t) = e^{\int a(t)\ dt} = e^{\int -3t^2\ dt} = e^{-t^3}.$$

Multiplicando-se ambos os membros por $\mu(t)$, obtemos:

$$e^{-t^3}(\dot{y} - 3t^2\,y) = t^2 e^{-t^3} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{dt}(e^{-t^3}\,y) = t^2 e^{-t^3}.$$

Assim,

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\,(e^{-s^3} y(s))\ ds = \int_0^t s^2 e^{-s^3}\ ds\,.$$

efetuando a integração, obtemos

$$e^{-t^3}\,y(t) - y(0) = -\frac{1}{3}\,(e^{-t^3} - 1).$$

Como $y(0) = 1$, temos que

$$y(t) = \frac{4}{3}\,e^{t^3} - \frac{1}{3}. \ \square$$

Exercícios 2.2. 1) Determine a solução dos P.V.I.'s:

a) $\dot{y} = (\cos t)\,y, \quad y(0) = 1.$

b) $\dot{y} + \dfrac{2}{t}\,y = t^3, \qquad y(1) = 2.$

c) $t\,\dot{y} + y = t, \qquad y(10) = 20.$

d) $\dot{y} + y = \dfrac{1}{1+t^2}, \qquad y(1) = 3.$

e) $(1+t^2)\,\dot{y} + 4\,t\,y = t,\ y(1) = \dfrac{1}{4}.$

2) (Equação de Bernoulli) A equação

$$\dot{y} + p(t)y = q(t)y^n,$$

em que $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas em algum intervalo I da reta e $n \in \mathbb{R}$, é conhecida como a **equação de Bernoulli**. Se $n \neq 0$ e $n \neq 1$ a equação não é linear, mas pode ser transformada em uma equação linear fazendo a mudança de variável $z = y^{1-n}$. Demonstre isto, e resolva as equações:

a) $\dot{y} + t^2\, y = t^2\, y^4$.

b) $\dot{y} - \dfrac{3}{t}\, y = t^4\, y^{1/3}$.

c) $\dot{y} + \dfrac{2}{t}\, y = -t^9\, y^5, \quad y(-1) = 2$.

3) (Equação de Ricatti) A equação

$$\dot{y} + p(t)\, y + q(t)\, y^2 = f(t), \qquad (R)$$

em que $p(t)$, $q(t)$ e $f(t)$ são funções contínuas em algum intervalo I da reta e $q(t) \neq 0$ em I é conhecida como a **equação de Ricatti**. Se $y_1(t)$ é uma solução particular de (R), mostre que a mudança de variável $y = y_1 + 1/z$ transforma (R) numa equação **linear** de 1ª ordem em z da forma $\dot{z} = (p(t) + 2\, q(t)\, y_1)\, z + q(t)$. Deduza daí que a solução geral de uma equação de Ricatti pode ser encontrada, desde que se conheça uma solução particular.

4) Use o exercício anterior para determinar a solução geral de cada uma das seguintes equações de Ricatti:

a) $\dot{y} - t^3\, y + t^2\, y^2 = 1$, $y_1(t) = t$.

b) $\dot{y} - t\, y^2 + (2t - 1)\, y = t - 1$, $y_1(t) = 1$.

c) $\dot{y} + y^2 - (1 + 2\, e^t)\, y + e^{2\,t} = 0$, $y_1(t) = e^t$.

d) $\dot{y} + t\, y^2 - 2\, t^2\, y + t^3 = t + 1$, $y_1(t) = t - 1$.