Equações Diferenciais

2º ordem linear escalar

Tiago Pereira
tiago@icmc.usp.br

Forma Geral

As EDO’s de 2º ordem lineares autônomas são

$$x'' + ax' + bx = f(t)$$

Forma Geral

As EDO's de 2º ordem lineares autônomas são

$$x'' + ax' + bx = f(t)$$

onde

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{função incognita}$$

Forma Geral

As EDO's de 2º ordem lineares autônomas são

$$x'' + ax' + bx = f(t)$$

constantes

Forma Geral

As EDO's de 2º ordem lineares autônomas são

$$x'' + ax' + bx = f(t)$$

termo não homogêneo
forçamento

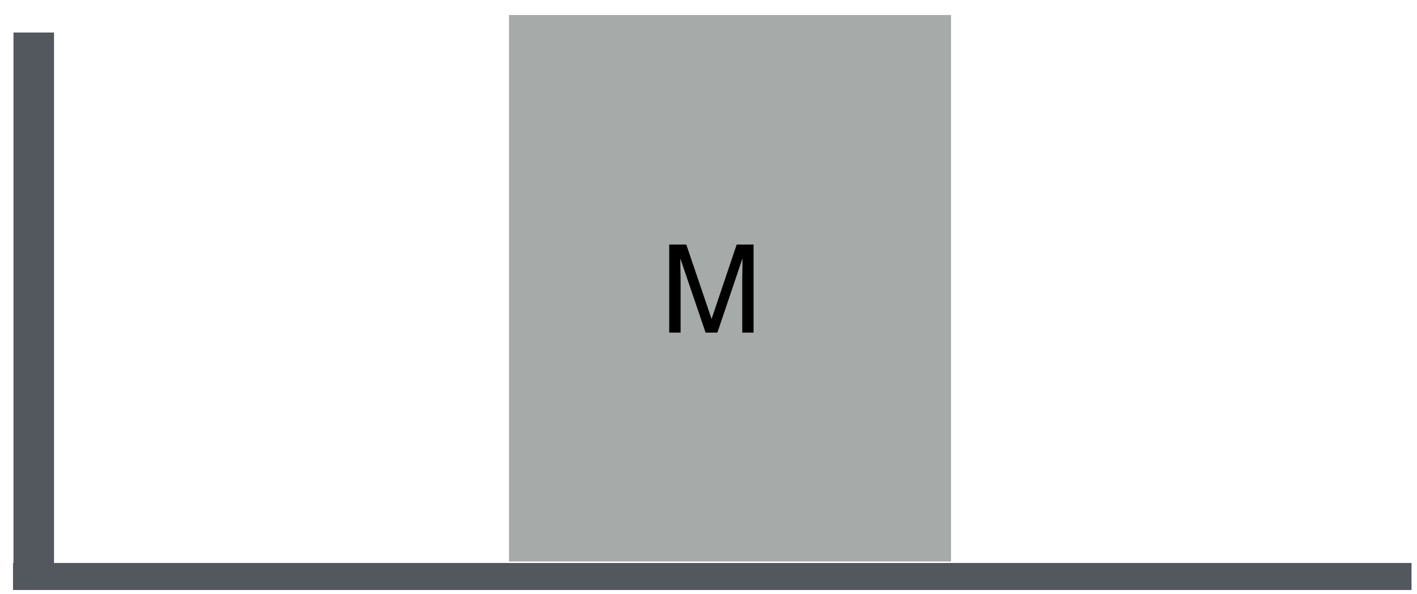
Forma Geral

EDO's Homogêneas

$$x'' + ax' + bx = 0$$

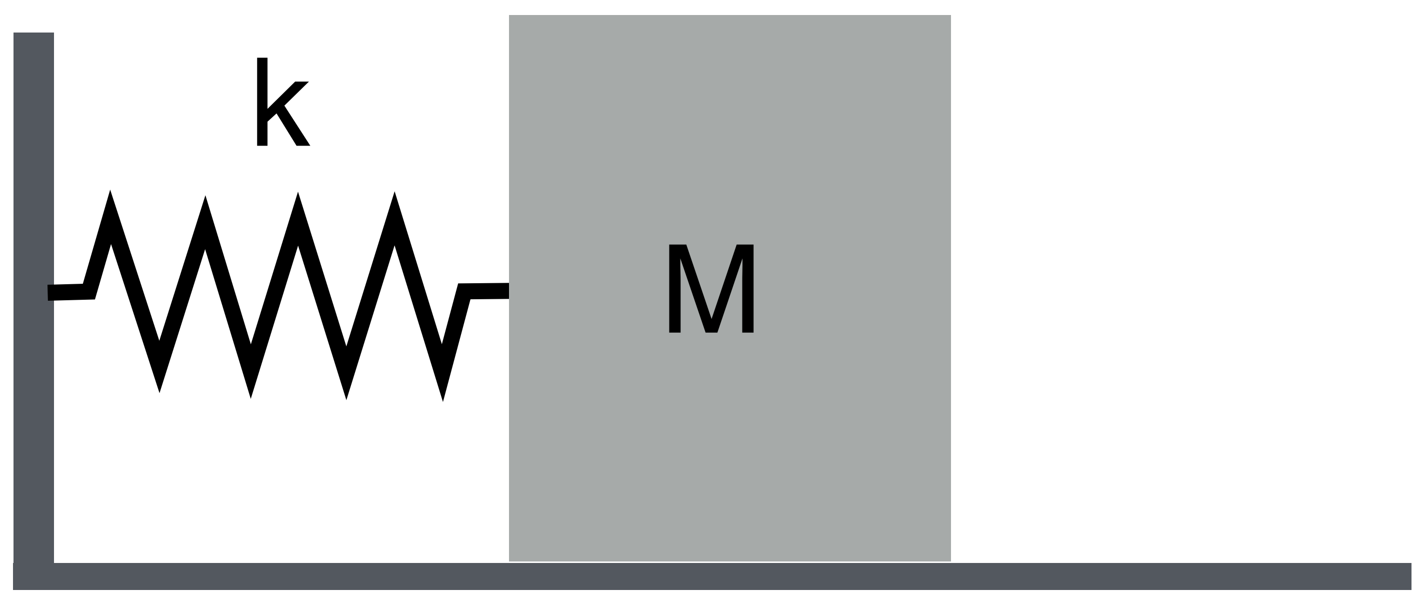
Exemplos: Massa-Mola

Massa deslisando sobre uma superfície sem atrito



Exemplos: Massa-Mola

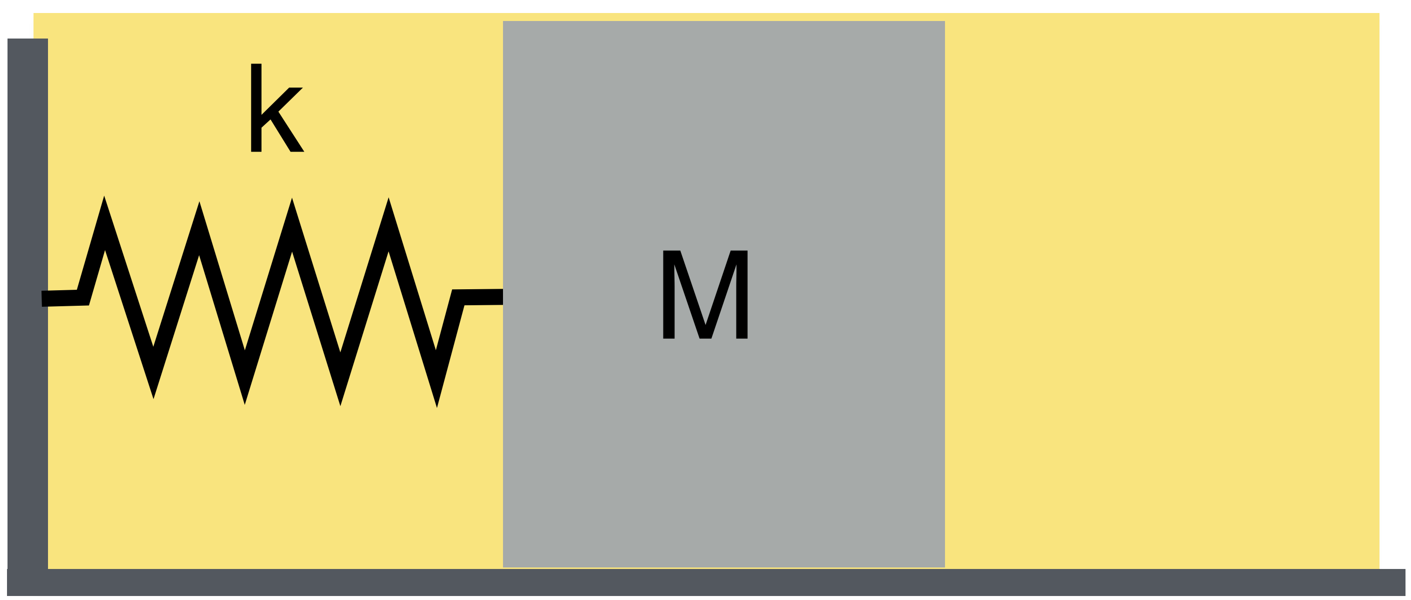
presa a uma mola



https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Exemplos: Massa-Mola

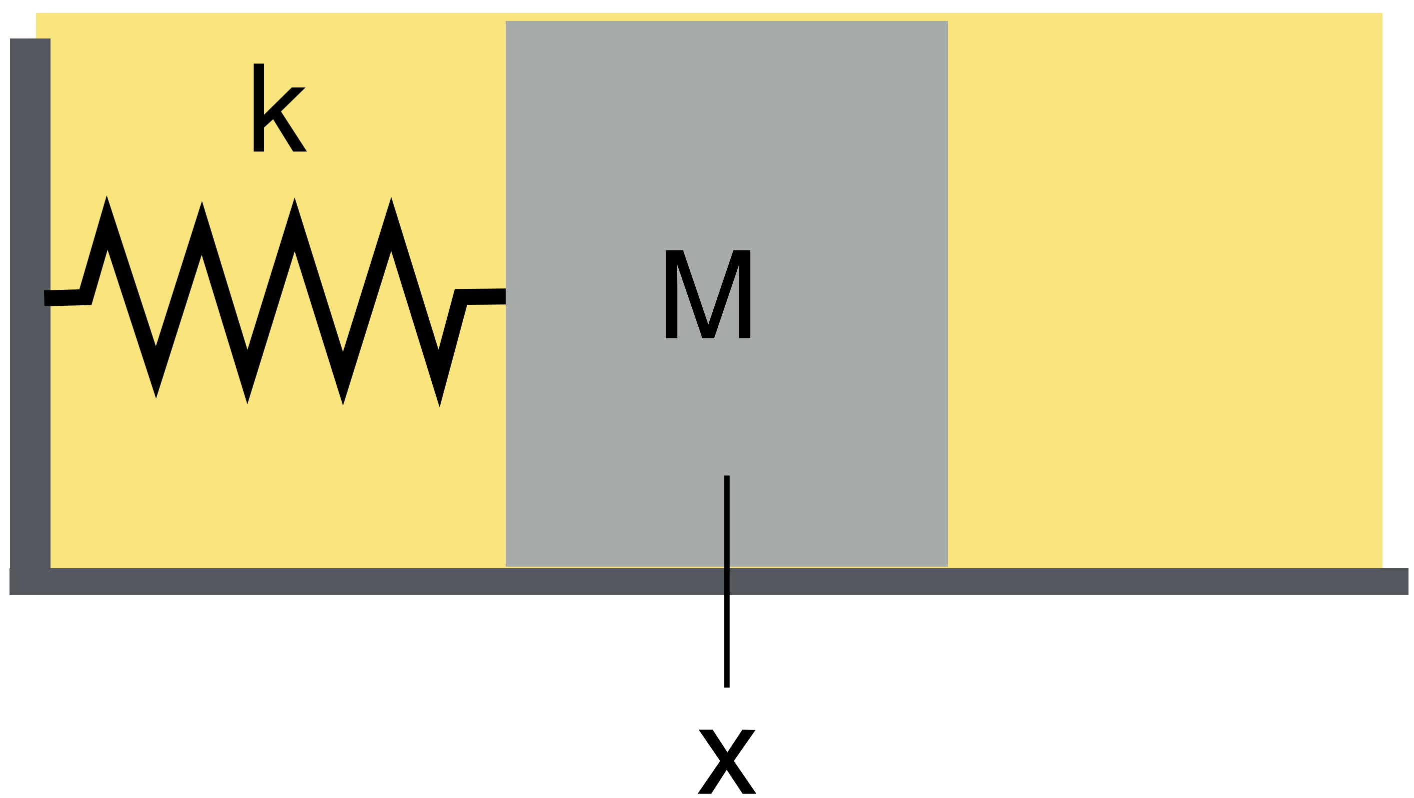
em um fluido (com atrito viscoso)



https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Exemplos: Massa-Mola

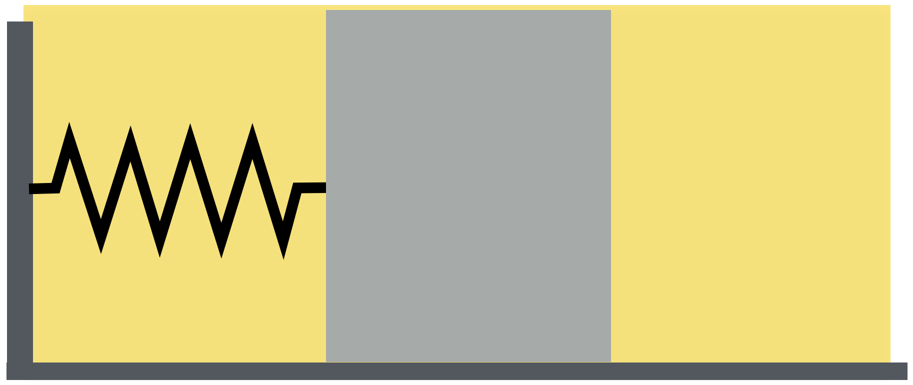
Descrever a posição com respeito ao equilíbrio



https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Exemplos: Massa-Mola

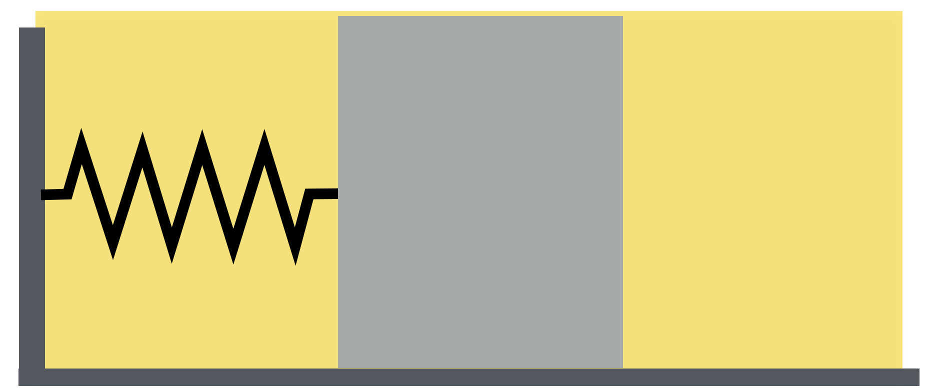
Aplicando a Lei de Newton



$$Mx'' = F$$

Exemplos: Massa-Mola

Aplicando a Lei de Newton



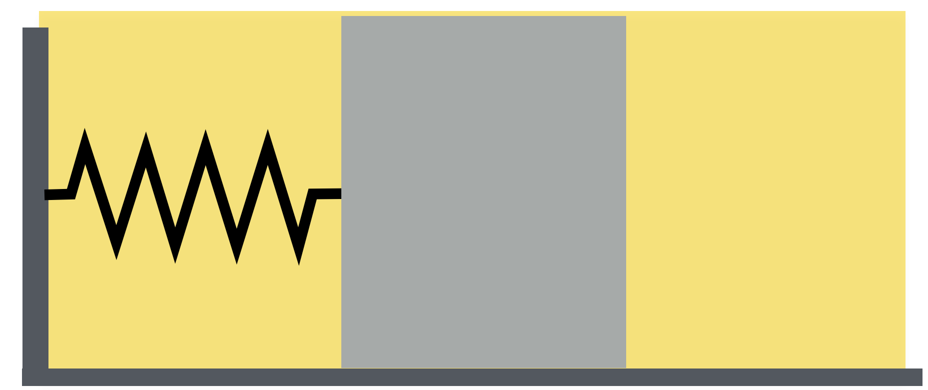
$$Mx'' = F$$

$$\downarrow$$

$$F_{\text{rest}} + F_{\text{vis}}$$

Exemplos: Massa-Mola

Aplicando a Lei de Newton



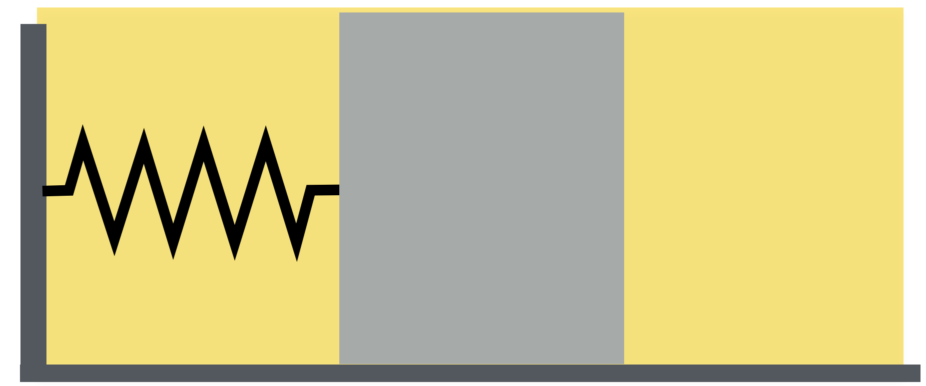
$$Mx'' = F$$

$$F_{\text{rest}} + F_{\text{vis}}$$

$$-Kx \qquad\qquad -bx'$$

Exemplos: Massa-Mola

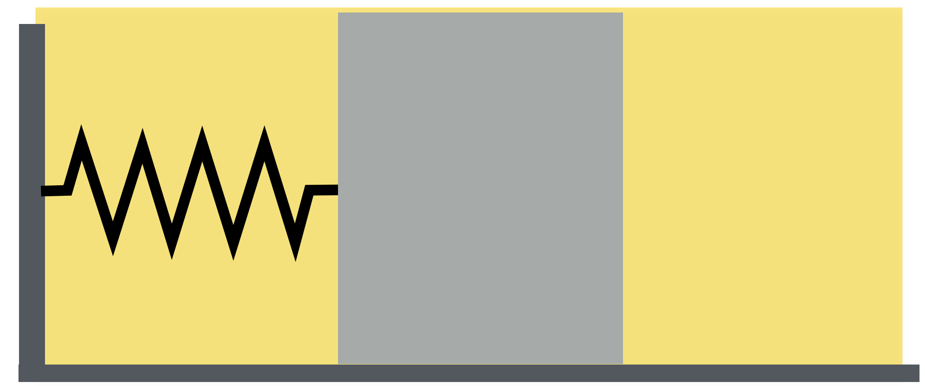
Portanto



$$Mx'' + bx' + Kx = 0$$

Exemplos: Massa-Mola

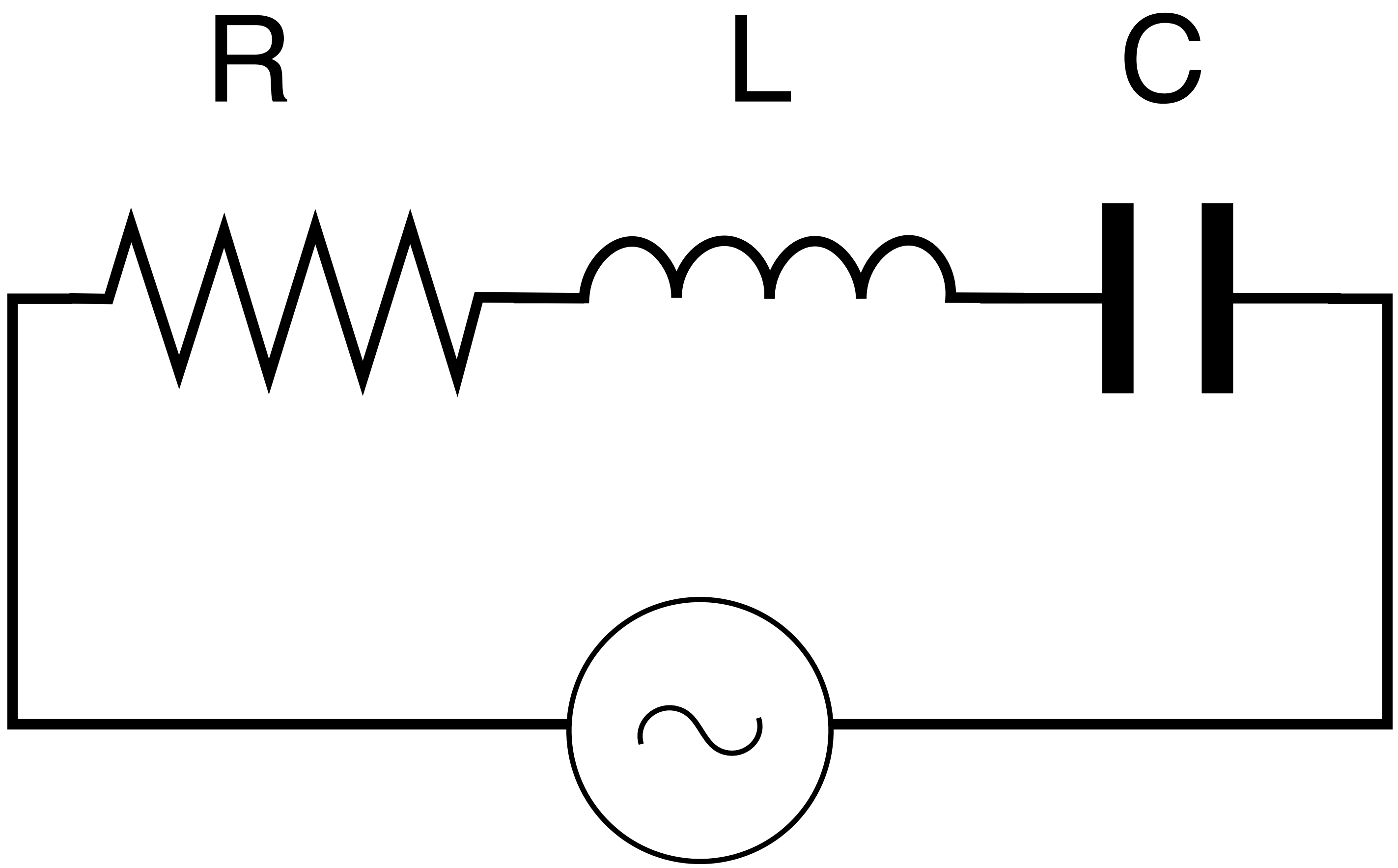
Na forma dada: Dividindo por M



$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = 0$$

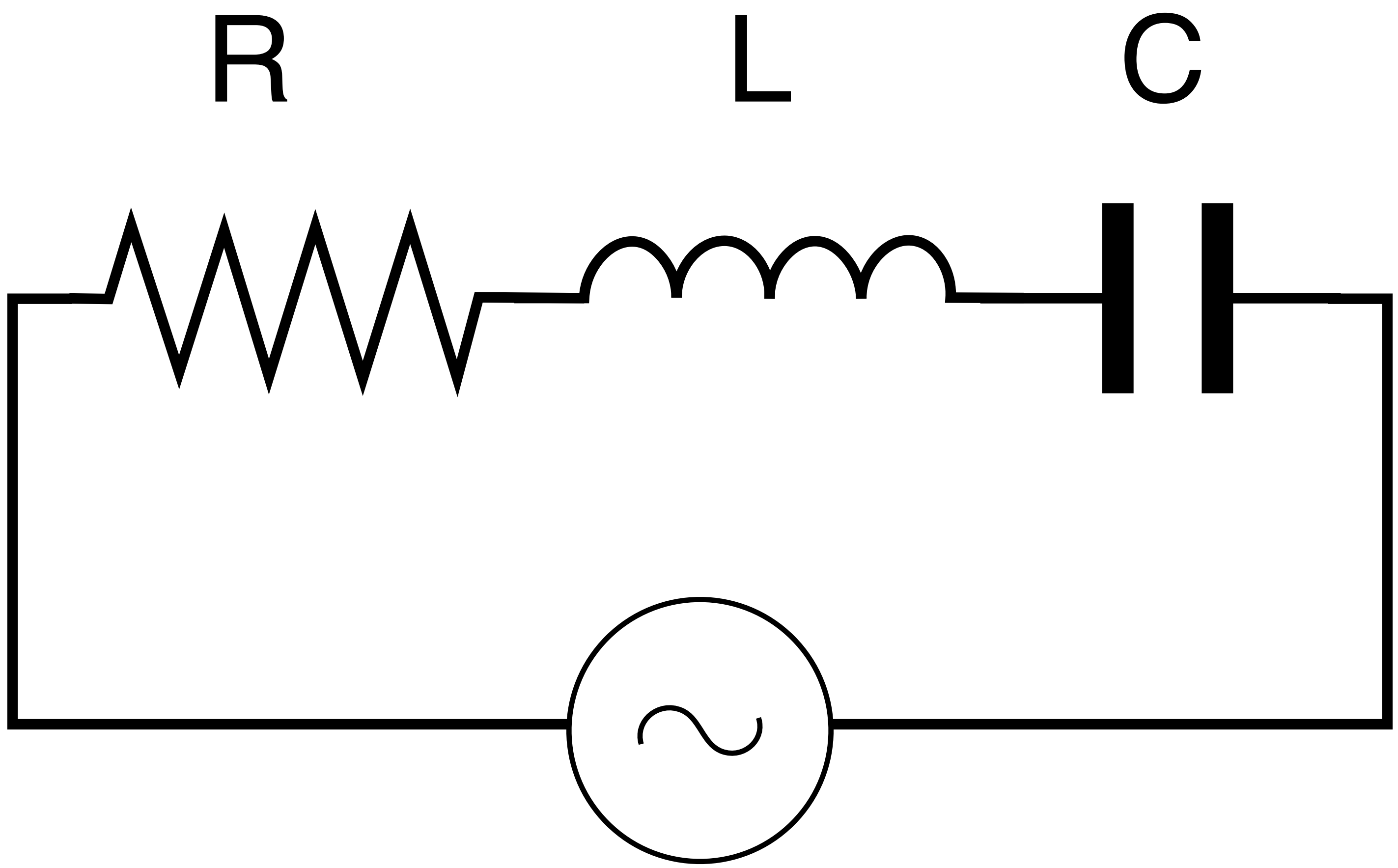
$$\gamma = \frac{b}{M} \qquad \omega_0^2 = \frac{K}{M}$$

Exemplos: Circuito RLC



https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Exemplos: Circuito RLC

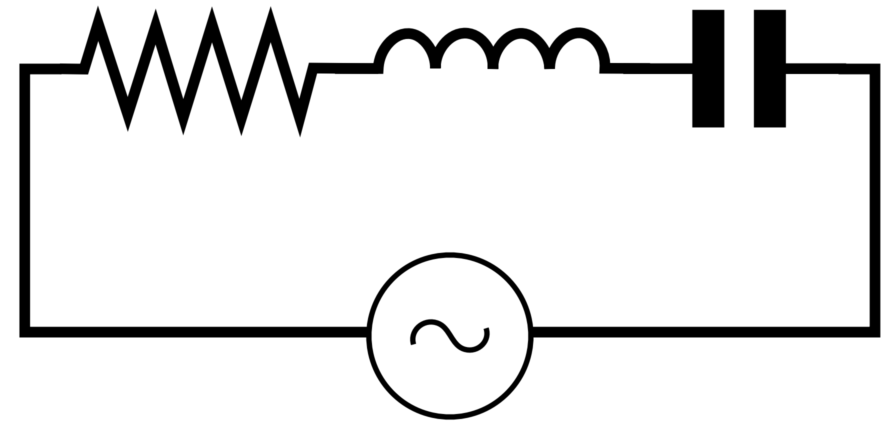


Pela Lei de Kirchhof

$$V_R + V_L + V_c = V_f(t)$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Exemplos: Circuito RLC



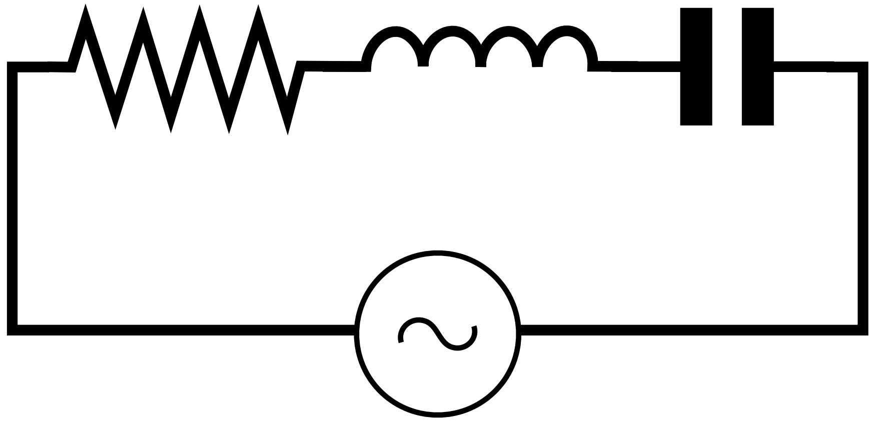
$$V_R + V_L + V_c = V_f(t)$$

$$V_R = Ri \qquad V_L = Li' \qquad V_c = \frac{q}{c}$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Exemplos: Circuito RLC

Derivando



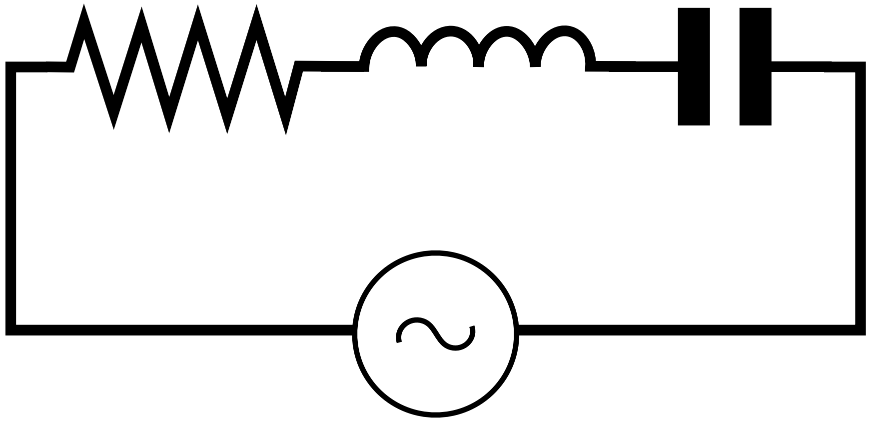
$$V_R + V_L + V_c = V_f(t)$$

$$Ri' + Li'' + \frac{i}{c} = V_f'(t)$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Exemplos: Circuito RLC

Na forma geral



$$i'' + \gamma i' + \omega_0^2 i = f(t)$$

$$\gamma = \frac{R}{L} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Solução geral da homogênea

Considere a EDO escalar de 2º ordem

$$x'' + ax' + bx = 0$$

Então a solução geral tem a forma

$$x_g(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

onde x_1 e x_2 são soluções LI

Solução geral da homogênea

x_1 e x_2 são soluções LI

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) = 0$$

implica

$$\alpha = \beta = 0$$

Funções linearmente independentes

As funções

$$x_1(t) = e^{rt} \quad \text{e} \quad x_2(t) = e^{st}$$

com $r \neq s$ são LI

Funções linearmente independentes

As funções

$$x_1(t) = e^{rt} \quad \text{e} \quad x_2(t) = e^{st}$$

com $r \neq s$ são LI

Prova

$$\alpha e^{rt} + \beta e^{st} = 0$$

Funções linearmente independentes

As funções

$$x_1(t) = e^{rt} \quad \text{e} \quad x_2(t) = e^{st}$$

com $r \neq s$ são LI

Prova

$$\alpha e^{rt} + \beta e^{st} = 0$$

$$\alpha r e^{rt} + \beta s e^{st} = 0 \qquad \text{(derivando)}$$

Funções linearmente independentes

$$\alpha e^{rt} + \beta e^{st} = 0$$
$$\alpha r e^{rt} + \beta s e^{st} = 0$$

Em forma matricial

$$\boxed{\begin{pmatrix} e^{rt} & e^{st} \\ r e^{rt} & s e^{st} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinante não nulo

Funções linearmente independentes

$$\begin{vmatrix} e^{rt} & e^{st} \\ re^{rt} & se^{st} \end{vmatrix} = (r-s)e^{(r+s)t}$$

Portanto

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Equação característica

Chutamos solução

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

E substituímos na EDO

$$x'' + ax' + bx = 0$$

obtendo

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + be^{\lambda t} = 0$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Equação característica

Obtemos uma uma equação

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Se as raízes são distintas $\lambda_1 \neq \lambda_2$

A solução geral é a forma

$$x_g(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Exemplo 1

Encontre a solução geral da EDO

$$x'' + 5x' + 6x = 0$$

A característica é

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

raízes são

$$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = -3$$

Exemplo 1

Encontre a solução geral da EDO

$$x'' + 5x' + 6x = 0$$

Solução geral

$$x_g(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

Exemplo 2

Encontre a solução geral da EDO

$$x'' + x' = 0$$

A característica é

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$

raízes são

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -1$$

Exemplo 2

Encontre a solução geral da EDO

$$x'' + x' = 0$$

Solução geral

$$x_g(t) = c_1 + c_2 e^{-t}$$