são úteis nos sistemas mecânicos; eles podem ser usados para amortecer qualquer perturbação indesejada. □

EXERCÍCIOS 3.3. 1) Determine a solução geral de:

a) $\ddot{y} - \dot{y} - 2\,y = 0.$ b) $\ddot{y} - 7\,\dot{y} = 0.$ c) $\ddot{y} + 4\,y = 0.$

d) $\ddot{y} - 4\,\dot{y} + 13\,y = 0.$ e) $\ddot{y} - 4\,\dot{y} + 4\,y = 0.$ f) $\ddot{y} = 0.$

2) a) Seja $\lambda_1 = \alpha + i\,\beta$ uma raiz complexa de $\lambda^2 + (a-1)\,\lambda + b = 0$. Mostre que

$$t^{\alpha+i\beta} = t^{\alpha}\,t^{i\,\beta} = t^{\alpha}e^{(\ln t)\,i\,\beta} = t^{\alpha}\,[\cos(\beta\,\ln t) + i\,\mathrm{sen}(\beta\,\ln t)]$$

é uma solução com valores complexos da **equação de Euler**

$$t^2\,\ddot{y} + a\,t\,\dot{y} + b\,y = 0. \tag{3.16}$$

b) Mostre que $t^{\alpha}\,\cos(\beta\,\ln t)$ e $t^{\alpha}\,\mathrm{sen}(\beta\,\ln t)$ são soluções reais de (3.16).

3) Determine a solução geral de:

a) $t^2\,\ddot{y} + t\,\dot{y} + y = 0, \quad t > 0.$ b) $t^2\,\ddot{y} + 2\,t\,\dot{y} + 2\,y = 0, \quad t > 0.$

3.4 A Equação Não Homogênea

Consideremos a equação não homogênea

$$\ddot{y} + a(t)\,\dot{y} + b(t)\,y = g(t), \qquad \text{[L.N.H.]}$$

em que $a(t)$, $b(t)$ e $g(t)$ são funções contínuas em um intervalo I e $g(t) \neq 0$.

Nos fenômenos físicos descritos por equação da forma acima, o termo $g(t)$ representa, em geral, um “agente externo” atuando sobre o sistema. Por exemplo, o sistema massa-mola, sujeito apenas à ação da gravidade, é descrito pela equação: $\ddot{y} + \dfrac{k}{m}\, y = 0$. Agora, se impusermos ao sistema acima uma força externa periódica de intensidade $A\cos\omega t$, a equação fica $\ddot{y} + \dfrac{k}{m}\, y = \dfrac{A}{m}\, \cos\omega\, t$.

Um fato que foi observado para a equação linear de 1ª ordem não homogênea $\dot{y} + \alpha(t)\, y = \beta(t)$ (ver Observação 2.4) é que sua solução geral é constítuida de duas parcelas:

i) a solução geral da homogênea $\dot{y} + \alpha(t)\, y = 0$;

ii) uma solução particular da equação não homogênea $\dot{y}+\alpha(t)\, y = \beta(t)$.

Mostraremos que este fato também é verdadeiro para as equações lineares de 2ª ordem (na verdade, é válida em geral).

Teorema 3.6. *Sejam* $y_1(t)$ *e* $y_2(t)$ *soluções linearmente independentes da equação homogênea*

$$\ddot{y} + a(t)\, \dot{y} + b(t)\, y = 0, \qquad \text{[L.H.]}$$

e seja $\varphi(t)$ *uma solução particular da equação não homogênea* [L.N.H.]. *Então toda solução* $y(t)$ *de* [L.N.H.] *é da forma*

$$y(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t) + \varphi(t), \qquad (3.17)$$

para alguma escolha conveniente das constantes c_1 *e* c_2.

Demonstração. É fácil mostrar que se φ_1 e φ_2 são soluções de [L.N.H.], então a função $\psi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ é solução de [L.H.] (Exercício).

Seja agora $y(t)$ uma solução qualquer de [L.N.H.]. Pela parte anterior a função $w(t) = y(t) - \varphi(t)$ é solução de [L.H.]. Porém, toda solução de [L.H.] é combinação linear de $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Então

$$y(t) - \varphi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Logo, $y(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t) + \varphi(t)$. ∎

Observação 3.12. A grande utilidade do Teorema 3.6 é que ele reduz o problema de encontrar todas as soluções de [L.N.H.] ao problema mais simples de encontrar duas soluções linearmente independentes de [L.H.] e uma solução de [L.N.H.]. □

Observação 3.13. A expressão (3.17) é chamada **solução geral** de [L.N.H.]. □

Exemplo 3.8. Determine a solução geral de $\ddot{y} + y = t$.

Solução: Vamos determinar a solução geral da homogênea associada: $\ddot{y} + y = 0$. A equação característica $\lambda^2 + 1 = 0$ possui raízes complexas $\lambda = \pm i$. Logo $\psi(t) = e^{i\,t} = \cos t + i\,\operatorname{sen} t$ é uma solução a valores complexos. Então $y_1(t) = \cos t$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} t$ são duas soluções reais linearmente independentes de $\ddot{y} + y = 0$. Além disso, $\varphi(t) = t$ é obviamente uma solução particular de $\ddot{y} + y = t$. Logo, pelo Teorema 3.6, toda solução desta equação é da forma

$$y(t) = c_1\,\cos t + c_2\,\operatorname{sen} t + t. \ \square$$

Exemplo 3.9. Três soluções de uma equação linear não homogênea de 2ª ordem são: $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = t + e^t$ e $\varphi_3(t) = 1 + t + e^t$. Determine a solução geral desta equação.

Solução: As funções $\varphi_2(t) - \varphi_1(t) = e^t$ e $\varphi_3(t) - \varphi_2(t) = 1$ são soluções da homogênea associada e, além disso, as funções e^t e 1 são linearmente independentes. Logo, a solução geral de tal equação é:

$$y(t) = c_1 + c_2\,e^t + t. \ \square$$

Exercícios: Sabendo que φ_1, φ_2 e φ_3 são soluções de uma equação linear não homogênea de 2ª ordem, determinar a solução geral desta equação, sendo:

a) $\varphi_1(t) = t^2$, $\varphi_2(t) = t^2 + e^{2\,t}$ e $\varphi_3(t) = 1 + t^2 + 2\,e^{2\,t}$.

b) $\varphi_1(t) = 1 + e^t$, $\varphi_2(t) = 1 + t + e^{t^2}$ e $\varphi_3(t) = (t+1)\,e^{t^2} + 1$.

Para resolvermos uma equação linear não homogênea precisamos saber encontrar uma solução particular. Veremos agora dois métodos para determinar tal solução.

3.4.1 Método dos Coeficientes a Determinar

Vamos estudar a equação

$$a\,\ddot{y} + b\,\dot{y} + c\,y = g(t), \tag{3.18}$$

em que a, b e c são constantes reais e $g(t)$ é uma função exponencial, ou um polinômio, ou $\operatorname{sen} t$ ou $\cos t$. Para estes tipos de funções g, determinaremos facilmente uma solução particular. O método também se aplica a produtos de tais funções, ou seja

$$g(t) = e^{\alpha t}\,(a_0 + a_1\,t + \cdots + a_n\,t^n)\,(b_1\,\operatorname{sen}\beta\,t + b_2\,\cos\beta\,t).$$

Antes de discutir um procedimento geral, vamos considerar alguns exemplos:

Exemplo 3.10. Encontre uma solução particular da equação $\ddot{y} - 3\,\dot{y} - 4\,y = 2\,\operatorname{sen} t$.

Solução: Queremos uma função $y_p(t)$ tal que a soma de sua 2ª derivada menos 3 vezes a sua 1ª derivada menos 4 vezes a própria função seja igual a $2\operatorname{sen} t$. Há pouca chance de sucesso se tentarmos funções como $\ln t$, e^t ou t^2, pois não importa como combinamos estas funções é impossível obter $2\,\operatorname{sen} t$. Parece óbvio que devemos considerar para y_p funções como $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$. Vamos então tentar $y_p(t) = A\,\cos t + B\,\operatorname{sen} t$, em que A e B são constantes a serem determinadas. Logo,

$$\dot{y}_p(t) = -A\,\operatorname{sen} t + B\,\cos t \Longrightarrow \ddot{y}_p(t) = -A\,\cos t - B\,\operatorname{sen} t$$

e, substituindo na equação, obtemos

$$(-5\,A - 3\,B)\,\cos t + (3\,A - 5\,B)\,\operatorname{sen} t = 2\,\operatorname{sen} t.$$

Esta equação estará identicamente satisfeita se e somente se

$$\begin{cases} -5\,A - 3\,B &= 0 \\ 3\,A - 5\,B &= 2 \end{cases} \Longrightarrow A = \frac{3}{17} \quad \text{e} \quad B = -\frac{5}{17}.$$

Logo, uma solução particular da equação é:

$$y_p(t) = \frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\,\mathrm{sen}\, t. \;\square$$

Exemplo 3.11. Idem para $\ddot{y} - 3\,\dot{y} - 4\,y = 4\,t^2$.

Solução: É natural tentar $y_p(t) = A\,t^2$, em que A é uma constante a ser determinada. Então, $\dot{y}_p(t) = 2\,A\,t$. Logo, $\ddot{y}_p(t) = 2\,A$. Substituindo na equação, obtemos

$$2\,A - 6\,A\,t - 4\,A\,t^2 = 4\,t^2 \Longrightarrow A = 0 \quad \text{e} \quad A = -1.$$

Portanto, é impossível achar uma solução da forma $A\,t^2$. Entretanto, pensando no termo $4\,t^2$ como $4\,t^2 + 0\,t + 0$, agora parece razoável tentar $y_p(t) = A\,t^2 + B\,t + C$, em que A, B e C devem ser determinadas. Então

$$\dot{y}_p(t) = 2\,A\,t + B \quad \text{e} \quad \ddot{y}_p(t) = 2\,A.$$

Portanto, $-4\,A\,t^2 + (-6\,A - 4\,B)\,t + (2\,A - 3\,B - 4C) = 4\,t^2$. Ou seja, $A = -1$, $B = 3/2$ e $C = -13/8$. Logo,

$$y_p(t) = -t^2 + \frac{3}{2}\,t - \frac{13}{8}. \;\square$$

Exemplo 3.12. Idem para $\ddot{y} - 3\,\dot{y} - 4\,y = e^{5\,t}$.

Solução: Vamos tentar $y_p(t) = A\,e^{5\,t}$. Portanto, $\dot{y}_p(t) = 5\,A\,e^{5\,t}$ e $\ddot{y}_p(t) = 25\,A\,e^{5\,t}$. Substituindo na equação, temos que $6\,A\,e^{5\,t} = e^{5\,t}$. Ou seja $A = \dfrac{1}{6}$. Portanto,

$$y_p(t) = \frac{1}{6}\,e^{5\,t}. \;\square$$

Exemplo 3.13. Idem para $\ddot{y} - 3\,\dot{y} - 4\,y = e^{-t}$.

Solução: Seria natural tentar $y_p(t) = A\,e^{-t}$. Portanto, $\dot{y}_p(t) = -A\,e^{-t}$ e $\ddot{y}_p(t) = A\,e^{-t}$. Substituindo na equação, temos $0 \cdot A\,e^{-t} = e^{-t}$ o que implica que é impossível determinar A tal que $A\,e^{-t}$ seja solução desta equação. A dificuldade neste caso é que e^{-t} é uma solução da equação homogênea associada e, portanto, $A\,e^{-t}$ também é solução da equação homogênea. Abaixo veremos como resolver esta equação, cuja $y_p(t) = -\dfrac{t\,e^{-t}}{5}$. □

Passemos ao estudo do caso geral em que g possui uma das formas:

a) $P_n(t) = a_n\,t^n + a_{n-1}\,t^{n-1} + \cdots + a_1\,t + a_0$,

b) $e^{\alpha t}\,P_n(t)$,

c) $e^{\alpha t}\,P_n(t)$ sen $\beta\,t$ ou $e^{\alpha t}\,P_n(t)\,\cos\beta\,t$,

d) combinações lineares das anteriores.

1º caso: Se $g(t) = P_n(t)$, $a_n \neq 0$, então a equação (3.18) torna-se

$$a\,\ddot{y} + b\,\dot{y} + c\,y = a_n\,t^n + a_{n-1}\,t^{n-1} + \cdots + a_1\,t + a_0. \tag{3.19}$$

Devemos procurar $y_p(t)$ de tal forma que a combinação $a\,\ddot{y}_p + b\,\dot{y}_p + c\,y_p$ seja um polinômio de grau n. O candidato natural é:

$$y_p(t) = A_n\,t^n + A_{n-1}\,t^{n-1} + \cdots + A_1\,t + A_0$$

com os coeficientes A_0, A_1, ..., A_n a serem determinados. Substituindo na equação (3.19), temos:

$$\begin{aligned} a\,[n\,(n-1)\,A_n\,t^{n-2} + (n-1)(n-2)\,A_{n-1}\,t^{n-3} + \cdots + 6\,A_3\,t + 2\,A_2\,] \\ + b\,[n\,A_n\,t^{n-1} + (n-1)\,A_{n-1}\,t^{n-2} + \cdots + 2\,A_2\,t + A_1] \\ + c\,[A_n\,t^n + A_{n-1}\,t^{n-1} + \cdots + A_1\,t + A_0\,] \\ = a_n\,t^n + a_{n-1}\,t^{n-1} + \cdots + a_1\,t + a_0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Igualando os coeficientes, obtemos

$$\left\{\begin{aligned} c\,A_n &= a_n \\ c\,A_{n-1} + n\,b\,A_n &= a_{n-1} \\ c\,A_{n-2} + (n-1)\,b\,A_{n-1} + n\,(n-1)\,a\,A_n &= a_{n-2} \\ &\vdots \\ c\,A_0 + b\,A_1 + 2\,a\,A_2 &= a_0. \end{aligned}\right. \tag{3.21}$$

Se $c \neq 0$, determinamos, pela primeira equação de (3.21), que $A_n = \dfrac{a_n}{c}$. Em seguida, substituimos A_n na segunda equação, obtemos $A_{n-1} = \dfrac{a_{n-1} - (n\,b\,a_n)/c}{c}$ e assim sucessivamente.

Se $c = 0$ e $b \neq 0$, então $a\,\ddot{y}_p + b\,\dot{y}_p$ é um polinômio de grau $n-1$, enquanto que $P_n(t)$ é um polinômio de grau n. Assim, é impossível resolver (3.21). Para garantir que $a\,\ddot{y}_p + b\,\dot{y}_p$ seja um polinômio de grau n, devemos escolher y_p como sendo um polinômio de grau $n+1$. Portanto, assumimos

$$y_p(t) = t\,(A_n\,t^n + \cdots + A_1\,t + A_0)$$

(omitimos o termo constante pois $y =$ constante é uma solução da equação homogênea $a\,\ddot{y} + b\,\dot{y} = 0$) e procedemos como anteriormente.

Se $b = c = 0$, então tomamos $y_p(t) = t^2\,(A_n\,t^n + \cdots + A_1\,t + A_0)$.

2º caso: Consideremos a equação diferencial:

$$a\,\ddot{y} + b\,\dot{y} + c\,y = e^{\alpha\,t}\,P_n(t). \tag{3.22}$$

Se removermos o fator $e^{\alpha t}$ do segundo membro de (3.22), esta equação torna-se igual à equação (3.19). Para conseguirmos isto pomos $y = e^{\alpha\,t}\,v$. Então $\dot{y} = e^{\alpha\,t}\,(\dot{v} + \alpha\,v)$ e $\ddot{y} = e^{\alpha t}\,(\ddot{v} + 2\,\alpha\,\dot{v} + \alpha^2\,v)$. Substituindo na equação (3.22) e cancelando o fator comum $e^{\alpha\,t}$, obtemos

$$a\,\ddot{v} + (2\,a\,\alpha + b)\dot{v} + (a\,\alpha^2 + b\,\alpha + c)\,v = P_n(t). \tag{3.23}$$

Conseqüentemente, $y(t) = e^{\alpha t} v(t)$ é solução de (3.22) se e somente se $v(t)$ é solução de (3.23), que é um problema já resolvido.

Para encontrar uma solução particular $v(t)$ de (3.23), devemos distinguir os seguintes casos:

(i) $a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$,

(ii) $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, mas $2a\alpha + b \neq 0$,

(iii) $a\alpha^2 + b\alpha + c = 2a\alpha + b = 0$.

O caso (i) significa que α **não é raiz** da equação característica

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \tag{3.24}$$

ou seja, $e^{\alpha t}$ não é solução da equação homogênea $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$. Neste caso, temos que $y_p(t) = Q_n(t)\, e^{\alpha t}$, em que $Q_n(t) = A_n t^n + \cdots + A_1 t + A_0$.

A condição (ii) significa que α é raiz simples da equação característica (3.24), ou seja $e^{\alpha t}$ é solução da equação homogênea, mas $t\, e^{\alpha t}$ não é. Neste caso, $y_p(t) = t\, Q_n(t)\, e^{\alpha t}$.

Finalmente, a condição (iii) significa que tanto $e^{\alpha t}$ como $t\, e^{\alpha t}$ são soluções da equação homogênea e, portanto, $y_p(t) = t^2\, Q_n(t)\, e^{\alpha t}$.

Exemplo 3.14. Encontre uma solução particular da equação $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = (4 - 6t)\, e^{-t}$.

Solução: A equação característica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ possui duas raízes distintas $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Portanto, $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{2t}$ formam uma base de espaço solução da equação homogênea. Logo, e^{-t} não é solução da homogênea. Portanto, fazemos $y_p(t) = (A + Bt)\, e^{-t}$ e temos que

$$\dot{y}_p(t) = (A + B - Bt)\, e^{-t} \quad \text{e} \quad \ddot{y}_p(t) = (A - 2B + Bt)e^{-t}.$$

Substituindo na equação e cancelando o fator e^{-t}, obtemos

$$6\,A - 5\,B + 3\,B\,t = 4 - 6\,t \Longrightarrow \begin{cases} 6\,A - 5\,B & = 4 \\ 3\,B & = -6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -2. \end{cases}$$

Logo, $y_p(t) = -(1 + 2\,t)\,e^{-t}$ é uma solução. □

Exemplo 3.15. Idem para $\ddot{y} - 3\,\dot{y} + 2\,y = (1 + t)\,e^t$.

Solução: Como vimos, no Exemplo 3.14, e^t é solução da equação homogênea associada. Assim, devemos tentar $y_p(t) = t\,(A + B\,t)\,e^t$. Isso implica que

$$\dot{y}_p(t) = [A + (A + 2\,B)\,t + B\,t^2]\,e^t \text{ e } \ddot{y}_p(t) = [2A + 2\,B + (A + 4\,B)\,t + B\,t^2]\,e^t.$$

Substituindo na equação e cancelando o fator e^t, obtemos

$$-A + 2\,B - 2\,B\,t = 1 + t \Longrightarrow \begin{cases} -A + 2\,B = 1 \\ -2\,B = 1 \end{cases} \Longrightarrow A = -2 \text{ e } B = -\frac{1}{2}.$$

Logo, $y_p(t) = (-2\,t - t^2/2)\,e^t$. □

Exemplo 3.16. Encontrar uma solução particular para a equação $\ddot{y} - 6\,\dot{y} + 9\,y = (6 + 12\,t + 12\,t^2 + 40\,t^3 + 42\,t^5)\,e^{3\,t}$.

Solução: A equação característica $\lambda^2 - 6\,\lambda + 9 = 0$ possui raízes iguais $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Portanto, $y_1(t) = e^{3\,t}$ e $y_2(t) = t\,e^{3\,t}$ são soluções da equação homogênea associada. Logo, a solução particular da não homogênea é da forma

$$y_p(t) = t^2\,(A_0 + A_1\,t + A_2\,t^2 + A_3\,t^3 + A_4\,t^4 + A_5\,t^5)\,e^{3\,t}.$$

Como se pode notar é bem trabalhoso esta expressão na equação dada para obter os coeficientes. É muito mais prático fazer $y(t) = e^{3\,t}\,v$. Isso implica que $\dot{y} = (\dot{v} + 3\,v)\,e^{3\,t}$ e $\ddot{y} = (\ddot{v} + 6\,\dot{v} + 9\,v)\,e^{3\,t}$. Substituindo na equação e cancelando o fator $e^{3\,t}$, obtemos

$$\ddot{v} = 6 + 12\,t + 12\,t^2 + 40\,t^3 + 42\,t^5\,.$$

Integrando duas vezes, vem

$$v(t) = 3\,t^2 + 2\,t^3 + t^4 + 2\,t^5 + t^7.$$

Logo, uma solução particular é

$$y_p = (3\,t^2 + 2\,t^3 + t^4 + 2\,t^5 + t^7)\,e^{3\,t}. \;\square$$

3º caso: Consideremos agora a equação diferencial

$$a\,\ddot{y} + b\,\dot{y} + c\,y = e^{\alpha\,t}\,P_n(t)\ \mathrm{sen}\,\beta t \qquad (\text{ou } \cos\beta\,t). \tag{3.25}$$

Este problema pode ser reduzido ao anterior se notarmos que:

(i) $e^{i\,\beta\,t} = \cos\beta\,t + i\ \mathrm{sen}\,\beta\,t$ e

(ii) se $y(t) = u(t) + i\,v(t)$ é uma solução com valores complexos da equação

$$a\,\ddot{y} + b\,\dot{y} + c\,y = g_1(t) + i\,g_2(t),$$

em que a, b e c são constantes reais, então

$$\begin{cases} a\,\ddot{u} + b\,\dot{u} + c\,u = g_1(t) \\ a\,\ddot{v} + b\,\dot{v} + c\,v = g_2(t). \end{cases}$$

Exercício: Prove (ii).

Seja $\varphi(t) = u(t) + i\,v(t)$ uma solução particular da equação

$$a\,\ddot{y} + b\,\dot{y} + c\,y = e^{\alpha\,t}(a_0 + \cdots + a_n\,t^n)\,e^{i\beta\,t}. \tag{3.26}$$

A parte real do segundo membro de (3.26) é $e^{\alpha\,t}\,(a_0 + \cdots + a_n\,t^n)\,\cos\beta\,t$ e a parte imaginária é $e^{\alpha\,t}\,(a_0 + \cdots + a_n\,t^n)\,\mathrm{sen}\,\beta\,t$; segue-se de (ii) que

$$u(t) = \Re[\varphi(t)]$$

é uma solução de

$$a\,\ddot{y} + b\,\dot{y} + c\,y = e^{\alpha\,t}\,(a_0 + \cdots + a_n\,t^n)\,\cos\beta\,t$$

e

$$v(t) = \Im[\varphi(t)]$$

é uma solução de

$$a\,\ddot{y} + b\,\dot{y} + c\,y = e^{\alpha\,t}\,(a_0 + \cdots + a_n\,t^n)\ \text{sen}\,\beta\,t.$$

Exemplo 3.17. Encontre uma solução particular da equação $\ddot{y} - 3\,\dot{y} + 2\,y = 20\ \text{sen}\,2\,t$.

Solução: Vamos determinar $y_p(t)$ como a parte imaginária de uma solução com valores complexos $\varphi(t)$ da equação $\ddot{y} - 3\,\dot{y} + 2\,y = 20\,e^{2\,i\,t}$. Como e^{2it} não é solução da homogênea associada, devemos tentar solução da forma $\varphi(t) = Ae^{2\,i\,t}$. Isso implica que

$$\dot{\varphi}(t) = 2\,i\,Ae^{2\,i\,t} \quad \text{e} \quad \ddot{\varphi}(t) = -4\,A\,e^{2\,i\,t}.$$

Substituindo na equação diferencial, obtemos $(-2 - 6\,i)\,A = 20$ ou $A = -1 + 3\,i$. Logo,

$$\varphi(t) = (-1 + 3\,i)\,e^{2\,i\,t} = (-1 + 3\,i)\,(\cos 2\,t + i\ \text{sen}\,2\,t).$$

Logo,

$$y_p(t) = \Im[\varphi(t)] = 3\ \cos\,2\,t - \text{sen}\,2\,t.\ \square$$

4º caso: Finalmente seja $g(t)$ uma combinação linear de funções dos tipos descritos nos casos 1, 2 e 3.

Este caso pode ser resolvido usando o chamado Princípio da Superposição de Soluções, que diz: se φ_1 é solução da equação

$$a\,\ddot{y} + b\,\dot{y} + c\,y = g_1(t)$$

e φ_2 é solução da equação

$$a\,\ddot{y} + b\,\dot{y} + c\,y = g_2(t)$$

e α_1, α_2 são constantes, então a função $\varphi(t) = \alpha_1\,\varphi_1(t) + \alpha_2\,\varphi_2(t)$ é solução da equação

$$a\,\ddot{y} + b\,\dot{y} + c\,y = \alpha_1\,g_1(t) + \alpha_2\,g_2(t).$$

Exercício: Prove esta afirmação.

Exemplo 3.18. Determine uma solução particular da equação:

$$\ddot{y} - 3\,\dot{y} + 2\,y = (4 - 6\,t)\,e^{-t} + 20\,\text{sen}\,2\,t.$$

Solução: Para encontrar uma solução particular desta equação devemos procurar soluções particulares $y_{p_1}(t)$ e $y_{p_2}(t)$ das equações

$$\ddot{y} - 3\,\dot{y} + 2\,y = (1 + t)\,e^{3\,t} \quad \text{e} \quad \ddot{y} - 3\,\dot{y} + 2\,y = 20\,\text{sen}\,2\,t,$$

respectivamente, e então somarmos essas duas soluções. Temos, do Exemplo 3.14 que $y_{p_1}(t) = (-1/4 + t/2)\,e^{3\,t}$ e do Exemplo 3.17 que $y_{p_2}(t) = 3\,\cos\,2\,t - \text{sen}\,2\,t$. Logo,

$$y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t) = -(1 + 2\,t)\,e^{-t} + 3\,\cos\,2\,t - \text{sen}\,2\,t\,. \;\square$$

Exercícios 3.4. 1) Determine uma solução particular de cada uma das seguintes equações:

a) $\ddot{y} + 4\,\dot{y} = \text{sen}\,t$.

b) $\ddot{y} + 4\,y = \cos 2\,t$.

c) $\ddot{y} - y = t^2\,e^t$.

d) $\ddot{y} + 2\,\dot{y} + y = e^{-t}$.

e) $\ddot{y} - 2\,\dot{y} + 5\,y = 2\,\cos^2 t$.

f) $\ddot{y} + 4\,y = t\,\text{sen}\,2\,t$.

g) $\ddot{y} + y = \cos t \cos 2\,t$.

h) $\ddot{y} - 3\,\dot{y} + 2\,y = e^t + e^{2\,t}$.

i) $\ddot{y} + \dot{y} - 6\,y = \text{sen}\,t + te^{2\,t}$.

j) $\ddot{y} + 2\,\dot{y} = 1 + t^2 + e^{-2\,t}$.

2) a) Seja $L(y) = \ddot{y} - 2\,\lambda_1\dot{y} + \lambda_1^2\,y$. Mostre que $L[e^{\lambda_1 t}\,v(t)] = e^{\lambda_1 t}\,\ddot{v}(t)$.

b) Determine a solução geral da equação $\ddot{y} - 6\,\dot{y} + 9\,y = t^{3/2}\,e^{3\,t}$.