

### Existência e Unicidade de Soluções

8. Considere o problema de valor inicial no qual se procura a solução da equação

$$\dot{y} = -\frac{1}{y}$$

que satisfaça a condição inicial  $y(0) = 0$ . Mostre que este problema não possui nenhuma solução real para  $t > 0$ . Qual das hipóteses do teorema de Picard é violada? A solução geral seria

$$y(t) = \sqrt{2(t_0 + y_0^2/2 - t)}$$

mas para  $y_0 = t_0 = 0$  temos a raiz de um número negativo e portanto não existe solução. Note que a função  $1/y$  não é diferenciável em  $y = 0$  isso viola a hipótese.

9. Considere o problema de valor inicial no qual se procura a solução da equação

$$\dot{y} = 3y^{2/3}$$

que satisfaça a condição  $y(0) = 0$ . Mostre que este problema não tem solução única. Qual das hipóteses do teorema de Picard é violada?

De fato, note que

$$y_1(t) = 0 \quad \text{e} \quad y(t) = t^3$$

ambas resolvem a EDO. A função  $y^{2/3}$  não é diferenciável em  $y = 0$

10. Considere o problema de valor inicial no qual se procura a solução da equação

$$\dot{y} = y^2$$

que satisfaça a condição  $y(0) = y_0$  com  $y_0 \neq 0$ . Mostre que a solução deste problema diverge a tempo finito  $t = 1/y_0$ .

A solução é

$$y(t) = \frac{1}{y_0 - t}$$

Logo a solução explode a tempo finito.