1.2 Existência e Unicidade de Soluções

Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. O Teorema Fundamental do Cálculo implica que a função

$$F(t) = \int_a^t f(s)\,ds, \ \text{ com } a \leq t \leq b,$$

é diferenciável em (a,b) e $F'(t) = f(t)$ para todo $t \in (a,b)$. Logo, $F(t)$ é uma solução da equação diferencial ordinária de $1^{\underline{a}}$ ordem

$$\dot{y}(t) = f(t) \ \text{ com } a \leq t \leq b,$$

e ainda $F(a) = 0$. Neste caso dizemos que $F(t)$ é uma solução do **problema de valor inicial** (P.V.I.)

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t) \\ y(a) = 0. \end{cases}$$

Este P.V.I. possui uma solução, mas surge a pergunta:

Será que $F(t)$ é a única solução deste P.V.I.? Neste caso a resposta é positiva, pois, se $G(t)$ for uma outra solução, temos que

$$G'(t) = f(t) = F'(t)$$

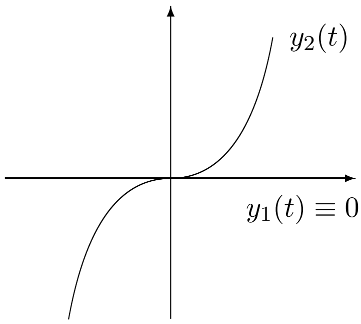
e isso implica que $(F-G)'(t) = 0$. Ou seja, $(F-G)(t) = \text{constante}$. Mas, $(F-G)(a) = F(a) - G(a) = 0 - 0 = 0$. Portanto, $G(t) = F(t)$ para todo $t \in (a,b)$.

No entanto, há problemas do valor inicial que possuem mais de uma solução. O problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} &= |y|^{1/2} \\ y(0) &= 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

não tem unicidade de solução, pois $y_1(t) \equiv 0$ é uma solução e

$$y_2(t) = \begin{cases} t^2/4, & t \geq 0, \\ -t^2/4, & t < 0 \end{cases}$$



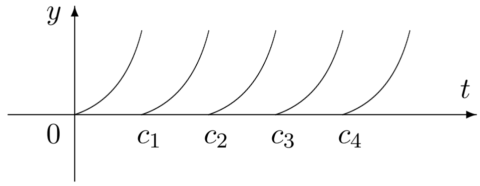
também é solução (verifique). Portanto, temos duas soluções para o problema (1.2).

Como um outro exemplo, vemos que o P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{y} = 3\,y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

também não tem unicidade de solução, pois $y(t) \equiv 0$ é uma solução e observamos que para qualquer $c \in \mathbb{R}_+$, a função $y_c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$y_c(t) = \begin{cases} (t-c)^3, & t \geq c, \\ 0, & t \leq c \end{cases}$$



também é solução. Logo, o P.V.I. (1.3) tem infinitas soluções.

Logo, dado o P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

onde f é uma função definida num aberto A de $\mathbb{R}^2$, surgem as seguintes questões:

1. Como sabemos que o P.V.I. (1.4) possui de fato uma solução sem exibi-la explicitamente?

2. Como sabemos que existe somente uma solução de (1.4)? Talvez existam duas ou três ou mesmo infinitas soluções.

3. Qual a utilidade de determinarmos se (1.4) possui uma única solução se não somos capazes de exibi-la?

Para esta última questão, podemos dizer que o fato de sabermos que (1.4) possui uma única solução é muito importante, pois a partir disto poderemos usar técnicas computacionais para obter aproximações da solução $y(t)$.

Para responder a primeira questão usaremos o **método de Picard**. Suponhamos que $f(t,x)$ seja uma função contínua em (t,x) e continuamente derivável em x. Observamos que $y(t)$ é solução de (1.4) se, e somente se,

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds.$$

Consideremos, agora, a seqüência $y_n(t)$ dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= y_0, \\
y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s))\, ds, \\
y_2(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s))\, ds, \\
&\vdots \\
y_n(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\, ds.
\end{aligned}$$

As funções $y_n(t)$ são chamadas **iteradas de Picard**. Pode-se mostrar que $y_n(t) \to y(t)$, quando $n \to \infty$, para t num intervalo conveniente. Este processo é conhecido por **método de Picard**.

Exemplo 1.1. Encontre uma solução para o P.V.I.

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= y \\
y(0) &= 1
\end{aligned}$$

usando o método de Picard.

SOLUÇÃO: Observamos que, neste caso, $f(t, y) = y$, $t_0 = 0$ e $y_0 = 1$. A equação integral equivalente ao P.V.I. dado é:

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(s)\, ds.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= 1\\
y_1(t) &= 1 + \int_0^t 1\, ds = 1 + t\,,\\
y_2(t) &= 1 + \int_0^t y_1(s)\, ds = 1 + \int_0^t (1+s)\, ds = 1 + t + \frac{t^2}{2!}\,,\\
y_3(t) &= 1 + \int_0^t y_2(s) ds = 1 + \int_0^t (1 + s + \frac{s^2}{2!})\, ds = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\,,\\
&\vdots\\
y_n(t) &= 1 + \int_0^t y_{n-1}(s) ds = 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{s^2}{2!} + \cdots + \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\right) ds =\\
&= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Como $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots$, vemos que as iteradas de Picard $y_n(t)$ convergem para a solução $y(t) = e^t$ deste P.V.I.. □

EXERCÍCIOS 1.1. 1) Construa as iteradas de Picard para o P.V.I.

$$\begin{aligned}\dot{y} &= 2\,t\,(y+1)\\ y(0) &= 0\end{aligned}$$

e mostre que $y_n(t)$ converge para a solução $y(t) = e^{t^2} - 1$.

2) Calcule as três primeiras iteradas de Picard para o P.V.I.

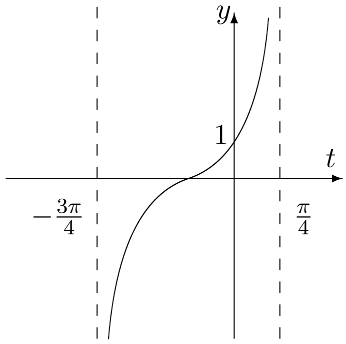
$$\begin{cases} \dot{y} = e^t + y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Observação 1.1. As soluções de equações diferenciais podem não existir para todo t real; por exemplo, a função $y(t) = \operatorname{tg}(t + \pi/4)$ é solução do P.V.I.:

$$\dot{y}(t) = 1 + y^2(t), \;\; y(0) = 1$$

e está definida somente no intervalo $(-3\pi/4, \pi/4)$.
De fato, se $t \in (-3\pi/4, \pi/4)$, então

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \sec^2(t + \frac{\pi}{4}) \\ &= 1 + \operatorname{tg}^2(t + \frac{\pi}{4}) \\ &= 1 + y^2(t) \end{aligned}$$



e $y(0) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$. □

Por este fato, não podemos esperar que as iteradas de Picard convirjam para todo t. Para sabermos onde as iteradas de Picard convergem, tentamos encontrar um intervalo no qual todas as $y_n(t)$ são uniformemente limitadas, isto é, existe uma constante $k > 0$ tal que $|y_n(t)| \leq k$ para todo $t \in (a, b)$. Ou seja, procuramos um retângulo que contenha os gráficos de todas as iteradas de Picard.

O lema abaixo cuja demonstração pode ser encontrada em [4] (cf. Lema I.1), nos mostra como encontrar tal retângulo.

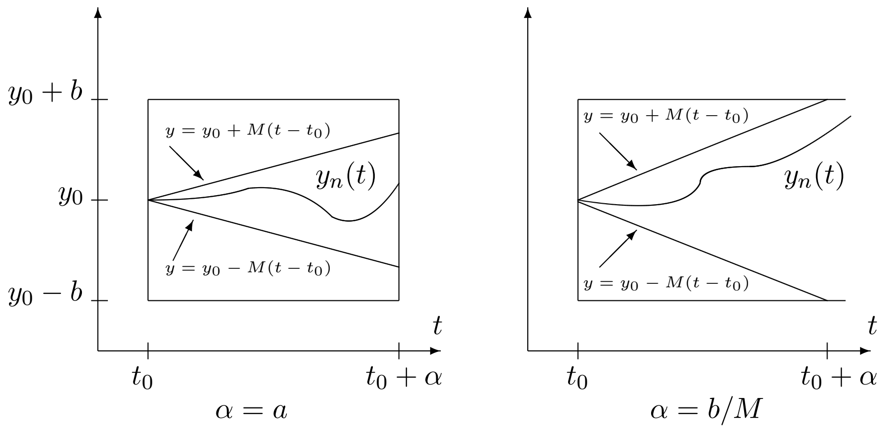
Lema 1.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e consideremos o retângulo*

$$\mathcal{R} = \{\, (t, y) \mid t_0 \leq t \leq t_0 + a \;\; e \;\; |y - y_0| \leq b \,\}.$$

Defina $M = \max\limits_{(t,y)\in\mathcal{R}} |f(t, y)|$ *e* $\alpha = \min\{\, a, \dfrac{b}{M} \,\}$. *Então*

$$|y_n(t) - y_0| \leq M|t - t_0| \quad para \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha.$$

Obervamos que o Lema 1.1 afirma que o gráfico de $y_n(t)$ permanece entre as retas $y = y_0 + M(t - t_0)$ e $y = y_0 - M(t - t_0)$ para $t_0 \le t \le t_0 + \alpha$. Estas retas limitam o retângulo $\mathcal{R}$ em $t = t_0 + a$ se $a \le \dfrac{b}{M}$ e em $t = t_0 + \dfrac{b}{M}$ se $\dfrac{b}{M} < a$. Em ambos os casos, o gráfico de $y_n(t)$ está contido em $\mathcal{R}$ para $t_0 \le t \le t_0 + \alpha$.



O próximo teorema nos apresenta as condições para a existência e unicidade de soluções para o P.V.I. (1.4).

Teorema 1.1 (Existência e Unicidade Local). *Suponha f e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sejam funções contínuas no retângulo*

$$\mathcal{R} = \{\, (t, y) \mid t_0 \le t \le t_0 + a \ \text{ e } |y - y_0| \le b \,\}.$$

Sejam $M = \max\limits_{(t,y)\in\mathcal{R}} |f(t, y)|$ e $\alpha = \min\{\, a, \dfrac{b}{M} \,\}$. Então o P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

possui uma e somente uma solução $y(t)$ no intervalo $t_0 \le t \le t_0 + \alpha$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [4] (cf. Teorema I.2').

Exemplo 1.2. 1) Mostre que a solução $y(t)$ do P.V.I. $\dot{y} = y^2 + \cos t^2$ com $y(0) = 0$ existe no intervalo $0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}$.

Solução: Usaremos o Teorema 1.1. Neste caso $f(t, y) = y^2 + \cos t^2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t, y) = 2\,y$, são contínuas em qualquer retângulo $\mathcal{R} = \{\,(t, y) \mid 0 \leq t \leq a, |y| \leq b\,\}$, em que $a, b \in \mathbb{R}$. Calculando

$$M = \max_{(t,y)\in\mathcal{R}} |f(t, y)| = \max_{|y|\leq b \text{ e } 0\,\leq\, t\,\leq\, a} |y^2 + \cos t^2| = b^2 + 1,$$

vemos que $y(t)$ existe para $0 \leq t \leq \alpha$, em que $\alpha = \min\{\,a, \dfrac{b}{b^2+1}\,\}$. Como *a priori* podemos tomar qualquer valor de a, temos que o valor máximo de α será quando $\dfrac{b}{b^2+1}$ for máximo. Este máximo é $1/2$. Portanto o Teorema 1.1 garante que a solução $y(t)$ existe e é única para $0 \leq t \leq 1/2$. □

2) Mostre que $y(t) = -1$ é a única solução do P.V.I. $\dot{y} = t(1 + y)$ com $y(0) = -1$.

Solução: Observamos que $y(t) = -1$ é solução do P.V.I.. Como $f(t, y) = t\,(1+y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}\,(t, y) = t$ são contínuas em qualquer retângulo, temos que o P.V.I. dado possui uma única solução e, portanto, será $y(t) = -1$. □

Observação 1.2. Suponha que $\dot{y} = f(t, y)$ seja uma equação diferencial vetorial, isto é, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $f\colon A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$. O Teorema 1.1 continua sendo válido se entendermos $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ como sendo a matriz jacobiana de f, isto é, $Jf = \dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}$. Usaremos esta formulação no caso das equações de 2ª ordem, das equações de ordem n e de sistemas de equações diferenciais. □

Exercícios 1.2. 1) Determine uma solução do P.V.I. $\dot{y} = t\,\sqrt{1 - y^2}$

com $y(0) = 1$ diferente de $y(t) = 1$. Isto contradiz o Teorema 1.1? Explique.

2) Mostre que a solução $y(t)$ do P.V.I. dado existe no intervalo especificado:

a) $\dot{y} = t + y^2$, com $y(0) = 0$ para, $0 \leq t \leq 1/2$.

b) $\dot{y} = e^{-t^2} + y^2$, com $y(0) = 0$ para, $0 \leq t \leq 1/2$.

c) $\dot{y} = e^{-t^2} + y^2$, com $y(1) = 0$ para, $1 \leq t \leq 1 + \sqrt{e/2}$.

d) $\dot{y} = 1 + y + y^2 \cos t$, com $y(0) = 0$ para, $0 \leq t \leq 1/3$.