Equações Diferenciais

Existencia e Unicidade

Tiago Pereira
tiago@icmc.usp.br

ICMC CeMEAI USP

EDO solução

Geral - Todas as possíveis soluções

Problema do Valor Inicial

Solução que assume um valor dado

EDO solução

$$x' = x$$

Geral - Todas as possíveis soluções

$$x(t) = ce^t$$

EDO solução

$$\begin{cases} x' = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Problema do Valor Inicial

$$x(t) = \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{c}\,e^t \quad \Longrightarrow \quad x(t) = e^t$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

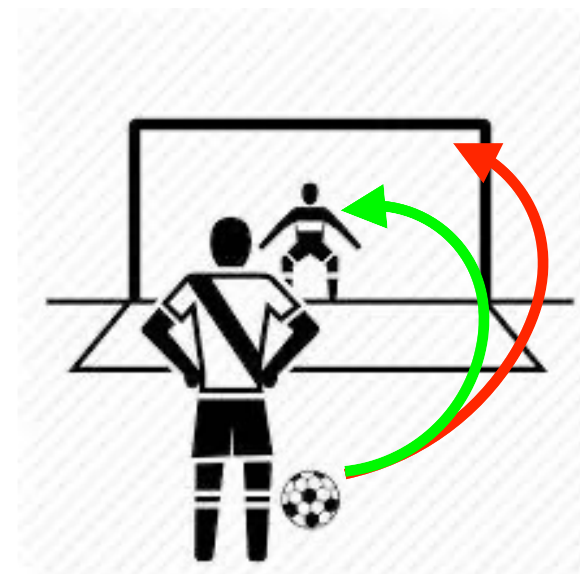
EDO’s: Nem sempre da pra resolver

$$\frac{dx}{dt} = e^{-x^2}$$

Como saber se a solução do PVI existe?

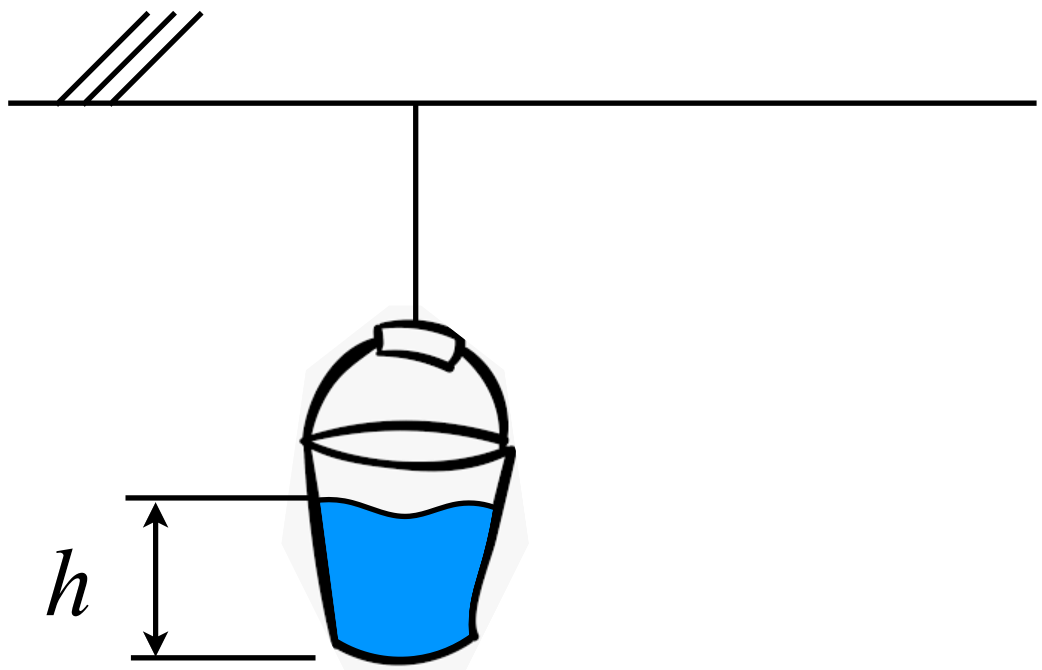
EDO's: Quando a solução existe?

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x) \\ x_0 = 0 \end{cases}$$



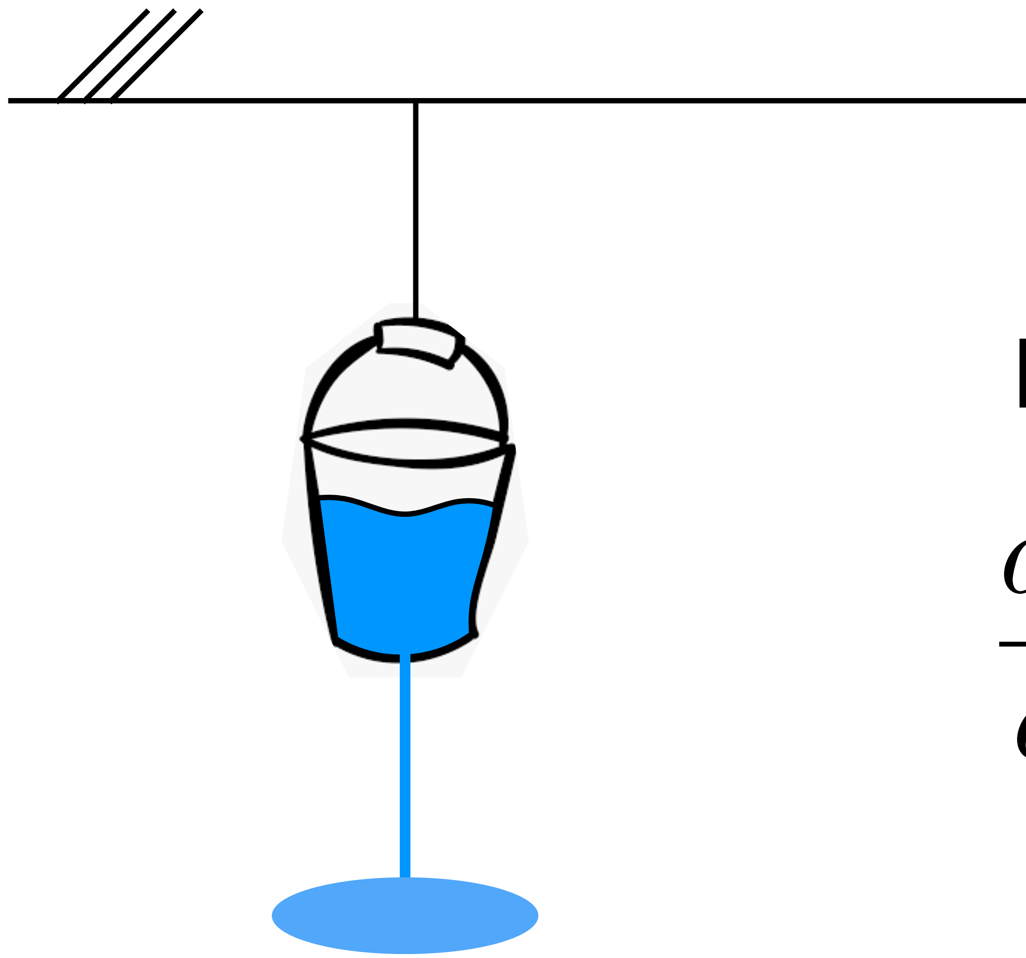
https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

EDO's: um balde



https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

EDO's: um balde

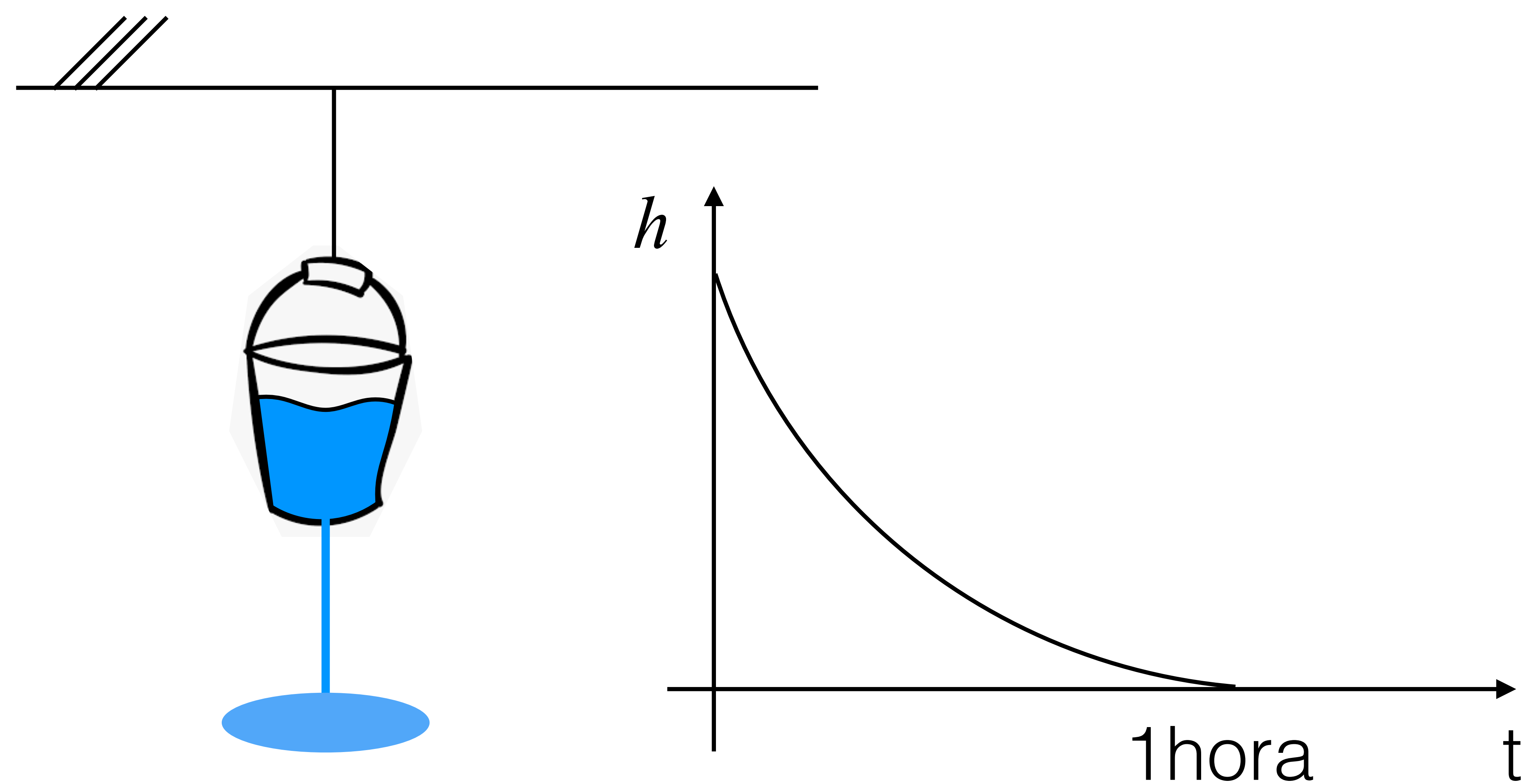


Lei de Torriceli

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$$

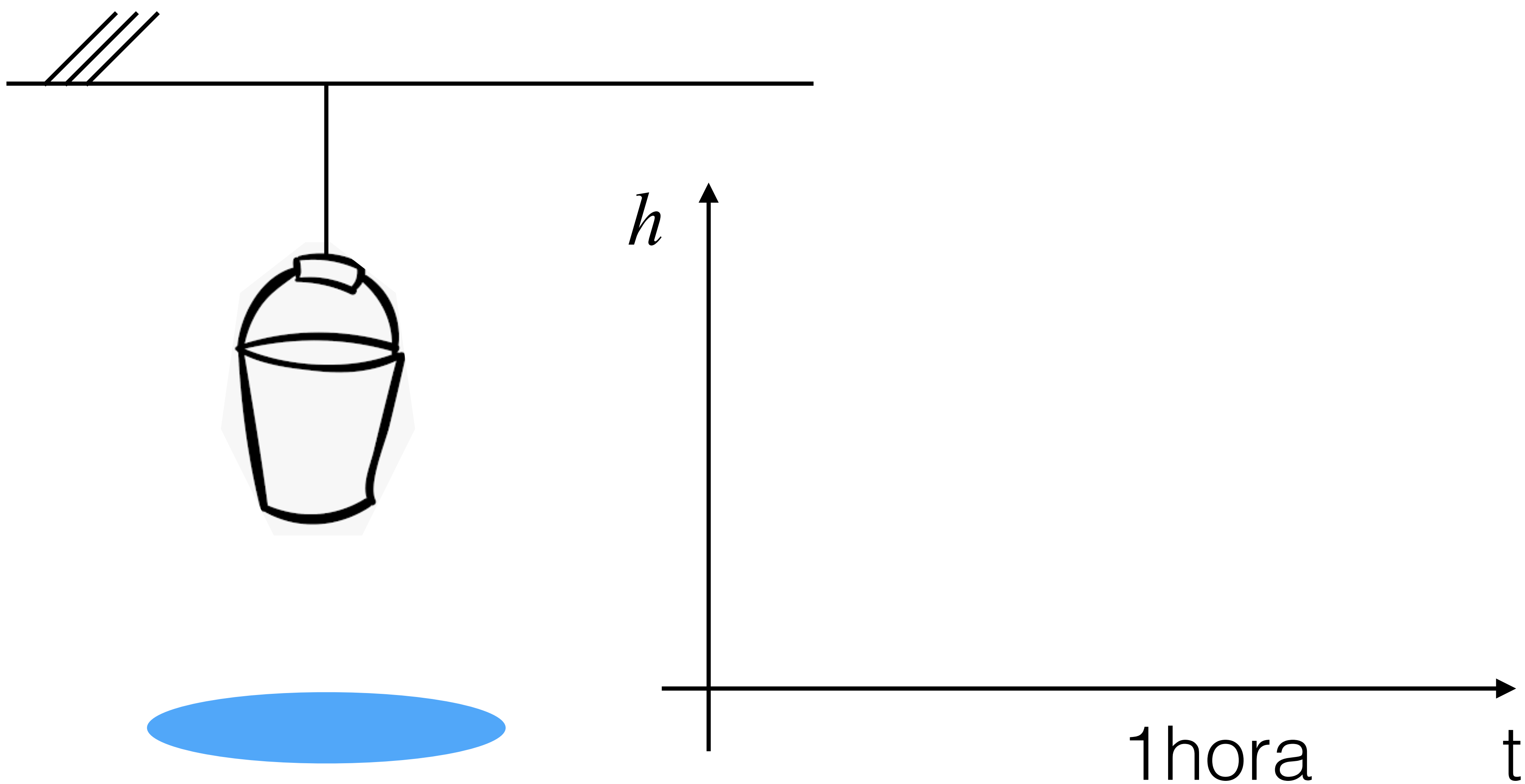
https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

EDO’s: um balde



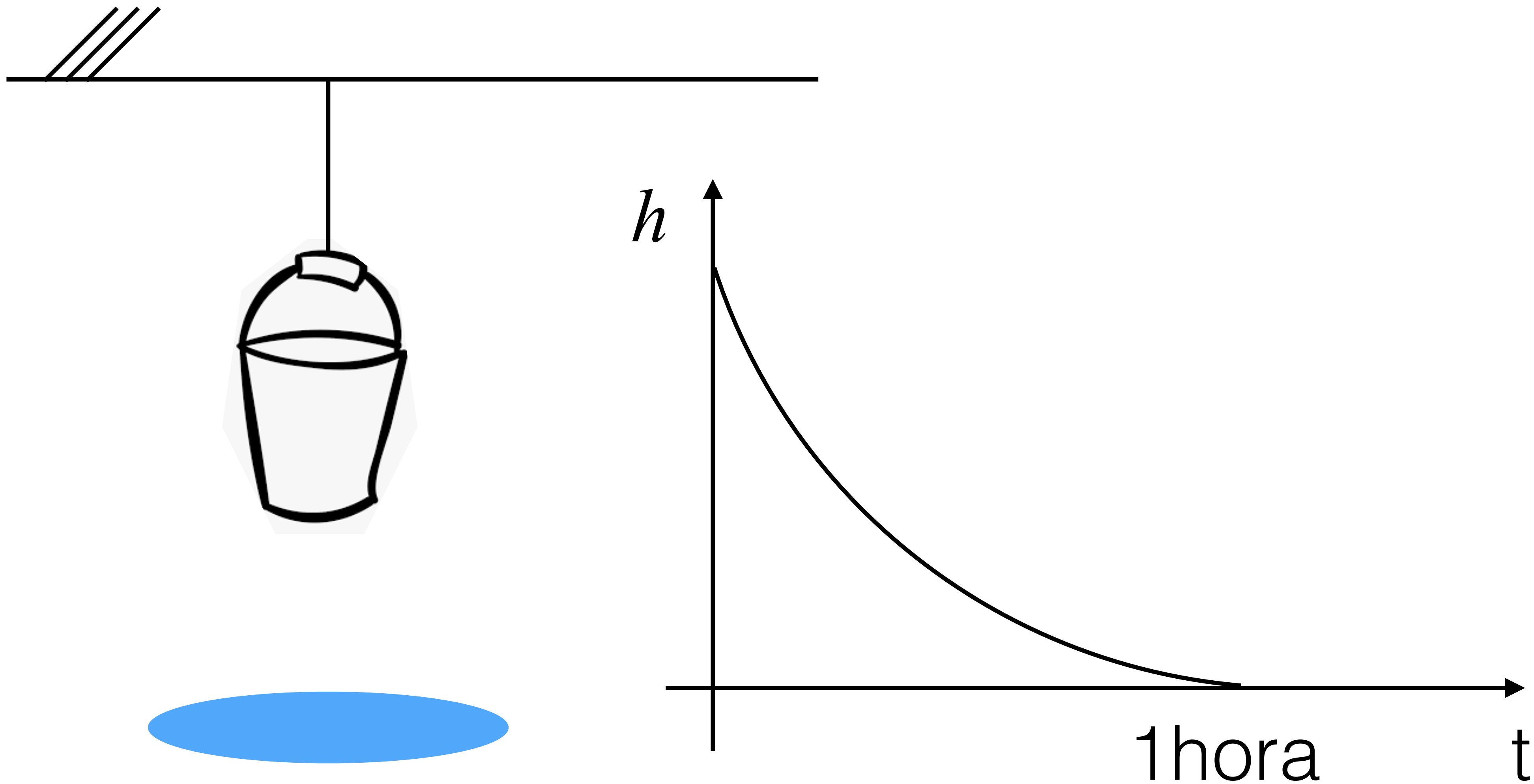
https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

EDO’s: um balde



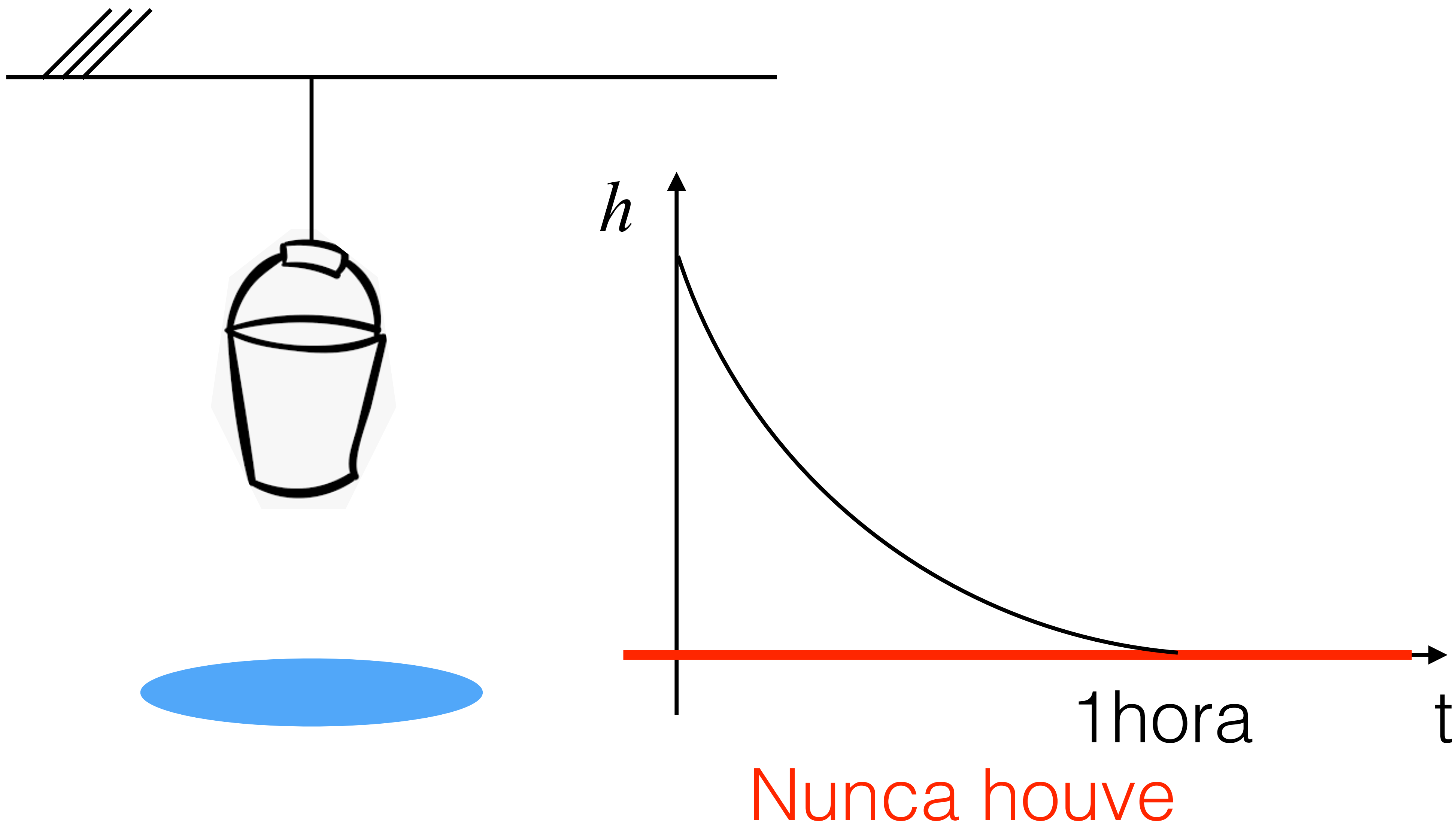
https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

EDO's: um balde



https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

EDO's: um balde



https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

EDO’s: Quantas Soluções

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{x} \\ \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

EDO's: Uma Solução

$$x(t) = \frac{t^2}{4}$$

$$x' = \frac{t}{2}$$

EDO's: Uma Solução

$$x(t) = \frac{t^2}{4}$$

$$x' = \left(\underbrace{\frac{t^2}{4}}_{x} \right)^{1/2}$$

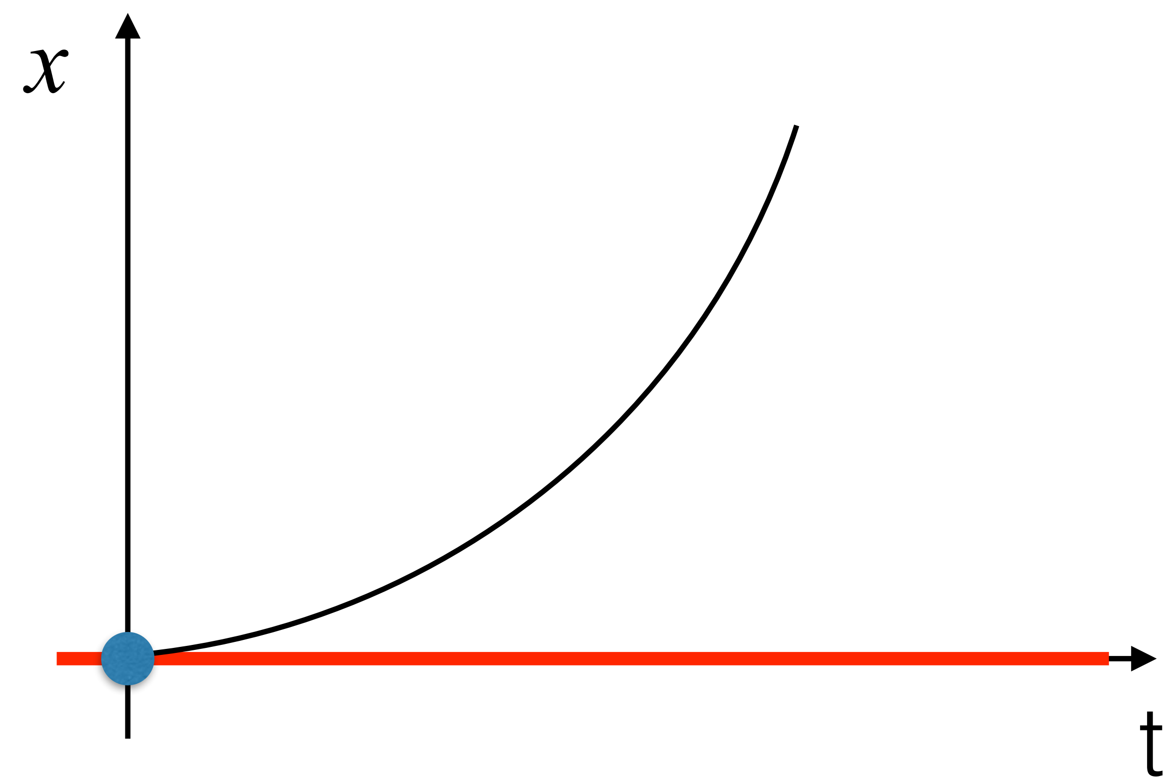
https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

EDO's: Outra Solução

$$x(t) = 0$$

EDO’s: Solução

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$



https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

EDO existência e unicidade

Teorema de Picard-Lindelöf

[ocultar]

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Em matemática, sobretudo na teoria das equações diferenciais ordinárias, o **teorema de Picard-Lindelöf** estabelece condições suficientes para a existência e unicidade de soluções em uma vizinhança de t_0 para o problema de valor inicial:[1]

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(y(t), t)$$
$$y(t_0) = y_0$$

onde $f(x, t)$ é uma função contínua na variável t e Lipschitz contínua na variável x.

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

EDO existência e unicidade

Teorema de Picard-Lindelöf [ocultar]

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Em matemática, sobretudo na teoria das equações diferenciais ordinárias, o teorema de Picard-Lindelöf estabelece condições suficientes para a existência e unicidade de soluções em uma vizinhança de t_0 para o problema de valor inicial:[1]

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(y(t), t)$$
$$y(t_0) = y_0$$

onde $f(x,t)$ é uma função contínua na variável t e Lipschitz contínua na variável x.

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

diferenciável em x_0

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

EDO's: Quantas Soluções

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html