Fator integrante & Método dos Coeficientes a determinar

Tiago Pereira

20 de Outubro de 2020

Nosso objetivo é resolver equações da seguinte forma

$$x' + a(t)x = b(t) \tag{1}$$

Vamos discutir duas formas de resolução

– **Fator integrante**: Serve para o caso geral. Mas gera integrais complicadas

– **Método do Chute**. As contas são mais simples mas so serve para alguns b's.

Primeiro um pequeno detour. Vamos notar que a solução da EDO

$$y' = c(t) \tag{2}$$

é

$$y(t) = \int_0^t c(s)ds + d$$

onde d é uma constante. Lembre também que y é apenas o nome da função.

1 Fator Integrante

Vamos voltar para Eq. (1). O truque aqui é supor que existe uma função μ tal que

$$\mu(t)[x' + a(t)x] = (\mu(t)x)'$$

Esse truque é bom porque se isso for verdade multiplicando Eq. (1) por μ obtemos

$$\mu(t)[x' + a(t)x] = \mu(t)b(t)$$

e chegamos a Eq. (2) como

$$(\mu(t)x)' = \mu(t)b$$

Agora pela observação anterior (chamando $y = \mu x$) sabemos que

$$\mu(t)x(t) = \int_0^t \mu(s)b(s) + c$$

E portanto

$$x(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int_0^t \mu(s)b(s) + \frac{c}{\mu(t)}$$

é a solução geral da EDO.

Chamamos μ de fator integrante. Como achar μ? Temos que resolver

$$(\mu x)' = \mu x' + \mu a(t)x \quad \Rightarrow \quad \mu' x + \mu x' = \mu x' + \mu a(t)x$$

implicando que

$$\mu' x = \mu a(t)x$$

e portanto

$$\mu' = a(t)\mu$$

O truque funciona porque sabemos resolver essa EDO

$$\mu(t) = \mu_0 e^{\int_0^t a(s)ds}$$

Exemplo 1: Considere a EDO

$$x' + x = 4$$

O fator integrante é

$$\mu' = \mu \Rightarrow \mu(t) = \mu_0 e^t$$

Aqui qualquer μ_0 não nulo serve. A melhor escolha é tomar $\mu_0 = 1$ porque isso leva a contas mais simples e não afeta a condição inicial. Agora multiplicamos a EDO pelo fator integrante e resolvemos

$$(e^t x(t))' = 4e^t$$

e obtemos que

$$e^t x(t) = 4 \int e^t = 4e^t + c$$

e portanto

$$x(t) = 4 + \frac{c}{e^t}$$

Exemplo 2: Considere

$$x' + tx = 2t$$

Novamente o fator integrante será

$$\mu' = t\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = tdt$$

e integrante de ambos os lados obtemos

$$\mu(t) = e^{t^2/2}$$

portanto

$$(e^{t^2/2}x(t))' = 2te^{t^2/2} \Rightarrow e^{t^2/2}x(t) = 2\int te^{t^2/2}dt + c_1$$

Para resolver a integral utilizamos a mudança de variável

$$u = t^2/2 \ \ e \ \ du = tdt$$

concluindo que

$$2\int te^{t^2/2}dt = 2\int e^u du \Rightarrow 2e^{t^2/2} + c_2$$

donde

$$e^{t^2/2}x(t) = 2e^{t^2/2} + c$$

e portanto

$$x(t) = ce^{-t^2/2} + 2$$

Exemplo 3: Considere

$$x' + tx = \cos t$$

Esse é primo do segundo exemplo. Um pouco mais chato porque teremos que deixar a resposta de forma implícita. Do exemplo anterior sabemos que

$$\mu(t) = e^{t^2}$$

e portanto

$$(e^{t^2}x(t)) = \int e^{t^2}\cos tdt + c$$

O problema aqui é que não da pra resolver a integral e a resposta fica como

$$x(t) = ce^{-t^2} + e^{-t^2}\int_0^t e^{s^2}\cos sds$$

2 Coeficientes a determinar

Esse é o famoso método do chute pois para resolver a EDO chutamos uma solução e tentamos ajustar as coisas pra dar certo. A idéia é a seguinte, considere o **Exemplo 1** anterior.

$$x' + x = 4$$

Vamos chutar que a solução tem a mesma forma que o lado direto da igualdade. Como temos uma constante chutamos que a solução particular também será constante

$$x_p = c$$

substituindo na EDO obtemos

$$x_p' + x_p = 4 \Rightarrow c = 4$$

Como sabemos que a solução da homogênea é $x_h = ce^{-t}$ temos que a solução geral é

$$x(t) = ce^{-t} + 4$$

Exemplo 4: Agora considere

$$x' + x = t^2 + 1$$

Já conhecemos a soluçao da homogênea

$$x_h(t) = ce^{-t}$$

Para achar a particular chutamos

$$x_p = at^2 + bt + c$$

e nossa missão agora é achar os coeficientes a, b e c. Substituindo na EDO

$$\underbrace{2at + b}_{x_p'} + \underbrace{at^2 + bt + c}_{x_p} = t^2 + 1$$

Agora temos que igualar os coeficientes obtendo

$$a = 1 \tag{3}$$

$$2a + b = 0 \tag{4}$$

$$b + c = 1 \tag{5}$$

O modo mais fácil de resolver esse sistema é por escalonamento. Vamos resolver de um outro modo para treinar os resultados de algebra linear. Introduzindo o vetor

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \;,\; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podemos escrever o sistema como

$$A\vec{y} = \vec{b}$$

como o determinante de A é não nulo existe a inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$\vec{y} = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e a solução particular é

$$x_p(t) = t^2 - 2t + 3$$

Exercícios

Resolva as seguintes EDO's

$a)$ $y' + 5y = t$

$$x(t) = ce^{-5t} + \frac{t}{5} - \frac{1}{2}5$$

$b)$ $x' + x = \cos t$

$x(t) = ce^{-t} + \frac{\sin t}{2} + \frac{\cos t}{2}$

$c)$ Dado n um número natural $x' + x = t^n$

$x(t) = ce^{-t} + (-1)^n t^n \Gamma(n+1, -t)$