# Equações Diferenciais

# Fator Integrantes

Tiago Pereira
tiago@icmc.usp.br

ICMC CeMEAI USP

# Forma Geral

Resolver EDO's de primeira ordem escalar

$$x' + a(t)x = b(t)$$

# Detour

Lembrando que

$$y' = c(t)$$

Tem solução

$$y(t) = \int_0^t c(s)ds + d$$

# Fator Integrante

Voltando para a EDO

$$x' + a(t)x = \qquad b(t)$$

$$\underbrace{\mu(t)[x' + a(t)x]}_{(\mu(t)x)'} = \mu(t)b(t)$$

# Fator Integrante

Um truque

$$\mu(t)[x' + a(t)x] = (\mu(t)x)'$$

implica

$$(\mu(t)x)' = \mu(t)b$$

# Fator Integrante

Então

$$\mu(t)x(t) = \int_0^t \mu(s)b(s) + c$$

# Fator Integrante

Então

$$\mu(t)x(t) = \int_0^t \mu(s)b(s) + c$$

e

$$x(t) = \frac{1}{\mu(t)}\int_0^t \mu(s)b(s) + \frac{c}{\mu(t)}$$

# Fator Integrante: Como achá-lo?

# Fator Integrante: Como achá-lo?

Lembrando que impomos

$$(\mu x)' = \mu x' + \mu a(t) x$$

# Fator Integrante: Como achá-lo?

Lembrando que impomos

$$(\mu x)' = \mu x' + \mu a(t)x$$

$$\Rightarrow \quad \mu' x + \mu x' = \mu x' + \mu a(t)x$$

# Fator Integrante: Como achá-lo?

Lembrando que impomos

$$(\mu x)' = \mu x' + \mu a(t)x$$

$$\Rightarrow \quad \mu' x + \cancel{\mu x'} = \cancel{\mu x'} + \mu a(t)x$$

# Fator Integrante: Como achá-lo?

Lembrando que impomos

$$(\mu x)' = \mu x' + \mu a(t) x$$

$$\Rightarrow \quad \mu' \boxed{x} + \cancel{\mu x'} = \cancel{\mu x'} + \mu a(t) \boxed{x}$$

# Fator Integrante: Como achá-lo?

A função também satisfaz uma EDO

$$\mu' = a(t)\mu$$

# Fator Integrante: Como achá-lo?

A função também satisfaz uma EDO

$$\mu' = a(t)\mu$$

Solução é

$$\mu(t) = \mu_0 e^{\int_0^t a(s)ds}$$

# Exemplo 1

Considere a EDO

$$x' + x = 4$$

# Exemplo 1

Considere a EDO

$$x' + x = 4$$

1 Passo: Calcular o fator integrante

$$\mu' = \mu \Rightarrow \mu(t) = \mu_0 e^t$$

# Exemplo 1

Considere a EDO

$$x' + x = 4$$

2 Passo: Colocar na forma

$$(e^t x(t))' = 4e^t$$

# Exemplo 1

Considere a EDO

$$x' + x = 4$$

2 Passo: Colocar na forma

$$(e^t x(t))' = 4e^t$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# Exemplo 1

Considere a EDO

$$x' + x = 4$$

3 Passo: Resolver e isolar $x$

$$e^t x(t) = 4\int_0^t e^s ds + c$$

# Exemplo 1

Considere a EDO

$$x' + x = 4$$

3 Passo: Resolver e isolar $x$

$$x(t) = 4 + \frac{c}{e^t}$$

# Exemplo 2

Considere a EDO

$$x' + tx = 2t$$

1 Passo: Calcular o fator integrante

$$\mu' = t\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = tdt$$

# Exemplo 2

Considere a EDO

$$x' + tx = 2t$$

1 Passo: Calcular o fator integrante

$$\mu(t) = e^{t^2/2}$$

# Exemplo 2

Considere a EDO

$$x' + tx = 2t$$

2 Passo: Colocar na forma

$$(e^{t^2/2}x(t))' = 2te^{t^2/2}$$

# Exemplo 2

Considere a EDO

$$x' + tx = 2t$$

3 Passo: Resolver e isolar $x$

$$x(t) = ce^{-t^2/2} + 2$$

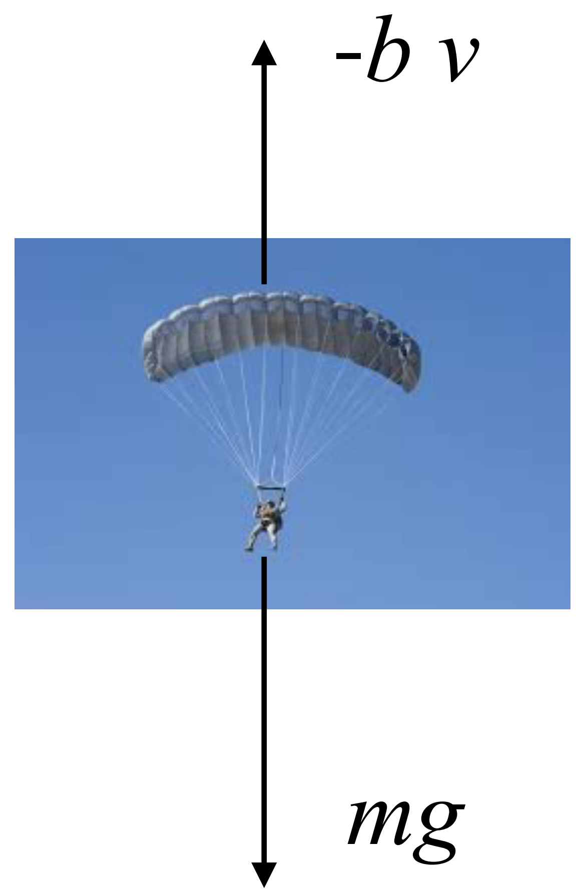
https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# Exemplo 3

Acha a velocidade terminal de um paraquedista

# Exemplo 3

Acha a velocidade terminal de um paraquedista




https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# Exemplo 3

Acha a velocidade terminal de um paraquedista

$$mv' = mg \boxed{- bv}$$

Atrito viscoso

Lei de Newton

# Exemplo 3

Ou ainda

$$mv' + bv = mg$$

# Exemplo 3

Melhor

$$v' + \frac{b}{m}v = g$$

# Exemplo 3

Melhor

$$v' + \frac{b}{m}v = g$$

Fator integrante

$$\mu(t) = e^{\frac{b}{m}t}$$

# Exemplo 3

E portanto

$$(e^{\frac{b}{m}t}v(t))' = ge^{\frac{b}{m}t}$$

ou

$$e^{\frac{b}{m}t}v(t) = g\int_0^t e^{\frac{b}{m}t} + c$$

# Exemplo 3

lembrando que

$$g\int_0^t e^{s\frac{b}{m}}ds = \frac{mg}{b}e^{\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b}$$

# Exemplo 3

E portanto

$$\left(e^{\frac{b}{m}t}v(t)\right)' = ge^{\frac{b}{m}t}$$

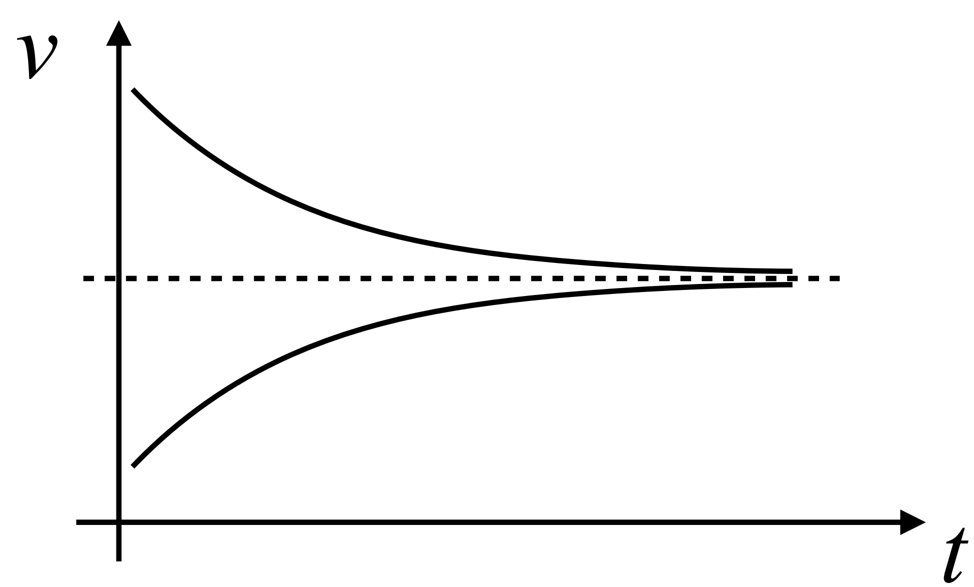
ou

$$e^{\frac{b}{m}t}v(t) = \overset{\displaystyle \frac{mg}{b}e^{\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b}}{\overset{\shortparallel}{\displaystyle g\int_0^t e^{\frac{b}{m}t} + c}}$$

# Exemplo 3

Solução

$$v(t) = \frac{mg}{b} - ce^{-\frac{b}{m}t}$$




https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html