Resposta a um forçamento: A função de Green

Tiago Pereira

24 de Abril de 2020

Nosso objetivo é encontrar na resposta da EDO a um forçamento

$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = f(t) \tag{1}$$

Faremos pela função de transferência e pela função de green.

Resposta a um impulso e a função de Green

Primeiro introduzimos o operator

$$L := \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2$$

isso é apenas para compactar a nossa notação. Note que se $x(t)$ resolve a EDO temos

$$Lx = f(t)$$

Ou seja, isso nos dá a EDO original Eq. (1).

A função de Green $g(t)$ do operador L tem a seguinte propriedade

$$Lw(t) = \delta(t)$$

ou seja, a G resolve a EDO para o impulso com condições iniciais nulas. Esse função nos para a respostas para uma forçamento qualquer. Como t na função w e δ é qualquer, podemos tomar

$$Lw(t-\tau) = \delta(t-\tau)$$

para um τ qualquer. Agora multiplicamos pela função $f(\tau)$ a direta

$$Lw(t-\tau)f(\tau) = \delta(t-\tau)f(\tau)$$

agora integramos a equação

$$L\int_0^t w(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t \delta(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

como o operator L não depende de τ, ele sai da integral. E pela propriedade da δ temos

$$L\left(\int_0^t w(t-\tau)f(\tau)d\tau\right) = f(t)$$

por inspeção temos

$$\boxed{x(t) = \int_0^t w(t-\tau)f(\tau)d\tau}$$

portanto a função de Green determina totalmente a resposta. Portanto sabendo a resposta da EDO para um impulso sabemos a resposta para qualquer forçamento!

Convolução Esse tipo de integral é chamado de integral de convolução e temos uma notação especial para ela

$$g * f = \int_0^t g(t-s)f(s)ds$$

onde $*$ é chamado de produto de convolução. Um fato interessante da convolução é

$$\int_0^t f(t)g(t-s)ds = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$$

ou em nossa notação $f * g = g * f$ que pode ser demostrado por substituição de variáveis.

Integrais de convolução viram produtos. Uma das propriedades centrais da Transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}(f * g) = F(s)G(s)$$

ou seja a transformada manda a integral de convolução entre f e g no produto das transformadas de f e g.

0.1 Descobrindo a função de Green pela Transformada de Laplace

Vamos resolver

$$Lw(t) = \delta(t)$$

Relembrando o definição de L e transformando a igualdade por Laplace

$$p(s)W(s) = 1, \quad \text{onde} \quad p(s) = s^2 + \gamma s + \omega_0^2$$

é o polinômio característico da EDO homogênea. Vamos introduzir

$$W(s) = \frac{1}{p(s)}$$

Portanto

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(W(s)\right)$$

Recapitulando

1. Considere a Eq (1) e tome o polinômio característico $p(s)$
2. Tome
$$W(s) = \frac{1}{p(s)}$$
3. Escreva $W(s)$ em frações parciais e ache a função de green $w(t)$

Exemplo – Forçamento harmônico : $f(t) = e^{i\omega t}$

$$x' + ax = e^{i\omega t}$$

Nos sabemos que a solução particular é

$$x(t) = Ae^{i\omega t}$$

E anteriormente determinamos a amplitude A. Portanto

$$Ai\omega\mathcal{L}(e^{i\omega t}) + aA\mathcal{L}(e^{i\omega t}) = \mathcal{L}(e^{i\omega t})$$

$$A = \frac{1}{a + i\omega}$$

Note que $A = A(\omega)$, mas como ω é fixo temos

$$\mathcal{L}(x(t)) = \mathcal{L}(Ae^{i\omega t}) = A\mathcal{L}(f(t))$$

Portanto

$$X(s) = A(\omega)F(s) \qquad \text{mas} \qquad X(s) = W(s)F(s)$$

daqui concluímos que

$$A = W(i\omega)$$

ou seja, a amplitude é dada pela função de transferencia calculada na frequência complexa

$$s = i\omega$$