



Função de Green e Transferência

Tiago Pereira
tiago@icmc.usp.br

ICMC



CeMEAI

USP

Solução para forçamentos

$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = f(t)$$

Operator diferencial

$$L := \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2$$

Se x resolve a EDO

$$Lx = f(t)$$

Resposta a um impulso

$$Lw(t) = \delta(t)$$

Transformando por Laplace

$$p(s)W(s) = 1$$

Onde

$$p(s) = s^2 + \gamma s + \omega_0^2$$



Função de Transferência

$$W(s) = \frac{1}{p(s)}$$

Portanto

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}(W(s))$$

Função de Green

$$Lw(t - s) = \delta(t - s)$$

$$Lw(t - s)f(s) = \delta(t - s)f(s)$$

$$L \int_0^t w(t - s)f(s)ds = \int_0^t \delta(t - s)f(s)ds$$

Função de Green

$$Lw(t - s) = \delta(t - s)$$

$$Lw(t - s)f(s) = \delta(t - s)f(s)$$

$$L \left(\int_0^t w(t - s)f(s)ds \right) = f(t)$$

Solução para forçamentos

$$x(t) = \int_0^t w(t-s)f(s)ds$$

Solução para forçamentos

$$Lx = f(t)$$

domínio s

$$p(s)X(s) = F(s)$$

$$X(s) = W(s)F(s)$$

Solução para forçamentos

$$Lx = f(t)$$

domínio s

$$p(s)X(s) = F(s) \quad X(s) = W(s)F(s)$$

domínio temporal

$$x(t) = \int_0^t w(t-s)f(s)ds$$

Solução para forçamentos

$$\mathcal{L}(x(t)) = X(s)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t w(t - \tau) f(\tau) d\tau\right) = W(s)F(s)$$

Convolução

$$g * f = \int_0^t g(t - s) f(s) ds$$

Convolução

$$\int_0^t f(t)g(t-s)ds = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$$

$$f * g = g * f$$

Solução do forçamento

$$x(t) = (w * f)(t)$$

$$X(s) = W(s)F(s)$$



Produto de convolução

$$\mathcal{L}(f * g) = F(s)G(s)$$



Função de Transferência

$$W(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$$

$$W(s) = \frac{\text{Saída}}{\text{Entrada}}$$

Exemplo

$$x' + ax = e^{i\omega t}$$

Solução da particular

$$x(t) = Ae^{i\omega t}$$

Exemplo

$$x' + ax = e^{i\omega t}$$

Solução da particular

$$x(t) = Ae^{i\omega t}$$

Transformando

$$Ai\omega\mathcal{L}(e^{i\omega t}) + aA\mathcal{L}(e^{i\omega t}) = \mathcal{L}(e^{i\omega t})$$

Exemplo

$$A = \frac{1}{a + i\omega}$$

$$X(s) = AF(s)$$

$$X(s) = W(s)F(s)$$



Exemplo

$$A = W(i\omega)$$

Amplitude é a transferencia calculada na freq