Impedância

Tiago Pereira

1 de Maio de 2020

Relação entre voltagem a tensão de componentes seguem leis distintas no domínio temporal, a relação linear ocorre apenas na Lei do Ohm, como vemos abaixo

Componente	Lei
Resistor	$v(t) = Ri(t)$
Capacitor	$v(t) = \dfrac{q(t)}{C}$
Indutor	$L\dfrac{di(t)}{dt} = v(t)$

Isso se modifica quando olhamos para essas leis do domínio s. Surpreendentemente, no domínio s a tensão e corrente obedecem algo parecido com a lei de Ohm.

Notação Para evitar confusão com a corrente i vamos utilizar $j = \sqrt{-1}$

Resistor: Transformando a Lei de Ohm por Laplace obtemos

$$V(s) = RI(s)$$

Capacitor: Para obter a relação entre voltagem e corrente para o capacitor lembramos que

$$q(t) = \int_0^t i(\tau)d\tau \quad \text{por convolução} \quad \mathcal{L}(q) = \mathcal{L}(1 * i) = \frac{1}{s}I(s)$$

Isso implica que para o capacitor

$$V(s) = \frac{1}{sC}I(s)$$

Indutor: Finalmente para o indutor (tomamos $i(0) = 0$) temos

$$V(s) = LsI(s)$$

Portanto no domínio s todas as Lei de tensão V e corrente I são lineares

Componente	Lei no domínio s
Resistor	$V(s) = RI(s)$
Capacitor	$V(s) = \frac{1}{sC} I(s)$
Indutor	$V(s) = (Ls)\, I(s)$

O termo de proporcionalidade Z é chamado de impedância.

$$V(s) = \underbrace{Z(s)}_{\text{Impedancia}} I(s)$$

Ele é um numero complexo. Se pensarmos que a entrada do componente é a corrente e a saída da tensão podemos interpretar $Z(s)$ como uma função de transferencia. Uma outra relação importante é

$$I(s) = \underbrace{Y(s)}_{\text{Admitancia}} V(s)$$

onde $Y = 1/Z$ é chamada de admitância. Nota que Z é uma função de s. Para entender melhor o comportamento de Z vamos focar em oscilações harmônicas.

Impedância para ondas harmônicas

Vamos considerar

$$v = v_0 \cos \omega t.$$

Passados os efeitos transitórios a corrente oscila harmonicamente como

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t - \phi).$$

A amplitude i_0 e a fase ϕ são determinadas pela tensão e pela natureza do componente. Como discutimos nas outras aulas é mais interessante (e fácil) trabalhar com a tensão e a corrente como partes reais de quantidades complexas

$$\hat{v} = v_0 e^{j\omega t} \text{ e } \hat{i} = i_0 e^{-j\phi} e^{i\omega t},$$

Usamos a notação de chapéu para indicar uma quantidade que é um número complexo. A impedância Z é definida como a razão das amplitudes complexas

$$Z = \frac{v_0}{i_0 e^{-j\phi}}$$

Como Z é quase sempre complexo, não usaremos chapéu nele. A impedância é mais diretamente interpretada quando escrita na forma polar,

$$Z = |Z|e^{j\phi}.$$

A magnitude

$$|Z| = \frac{v_0}{i_0}$$

é chamado de reatância e determina a amplitude da corrente. A fase ϕ de Z codifica a relação de fase entre a tensão $v_0 \cos \omega t$ e a corrente $i_0 \cos(\omega t - \phi)$.

Indutor: Substituindo $\hat{v} = v_0 e^{j\omega t}$ na tensão temos que a impedância de um indutor é

$$Z_L = j\omega L = \omega L e^{j\pi/2}$$

A dependência de Z_L na frequência decorre do fato de que a tensão é proporcional à derivada da corrente. Em frequências altas a impedância de um indutor é maior, portanto, para uma determinada corrente, a tensão é maior. Isso reflete o fato que o fluxo magnético através do indutor muda mais rapidamente, logo a fem induzida é maior.

O fato de Z_L ser puramente imaginário reflete o fato de que a corrente está $\pi/2$ fora de fase com a tensão. A tensão é proporcional à derivada da corrente, portanto, se a tensão oscila como $\cos \omega t$, a corrente deve oscilar como $\sin \omega t = \cos(\omega t - \pi/2)$.

Capacitor: Substituindo a tensão e corrente temos que a impedância é dada por

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}e^{-j\pi/2}$$

Como a tensão é proporcional a integral da corrente, em frequências altas, a impedância de um capacitor é menor. Isso reflete o fato de que a corrente reverte mais rapidamente, portanto o capacitor tem menos tempo para encher com a carga.

Combinando impedâncias

A beleza do método de impedância complexa é que as impedâncias são adicionadas em série e em paralelo exatamente como as resistências. No caso de série,

$$Z = Z_1 + Z_2$$

e no caso paralelo

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

Portanto qualquer circuito pode ser reduzido a um único elemento de circuito equivalente.

Potência dissipada por um componente

Pela lei de Joule a potência dissipada (em calor) é

$$P = vi$$

Em tensão alternada o sinal desse trabalho oscilante. Se o sinal tem período T então o que é relevante é a potência média

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$$

Vamos ver como a potência média depende da impedância e da tensão. Para calcular essa média, não podemos usar as quantidades complexas $\hat{V}$ e $\hat{I}$, pois o produto $\hat{V}\hat{I}$ não é linear. Primeiro precisamos extrair as partes reais, depois multiplicar e calcular a média do tempo. A corrente real é dada por

$$i(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{v_0}{Z}e^{j\omega t}\right) = \frac{v_0}{|Z|}\cos(\omega t - \phi)$$

onde ϕ é a fase de Z. Como

$$\langle \cos\omega t \cos(\omega t - \phi)\rangle = \frac{1}{2}\cos\phi$$

a média é

$$\langle P \rangle = \frac{v_0^2}{2}\frac{1}{|Z|}\cos\phi \qquad (1)$$

Para uma capacitância pura ou indutância pura, Z é puramente imaginário, então $\phi = \pm\pi/2$, então a potência média é zero. Isso significa que nenhuma energia é dissipada nesses elementos do circuito. Eles armazenam energia, mas não a dissipam. Para uma resistência pura, Z = R é real, então $\phi = 0$, então a potência média é

$$\langle P \rangle = \frac{v_0^2}{2R}$$

0.1 Um Exemplo

Vamos consider um resistor e um indutor ligados em paralelo a uma fonte de tensão com oscilações harmonicas de frequência ω Como as impedâncias se combinam como resistências temos que a impedância equivalente é

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}$$

Portanto a admitância é

$$Y = \frac{1}{R} - \frac{j}{\omega L}$$

Lembrando que se $Z = |Z|e^{j\phi}$ então

$$Y = \frac{1}{|Z|}e^{-j\phi} = \frac{1}{|Z|}\cos\phi - j\frac{1}{|Z|}\sin\phi$$

Utilizando a formula para a potência

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{v_0^2}{2}\frac{1}{|Z|}\cos\phi && (2) \\ &= \frac{v_0^2}{2}|Y|\cos\phi && (3) \\ &= \frac{v_0^2}{2}\mathrm{Re}Y && (4) \end{aligned}$$

Como a parte real de $\mathrm{Re}Y = 1/R$ temos

$$\langle P \rangle = \frac{v_0^2}{2R}$$

E o indutor não contribui para dissipação!