Impulso e Função de Heaviside

Tiago Pereira

24 de Abril de 2020

Para isso vamos primeiro estudar a resposta da EDO a um impulso $\delta(t)$. Para motivar a "função"impulso $\delta(t)$ vamos relembrar que na Física o impulso é

$$J = \int_a^b F dt$$

onde F é uma força. Aqui a ideia é que F acontece apenas uma fração de segundos. Isso significa que se a forca aconteceu no intervalo (a, b) então

$$J = \int_a^b F dt$$

mas se foi executada fora do intervalo de tempo (a, b) então o impulso resultando é zero

$$0 = \int_a^b F dt \quad \text{se a Forca não ocorreu em} \quad (a, b)$$

O impulso δ abstrai essa ideia. Vamos falar que δ tem a mesma propriedade

$$\int_a^b \delta(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in [a, b] \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \tag{1}$$

Propriedades do impulso δ. A propriedade importante para é que para toda função continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

Isso implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - s) f(s) ds = f(t)$$

De fato, vamos tomar $\tau = t - s$ portanto $d\tau = -ds$ e $s = t - \tau$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-s) f(s) ds &= \int_{\tau(0)}^{\tau(t)} \delta(\tau) f(t-\tau)(-d\tau) \\
&= -\int_{\infty}^{-\infty} \delta(\tau) f(t-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) f(t-\tau) d\tau \\
&= f(t)
\end{aligned}$$

onde a última propriedade segue da primeira.
A propriedade acima nos permite calcular a transformada de Laplace do impulso facilmente

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

Função da Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Essa função é descontínua e portanto não tem derivada “clássica”em $\mathbb{R}$. Essa função modela o fechamento de uma chave em um circuito. Onde antes do tempo zero não passa corrente no circuito e após disso a fonte a ligada ao circuito.

Vamos notar que

$$\mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{s}$$

Primeiro vamos notar

$$\frac{du}{dt} \text{ não tem sentido no calculo clássico}$$

Vamos ignorar isso por uns instantes e calcular

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u'(t)) &= sU(s) - u(0) \\
&= 1 \\
&= \mathcal{L}(\delta(t))
\end{aligned}$$

Portanto sempre que pensamos em transformada de Laplace temos a relação

$$u'(t) = \delta(t)$$

Note agora que

$$u(t-c) \quad \text{é a função } u(t) \text{ transladada para o ponto } c$$

E portanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u(t-c)) &= \int_0^\infty e^{-st}u(t-c)dt && (2)\\
&= \underbrace{\int_0^c e^{-st}u(t-c)dt}_{u=0} + \underbrace{\int_c^\infty e^{-st}u(t-c)dt}_{u=1} && (3)\\
&= \int_c^\infty e^{-st}dt && (4)\\
&= \frac{e^{-sc}}{s} && (5)
\end{aligned}$$

onde a última igualdade pode ser obtida substituindo $u = t - c$ na integral.
Pulso quadrado: Tambem podemos utilizar u para gerar diversos pulsos importantes tal como

$$q(t) = u(t-1) - u(t-2)$$

é um pulso quadrado valendo 1 se $1 < t \leq 2$ e zero caso contrário.

Note também que dada uma função f então

$$g(t) = u(t-c)f(t-c)$$

é a função f transladada de c para direita tal que g é nula para todo $t < c$. Curiosamente temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u(t-c)f(t-c)) &= \int_0^\infty e^{-st}u(t-c)f(t-c)dt && (6)\\
&= \int_c^\infty e^{-st}f(t-c)dt && (7)
\end{aligned}$$

isso porque $u(t-c)$ é nula para $t < c$. Introduzindo $\tau = t - c$ e fazendo a mudança de variáveis na integral obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u(t-c)f(t-c)) &= \int_0^\infty e^{-s(\tau+c)}f(\tau)d\tau && (8)\\
&= e^{-sc}\int_0^\infty e^{-s\tau}u(\tau)f(\tau)d\tau && (9)\\
&= e^{-sc}F(s) && (10)
\end{aligned}$$

Exemplo 1: Se

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s+2} \quad \Rightarrow \quad c = 1 \;\text{ e }\; F(s) = 1/(s-2)$$

Isso implica que

$$g(t) = u(t-1)e^{-2(t-1)}$$

tal que $\mathcal{L}(g(t)) = G(s)$. Em geral se

$$G(s) = \frac{e^{-sc}}{s+a} \qquad \Rightarrow \qquad g(t) = u(t-c)e^{-a(t-c)}$$

Exemplo 2: Considere a EDO

$$x' + x = q(t)$$

com condição initial $x_0 = 0$ e com q o pulso quadrado. Vamos determinar a solução. Primeiro transformamos por Laplace

$$(s+1)X(s) = Q(s) \qquad \Rightarrow \qquad X(s) = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s(s+1)}$$

Relembrando que

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

Temos que

$$X(s) = \underbrace{\frac{e^{-s}}{s}}_{u(t-1)} - \underbrace{\frac{e^{-2s}}{s}}_{u(t-2)} - \underbrace{\frac{e^{-s}}{s+1}}_{u(t-1)e^{-(t-1)}} + \underbrace{\frac{e^{-2s}}{s+1}}_{u(t-2)e^{-(t-2)}}$$

Portanto

$$x(t) = u(t-1)\left(1 - e^{-(t-1)}\right) + u(t-2)\left(1 - e^{-(t-2)}\right)$$