Lista 1 - Funções de Variáveis Complexas

Exercício 1 Reduza à forma $a+ib$ cada uma das expressões abaixo.

a) $(3+5i)+(-2+i)$ b) $(\sqrt{3}-2i)-i[2-i(\sqrt{3}+4)]$ c) $(3-5i)(-2-4i)$ d) $(2+3i)^2$

e) $\dfrac{1}{2+3i}$ f) $\dfrac{3-i}{2i-1}$ g) $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}-i}$

Exercício 2 Calcule o valor de:

a) i^{99} b) i^{402} c) i^{372} d) i^{217} e) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{30}$ f) $\dfrac{i^7-i^{10}}{i^{13}-i^{19}}$ g) $i^{23}+i^{24}+i^{25}+...+i^{262}$

Exercício 3 Sabendo-se que a soma $i^{10}+i^{11}+...+i^n$ é nula e que $n>200$, determine o menor valor possível de n $(n \in \mathbb{N})$.

Exercício 4 Sendo $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, calcule $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{60} z^n\right|$.

Exercício 5 Considere os números complexos $z_1=1+5i$, $z_2=4-7i$ e $z_3=-2i+7i^2$.

a) Represente graficamente z_1, z_2, z_3, z_1-z_3, z_1z_2.

b) Calcule $\overline{z}_1$, $\overline{z_1z_3}$, $\overline{\left(\dfrac{z_2}{z_3}\right)}$, $|z_1|$, $|z_1z_2z_3|$, $\overline{z}_2$.

c) $\mathrm{Re}(z_1z_2)+\mathrm{Im}(z_1z_3)$.

Exercício 6 Sejam x e y números reais tais que

$$\begin{cases} x^3-3xy^2=1 \\ 3x^2y-y^3=1. \end{cases}$$

Determine z^3 e $|z|$ onde $z=x+iy$.

Exercício 7 Dois números complexos são ortogonais se suas representações gráficas forem perpendiculares entre si. Prove que dois números complexos z_1 e z_2 são ortogonais se e somente se $z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2=0$.

Exercício 8 Sejam a e k constantes reais, sendo $a>0$ e $0<k<1$. De todos os números complexos z que satisfazem a relação $|z-ai|\leq ak$, qual é o de menor argumento?

Exercício 9 Dados dois pontos do plano complexo, $z_1=2+3i$ e $z_2=4+5i$ determine e esboce o lugar geométrico dos pontos do plano complexo que satisfazem à relação:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)=0 \quad \text{com} \quad z\neq z_2.$$

Exercício 10 Escreva na forma trigonométrica:

a) $z=1+\sqrt{3}i$ b) $z=2i$ c) $z=4$ d) $z=5-5i$ e) $z=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$ f) $z=\dfrac{-4}{\sqrt{3}-i}$

g) z_1z_2, $\dfrac{z_1}{z_2}$ onde $z_1=\sqrt{3}+3i$ e $z_2=\dfrac{3-i\sqrt{3}}{2}$

h) z_1z_2, $\dfrac{z_1}{z_2}$ onde $z_1=1-i$ e $z_2=-1+i\sqrt{3}$

Exercício 11 Calcule a) $(1+i)^{10}$ b) $(-\sqrt{3}+i)^5$ c) w^8 onde $w=\sqrt{2}(\cos 15^o+i\,\mathrm{sen}\,15^o)$.

Exercício 12 Seja z um número complexo de módulo 1 e argumento θ. Calcule $z^n+\dfrac{1}{z^n}$ sabendo que n é um número inteiro positivo.

Exercício 13 Determine a parte imaginária de $(1+\cos(2x)+i\,\text{sen}(2x))^k$, onde k é um inteiro positivo e x é real.

Exercício 14 Seja z um número complexo de módulo unitário que satisfaz à condição $z^{2n} \neq -1$, onde n é um número inteiro positivo. Demonstre que $\dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$ é um número real.

Exercício 15 Prove que $\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\,\text{sen}^2(\theta)$.

Exercício 16 Calcule as raízes dos números complexos:
a) $\sqrt[3]{-1}$ b) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$ c) $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$ d) $\sqrt[6]{-64}$

Exercício 17 Resolva a equação $z^5 = \overline{z}$.

Exercício 18 Mostre que todas as raízes da equação $(z+4)^5 + z^5 = 0$ pertencem a uma mesma reta paralela ao eixo imaginário.

Exercício 19 Considere, no plano complexo, um polígono regular cujos vértices são as soluções da equação $z^6 = 1$. Determine a área deste polígono, em unidades de área.

Exercício 20 Determine as raízes de $z^2 + 2iz + 2 - 4i = 0$ e localize-as no plano complexo.

Exercício 21 Resolva a equação $z^2 = \overline{2+z}$ no conjunto dos números complexos.

Exercício 22 Sendo a, b e c números naturais em progressão aritmética e z um número complexo de módulo unitário, determine um valor para cada um dos números a, b, c e z de forma que eles satisfaçam a igualdade:

$$\frac{1}{z^a} + \frac{1}{z^b} + \frac{1}{z^c} = z^9.$$

Gabarito

Exercício 1 a) $1+6i$ b) $-4-4i$ c) $-26-2i$ d) $-5+12i$ e) $\dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}i$ f) $-1-i$
g) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{3} + \dfrac{1-\sqrt{2}}{3}i$

Exercício 2 a) $-i$ b) -1 c) 1 d) i e) -1 f) $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ g) 0

Exercício 3 $n = 201$

Exercício 4 $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

Exercício 5 b) $\overline{z}_1 = 1-5i$, $\overline{z_1 z_3} = 3+37i$, $\overline{\left(\dfrac{z_2}{z_3}\right)} = -\dfrac{14}{53} - \dfrac{57}{53}i$, $|z_1| = \sqrt{26}$, $|z_1 z_2 z_3| = \sqrt{26}\sqrt{53}\sqrt{65}$
$\overline{z}_2 = 4+7i$.
c) 2

Exercício 6 $z^3 = 1+i$ e $|z| = \sqrt[6]{2}$.

Exercício 7 Dica: Seja θ_1 o argumento de z_1 e θ_2 o argumento de z_2. Então z_1 é perpendicular a z_2 se $tg(\theta_1)tg(\theta_2) = -1$.

Exercício 8 $z = ak\sqrt{1-k^2} + ia(1-k^2)$

Exercício 9 O lugar geométrico é uma circunferência no plano complexo de centro no ponto $z_0 = 3+4i$ e raio igual a $\sqrt{2}$, excluindo-se do lugar geométrico o ponto z_2.

Exercício 10 a) $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ b) $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

c) $z = 4\left(\cos(0) + i\,\text{sen}(0)\right)$ d) $z = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$

e) $z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ f) $z = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

g) $z_1 z_2 = 6\left(\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{13\pi}{6}\right)\right)$ e $\frac{z_1}{z_2} = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$

h) $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{29\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{29\pi}{12}\right)\right)$ e $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)$

Exercício 11 a) $32i$ b) $16\sqrt{3} + 16i$ c) $-8 + 8\sqrt{3}i$

Exercício 12 $2\cos(n\theta)$

Exercício 13 $2^k\,\text{sen}(kx)\cos^k(x)$

Exercício 14 $\frac{z^n}{1 + z^{2n}} = \frac{1}{2\cos(n\theta)} \in \mathbb{R}$.

Exercício 15 Use a identidade $(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\,\text{sen}(3\theta)$.

Exercício 16 a) $z_1 = -1$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ e $z_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

c) $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}$, $z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}$, $z_3 = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt[4]{8}}$ e $z_4 = \frac{-\sqrt{3} - i}{\sqrt[4]{8}}$

d) $z_1 = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $z_3 = 2\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $z_4 = 2\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$, $z_5 = 2\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ e $z_6 = 2\,\text{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$, onde $\text{cis}(\theta) = \cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)$.

Exercício 17 $z = 0$ ou $z = \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{k\pi}{3}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 18 Mostre que $z_k = -\frac{1}{2} + i\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right) - 2}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Exercício 19 Área $= \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Exercício 20 $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = -1 - 3i$.

Exercício 21 $z_1 = 2$ e $z_2 = -1$.

Exercício 22 $a = 6$, $b = 11$, $c = 16$ e $z = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right)$ é uma solução possível.

$a = 3$, $b = 7$, $c = 11$ e $z = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)$ é uma solução possível.