Lista 2 - Funções de Variáveis Complexas

Exercício 1 Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

a) Mostre que $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.

b) Supondo $|z_2| > |z_3|$, mostre que $\left|\dfrac{z_1}{z_2 + z_3}\right| \leq \dfrac{|z_1|}{|z_2| - |z_3|}$

Exercício 2 Represente graficamente os conjuntos dados abaixo e classifique-os em aberto, fechado, limitado.

a) $\mathrm{Re}(z) < -3$ b) $\mathrm{Im}(z) \geq 1$ c) $|z - 2i| > 2$ d) $|z + 1| \leq 2$ e) $|z - 1 + i| < 3$

f) $z \neq 0,\ \ 0 \leq \arg(z) < \dfrac{\pi}{3}$ g) $|z| > 2,\ \ |\arg(z)| < \pi$ h) $1 < |z + 1 - 2i| \leq 2$

i) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) < \dfrac{1}{4}$

Exercício 3 Determine o domínio máximo de definição das funções dadas a seguir:

a) $f(z) = \dfrac{z}{(z - i)\,\mathrm{sen}(y)}$ b) $f(z) = \dfrac{z}{x} - \dfrac{y}{z}$ c) $f(z) = \dfrac{z^2 + (z-1)^3}{(e^z - 1)\cos(y)}$

Exercício 4 Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{z \to -3i}(z^2 - 5z)$ b) $\lim\limits_{z \to 2i}(2x + y^2)$ c) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{4z + i}{z + 1}$ d) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^4 - 1}{z - i}$

Exercício 5 Use a definição de limite para provar que:

a) $\lim\limits_{z \to z_0}(az + b) = az_0 + b$, como $a, b \in \mathbb{C}$.

b) $\lim\limits_{z \to \alpha} \dfrac{1}{z - \alpha} = \infty$, onde $\alpha \in \mathbb{C}$.

c) $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{3}{z - i} = 0$.

Exercício 6 Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $f(z) = 1 - z^2 + 4iz^5$ b) $f(z) = (z^2 - i)^3(iz + 1)^2$ c) $f(z) = \dfrac{z - 3i}{z + 3i}$

Exercício 7 Mostre que o produto de duas funções analíticas f e g é uma função analítica, com derivada $(fg)' = f'g + fg'$.

Exercício 8 Seja $f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3y(y - ix)}{x^6 + y^2} & \text{se} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad z = 0 \end{cases}$. Mostre que $\dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0} \to 0$ para $z \to 0$ ao longo de qualquer reta passando pela origem, mas que $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0}$ não existe.

Exercício 9 Use as equações de Cauchy-Riemann para verificar, no caso de cada uma das funções abaixo, qual é analítica e em que domínio. Em caso positivo, calcule a derivada de $f'(z)$. Existe alguma função inteira?

a) $f(z) = z^3$ b) $f(z) = \overline{e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)}$ c) $f(z) = \overline{z}$ d) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

e) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i\,\mathrm{sen}\,x)$ f) $f(z) = (e^y + e^{-y})\,\mathrm{sen}(x) + i(e^y - e^{-y})\cos(x)$

g) $f(z) = e^y(\cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x))$

Exercício 10 Seja $f(z)$ uma função inteira. Mostre que a função $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ também é inteira. Mostre que $h(z) = \overline{f(z)}$ é derivável em 0 se, e somente se, $f'(0) = 0$.

Exercício 11 Mostre que a função $f(z) = x^2 + iy^3$ não é analítica em nenhum ponto.

Exercício 12 a) Mostre que $u(x,y) = e^{-x}(x\,\mathrm{sen}(y) - y\cos(y))$ é harmônica.

b) Determinar v de tal modo que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ seja analítica.

Exercício 13 Considere as funções $f, g\colon (0,1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definidas por $f(x) = x$ e $g(x) = x + x^2 e^{i/x^2}$. Mostre que a regra de L'Hospital não vale para funções a valores complexos mostrando que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \quad \text{mas} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

Exercício 14 Considere agora as funções $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por $f(z) = z$ e

$$g(z) = \begin{cases} z + z^2 e^{i/z^2}, & \text{se } z \neq 0 \\ 0, & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

O que pode ser dito sobre regra de L'Hospital neste caso? Mais especificamente, o que acontece com $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{g(z)}$ e $\lim_{z\to 0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$?

Exercício 15 Demonstre um caso particular a regra de L'Hospital para funções analíticas: se $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$, entáo

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Na verdade vale: Se $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots f^{(k-1)}(z_0) = 0$, $g(z_0) = g'(z_0) = \cdots g^{(k-1)}(z_0) = 0$, e $g^{(k)}(z_0) \neq 0$, então

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}.$$

Gabarito

Exercício 2 a) aberto e ilimitado.

b) fechado e ilimitado.

c) aberto e ilimitado.

d) fechado e limitado.

e) aberto e limitado.

f) não é aberto, não é fechado e é ilimitado.

g) aberto e ilimitado.

h) não é aberto, não é fechado e é limitado.

i) aberto e ilimitado.

Exercício 3 a) $D_f = \{z \in \mathbb{C} : z \neq i \text{ e } \mathrm{Im}(z) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

b) $D_f = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \text{ e } \mathrm{Re}(z) \neq 0\}$.

c) $D_f = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 2k\pi i, k \in \mathbb{Z} \text{ e } \mathrm{Im}(z) \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z}\}$.

Exercício 4 a) $-9 + 15i$ b) 4 c) $\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{2}i$ d) $-4i$

Exercício 6 a) $f'(z) = -2z + 20iz^4$

b) $f'(z) = 2(z^2 - i)^2(iz+1)[3z(iz+1) + i(z^2 - i)]$

c) $f'(z) = \dfrac{6i}{(z+3i)^2}$

Exercício 9 a) O domínio de f é $\mathbb{C}$, f é inteira e $f'(z) = 3z^2$.

b) f não é analítica.

c) f não é analítica.

d) f é analítica em $\mathbb{C}^*$ e $f'(z) = -\dfrac{1}{z^2}$ para $z \in \mathbb{C}^*$.

e) O domínio de f é $\mathbb{C}$, f é inteira e $f'(z) = if(z)$.

f) O domínio de f é $\mathbb{C}$, f é inteira e $f'(z) = -i[(e^y - e^{-y})\operatorname{sen}(x) + i(e^y + e^{-y})\cos(x)]$

g) f não é analítica.

Exercício 12 b) $v = e^{-x}(y\operatorname{sen}(y) + x\operatorname{sen}(y)) + k$, com k constante.