Lista 3 - Funções de Variáveis Complexas

Exercício 1 Mostre as seguintes propriedades:

a) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$, $z \in \mathbb{C}$.

b) $\overline{cos(z)} = \cos(\overline{z})$ e $\overline{\operatorname{sen}(z)} = \operatorname{sen}(\overline{z})$, $z \in \mathbb{C}$.

c) $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \left(\dfrac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2$, $z = x + iy$.

d) $|\operatorname{sen} z|^2 + |\cos z|^2 = 1$ se e somente se z é real.

e) $\operatorname{sen}(2z) = 2\operatorname{sen}(z)\cos(z)$ e $\cos(2z) = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$, $z \in \mathbb{C}$.

Exercício 2 Calcule a derivada:
a) $f(z) = \dfrac{\cos(3z^5+2)}{z^3+z^2-e^z}$ b) $f(z) = \dfrac{1}{e^{\cos(2z)-\sec(3z)}}$ c) $f(z) = \tan(4z) - \cot(e^{4z}) + \operatorname{Log}(\cos(4z))$.

Exercício 3 Para quais valores de z vale a igualdade $e^{i\overline{z}} = \overline{e^{i\overline{z}}}$?

Exercício 4 Em quais pontos a função $f(z) = e^{\overline{z}}$ é derivável?

Exercício 5 Calcule:
a) $\operatorname{Re}(e^{iz^2})$ b) $\operatorname{Im}(e^{i\operatorname{sen}(z)})$

Exercício 6 Resolva as equações:

a) $e^z = -2$ b) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$ c) $\operatorname{sen}(2z) = 4$ d) $\sec(5z) = 7$.

Exercício 7 Calcule:
a) i^i b) $(1+i)^i$ c) $(-1)^{\frac{1}{\pi}}$

Exercício 8 Calcule:
a) $\log(1)$ b) $\log(i^{\frac{1}{2}})$ c) $\operatorname{Log}(-ei)$ d) $\operatorname{Log}(1-i)$ e) $\log(-1+i\sqrt{3})$.

Exercício 9 Ache todas as raízes da equação $\operatorname{Log}(z) = \dfrac{\pi i}{2}$.

Exercício 10 O chamado paradoxo de Bernoulli é o seguinte:

$$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow 2\log(-z) = 2\log(z) \Rightarrow \log(-z) = \log(z).$$

Aonde está o erro?

Gabarito

Exercício 2 a) $f'(z) = \dfrac{-15z^4(z^3+z^2-e^z)\operatorname{sen}(3z^5+2) - (3z^2+z-e^z)\cos(3z^5+2)}{(z^3+z^2-e^z)^2}$.
b) $f'(z) = e^{\sec(3z)-\cos(2z)}(3\sec(3z)\tan(3z) + 2\operatorname{sen}(2z))$.
c) $f'(z) = 4\sec^2(4z) + 4e^{4z}\csc^2(e^{4z}) - 4\tan(4z)$.

Exercício 3 Para qualquer $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 4 Não é derivável em nenhum ponto.

Exercício 5 a) $e^{-2xy}\cos(x^2-y^2)$ b) $e^{i\,\mathrm{sen}(iy)\cos(x)}\,\mathrm{sen}(\cos(iy)\,\mathrm{sen}(x))$.

Exercício 6 a) $z=\ln 2+i(\pi+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

b) $z=\ln 2+i\left(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

c) $z=\dfrac{\pi}{4}+k\pi+\dfrac{i}{2}\ln(4+\sqrt{15})$, $k\in\mathbb{Z}$, ou, $z=\dfrac{\pi}{4}+k\pi+\dfrac{i}{2}\ln(4-\sqrt{15})$, $k\in\mathbb{Z}$.

Exercício 7 a) $e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$ b) $e^{-\frac{\pi}{4}-2k\pi}e^{\frac{i\ln 2}{2}}$, $k\in\mathbb{Z}$ c) $e^{(2k-1)i}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Exercício 8 a) $2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$ b) $\dfrac{\pi}{4}i+k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$ c) $1-\dfrac{\pi}{2}i$ d) $\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{\pi}{4}i$

e) $\ln 2+i\left(\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Exercício 9 $z=i$