Lista 5 - Funções de Variáveis Complexas

Exercício 1 Se C é o círculo $|z| = 3$ descrito no sentido positivo e se

$$g(z_0) = \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - z_0}dz, \quad \text{quando} \quad |z_0| \neq 3,$$

mostre que $g(2) = 8\pi i$. Qual é o valor de $g(z_0)$ quando $|z_0| > 3$?

Exercício 2 Seja C um caminho fechado orientado no sentido positivo e seja

$$g(z_0) = \int_C \frac{z^3 + 2z}{(z - z_0)^3}dz.$$

Mostre que $g(z_0) = 6\pi i z_0$ quando z_0 está no interior de C, e $g(z_0) = 0$ quando z_0 está no exterior de C.

Exercício 3 Seja C a fronteira do quadrado, cujos lados estão sobre as retas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$, orientada no sentido positivo. Dê o valor de cada uma das integrais:

a) $\displaystyle\int_C \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi i}{2}}dz$ b) $\displaystyle\int_C \frac{\cos(z)}{z(z^2+8)}dz$ c) $\displaystyle\int_C \frac{z}{2z+1}dz$ d) $\displaystyle\int_C \frac{\tan(z/2)}{(z - x_0)^2}dz$, onde $|x_0| < 2$.

Exercício 4 Dê o valor da integral de $g(z)$ ao longo do caminho fechado $|z - i| = 2$ no sentido positivo quando: a) $g(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$ b) $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}$.

Exercício 5 Calcule as integrais.

a) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z^2 - 4}dz$

b) $\displaystyle\oint_C \frac{ze^z}{(z^2 - 2z - 3)^3}dz$, onde C é o losango de vértices ± 2 e $\pm i$.

c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\log(z^2+2)}{(3z-2)^2}dz$.

Exercício 6 Sendo f analítica no interior e sobre um caminho fechado orientado C, mostre que

$$\int_C \frac{f'(z)}{z - z_0}dz = \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}dz$$

onde z_0 é um ponto não pertencente a C.

Exercício 7 Mostre que $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{kz}}{z}dz = 2\pi i$, onde k é uma constante real e $\gamma(t) = e^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$. Use esse resultado para mostrar que

$$\int_0^\pi e^{k\cos(t)} \cos(k \operatorname{sen}(t))dt = \pi.$$

Exercício 8 (Princípio do Módulo Mínimo) Seja f analítica numa região limitada R e contínua no fecho $\overline{R}$. Suponha que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{R}$, e que f não seja constante em R. Mostre que $|f(z)|$ assume seu valor mínimo na fronteira de R.

Exercício 9 Seja $f(z) = (z+1)^2$ e D o interior do triângulo com vértices em $z = 0$, $z = 2$ e $z = i$. Encontre os valores de máximo e mínimo de $|f(z)|$ em $\overline{D}$.

Exercício 10 Mostre que a função u é harmônica em todo plano. Determine a função harmônica conjugada e a função $f = u + iv$ em cada caso:

a) $u(x, y) = x - 4xy$ b) $u(x, y) = \operatorname{sen}(x) \cosh(y)$ c) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

Obs.: $\cosh(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ $\operatorname{senh}(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$.

Exercício 11 Determine o valor máximo da função $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ no disco $|z| \leq 1$.

Exercício 12 A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = e^{-\cos(z)} \operatorname{sen}(z)$ é limitada? Explique sua resposta.

Exercício 13 A função de uma variável real definida por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ é analítica em toda a reta $\mathbb{R}$ e limitada para todo x. Mas evidentemente, não é constante. Isto não contradiz o teorema de Liouville? Explique.

Gabarito

Exercício 1 zero

Exercício 3 a) 2π b) $\pi i/4$ c) $-\pi i/2$ d) $i\pi \sec^2(x_0/2)$

Exercício 4 a) $\pi/2$ b) $\pi/16$

Exercício 5 a) $i\pi e^2/2$ b) $\pi i f''(-1)$ onde $f(z) = \dfrac{ze^z}{(z+1)^3}$ c) $12\pi i/99$

Exercício 9 Os valores de máximo e mínimo ocorrem para $z = 2$ e $z = 0$.

Exercício 10 a) $v(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + y + c$ e $f(z) = z + 2iz^2 + k$.

b) $v(x, y) = \cos(x) \operatorname{senh}(y) + c$, $f(z) = \operatorname{sen}(z) + k$.

c) $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + c$, $f(z) = z^3 + k$.

Exercício 11 O valor máximo é 1.