Lista 6 - Funções de Variáveis Complexas

Exercício 1 Calcule os limites:

a) $\lim_{n\to+\infty}\left[i+\left(\frac{2+3i}{5}\right)^n\right]$ b) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{ni}$ c) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[ni]{n}$

Exercício 2 Verifique se as séries converge ou diverge:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{ni}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{n^5}+i\frac{\ln(n)}{n^3}\right)$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+i}$ d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos(n)}{n^p}+\frac{1}{n^2\,\mathrm{Log}(ni)}\right)$ $(p\in\mathbb{N})$

Exercício 3 Mostre que as séries convergem uniformemente nos domínios indicados em cada caso.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2\,\mathrm{sen}(5n)}{2+4n^2}z^n$, em qualquer disco $|z|\leq r<1$.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+7\sqrt{n+1}}{(n+1)2^n}z^{2n-1}$, em qualquer disco $|z|\leq r<\sqrt{2}$.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{n!}z^n$, em qualquer disco $|z|<R$, qualquer que seja a constante a.

d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}(z-1)^n$, em qualquer disco $|z-1|\leq r<1$.

e) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cos(n)}{n^3+1}z^{2n}$, em qualquer disco $|z|\leq R<1$.

Exercício 4 Suponha que a sequência de números complexos $\{a_n\}$ seja convergente. Prove que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n z^n$ converge uniformemente em qualquer disco $|z|\leq r<1$.

Exercício 5 $\star\star\star$ Prove que a sequência $f_n(z)=nze^{-n^2z^2}$ tende a zero para todo z no setor circular $r\geq 0$ e $|\theta|<\frac{\pi}{4}$, mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer domínio do tipo $r\geq c>0$ e $|\theta|<\frac{\pi}{4}-\delta$, onde $0<\delta<\frac{\pi}{4}$.

Gabarito

Exercício 1 a) i b) 1 c) 1

Exercício 2 a) diverge b) converge c) diverge d) se $p=0,1$ a série diverge, e se $p\geq 2$ a série converge

Exercício 3 a) $M_n=r^n$ b) $M_n=\frac{8}{r}\left(\frac{r^2}{2}\right)^n$ c) $M_n=\frac{(|a|R)^n}{n!}$ d) $M_n=r^n$ e) $M_n=R^{2n}$