Equações Diferenciais Ordinárias

O que é uma EDO?

Prof Tiago Pereira

1. Determine a ordem das equações. Indique se elas são homogêneas, lineares ou não-lineares:

   a) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ Linear homogênea de 2^o ordem

   b) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \sin(t+x) = \sin x$ Não linear e não homogênea de 2^o ordem

   c) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \cos^2 x\dfrac{dy}{dx} = e^x$ Linear não homogênea de 3^o ordem

   d) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \dfrac{dy}{dx} = t^3$ Não linear não homogênea de 2^o ordem

2. Verifique se as funções propostas são soluções das EDO's apresentadas.

   a) $y'' - y = 0$

   Possíveis soluções: $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = ke^x$

Note que

$$y_1'(x) = -e^{-x} \quad \text{e} \quad y_1''(x) = y_1(x)$$

Portanto y_1 resolve a EDO. Para a outra função candidata

$$y_2'(x) = ke^x \quad \text{e} \quad y_2''(x) = y_2(x)$$

logo y_2 também resolve a EDO.

   b) $y'' - y = x$

   Possíveis soluções: $y_1(x) = ax + e^{-x}$, $y_2(x) = k(x + e^{-x})$

Note que

$$y_1'(x) = a + -e^{-x} \quad \text{e} \quad y_1''(x) = e^{-x}$$

Adicionando e subtraindo o termo ax obtemos

$$y_1''(x) = -ax + \underbrace{ax + e^{-x}}_{y_1} \Rightarrow y_1''(x) - y_1(x) = -ax$$

Portanto y_1 é solução apenas se $a = -1$.

   c) $\frac{dx}{dt} + x^2 = 0$

   Possíveis soluções: $x_1(t) = t^{-1}$, $x_2(t) = \ln t^2$

Note que

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{t^2} = -\left(\frac{1}{t}\right)^2 = -x_1^2 \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} + x_1 = 0$$

O função x_2 não é solução.

3. Resolva os problemas de valor inicial

a) $y' + \frac{2}{x}y = y$ com condição inicial $y(1) = 1$

Podemos reescrever a equação como

$$\frac{dy}{y} = \left(1 - \frac{2}{x}\right) dx \quad \text{e portanto} \quad \int_1^y \frac{dy}{y} = \int_1^x \left(1 - \frac{2}{x}\right) dx$$

Integrando obtemos

$$y(x) = \frac{e^{x-1}}{x^2}$$

b) $y' + 6xy = 0$ com condição inicial $y(\pi) = 5$

Como no item anterior reescrevemos a EDO

$$\frac{dy}{y} = -6xdx \quad \text{e portanto} \quad \int_5^y \frac{dy}{y} = \int_\pi^x 6xdx$$

Integrando obtemos

$$y(x) = 5e^{3(x^2 - \pi^2)}$$

c) $y' = \cos x$ com condição inicial $y(0) = 0$

$$y(x) = \sin x$$

d) $y' + \frac{2}{x}y = -x^9 y$ com condição inicial $y(1) = 2$

$$y(x) = 2\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{10}(x^{10}-1)}$$