

Equações Diferenciais

O que são?

Tiago Pereira
tiago@icmc.usp.br

ICMC



CeMEAI

USP



O que é uma EDO?

Equação diferencial ordinária

O que é uma EDO?

Equação diferencial ordinária

=

Temos uma função desconhecida

O que é uma EDO?

Equação diferencial ordinária

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)$$

Relação da função e sua derivada

O que é uma EDO?

Equação diferencial ordinária

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)$$

Porque estudar EDO's

As leis da natureza são leis são EDO's

$$\frac{dp}{dt} = F$$

ou

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F$$

O que significa resolver uma EDO

Encontrar a função que obedece a EDO

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

Qual é a função com derivada igual a 1?

$$x(t) = t + c$$

O que significa resolver uma EDO

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0$$

Encontrar a função que resolve

$$x(t) = \cos t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -\sin t \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\cos t$$

O que significa resolver uma EDO

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0$$

Encontrar a função que resolve

$$x(t) = \cos t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\sin t \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\cos t$$

+

Classificação

Ordem da EDO = ordem da maior derivada

$$\frac{dx}{dt} + x^2 = 0 \quad 1^\circ \text{ ordem}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \quad 2^\circ \text{ ordem}$$



Classificação

Escalar

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Vetorial

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Classificação: EDO linear

A função e suas derivadas aparece de maneira linear

$$\frac{dx}{dt} = x$$

linear

$$\frac{dx}{dt} + x^2 = 0$$

não linear

Classificação

Exercício: Classifique as EDO's

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0 \quad 2^\circ \text{ ordem linear}$$

$$\frac{dx}{dt} + t^2 x = 0 \quad 1^\circ \text{ ordem linear}$$

$$x \frac{dx}{dt} + 1 = 0 \quad 1^\circ \text{ ordem não-linear}$$

EDO 1º ordem linear

$$a(t) \frac{dx}{dt} + b(t)x = 0 \quad \text{homogêneas}$$

$$x(t) = 0 \quad \text{resolve}$$

EDO 1º ordem linear

$$a(t) \frac{dx}{dt} + b(t)x = 0 \quad \text{homogêneas}$$

$$a(t) \frac{dx}{dt} + b(t)x = q(t) \quad \text{não homogêneas}$$

Diferenças entre linear e não-linear

Princípio de superposição

$$a(t) \frac{dx}{dt} + b(t)x = 0$$

z é solução

y é solução



$x = z + y$ é solução

Diferenças entre linear e não-linear

Princípio de superposição

$$x = z + y$$

$$a(t)(z + y)' + b(t)(z + y) = 0$$

$$\underbrace{a(t)z' + b(t)z}_{=0} + \underbrace{a(t)y' + b(t)y}_{=0} = 0$$

Diferenças entre linear e não-linear

$$\frac{dx}{dt} + x^2 = 0$$

z é solução

y é solução

mas

$x = z + y$ não é solução

Diferenças entre linear e não-linear

$$\frac{dx}{dt} + x^2 = 0$$

Testando

$$x = z + y$$

Na EDO

$$(z + y)' + (z + y)^2 = 0$$

manipulando

$$z' + z^2 + y' + y^2 + 2zy = 0$$

Diferenças entre linear e não-linear

$$\frac{dx}{dt} + x^2 = 0$$

Testando

$$x = z + y$$

Na EDO

$$(z + y)' + (z + y)^2 = 0$$

manipulando

$$2zy = 0$$



EDO 2º ordem linear

As EDO's de 2º ordem lineares autônomas são

$$x'' + ax' + bx = f(t)$$