Primeira Prova – SME340

Nome:____ NUSP______________

1. (2pt) Determine a solução geral das seguintes EDO's. Justifique sua resposta.

   a) $\dot{x} + 6x = 5$ b) $\dot{x} + \sin tx = 0$ c) $\ddot{x} + 9x = 0$ d) $\ddot{x} + 5\dot{x} = 0$

   a) A solução da homogenea é $x_h = x_0 e^{-6t}$ e a particular $x_p = 5/6$. Portanto

   $$x_g(t) = x_0 e^{-6t} + 5/6$$

   b) A Solução da homogenea é $x_h(t) = x_0 e^{-\cos t}$.

   c) A equação característica é $\lambda^2 + 9 = 0$, logo $\lambda_1 = +3i$ e $\lambda_2 = -3i$. Portanto

   $$x_g(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$$

   d) A equação característica é $\lambda^2 + 5\lambda = \lambda(\lambda + 5) = 0$, logo $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -5$. Portanto

   $$x_g(t) = c_1 + c_2 e^{-5t}$$

2. (3pt) Considere um sistema massa-mola com atrito viscoso no caso em que a força restauradora satisfaz

   $$F_m = -(kx + \varepsilon x^3),$$

   ou seja, a mola sofre efeitos não lineares devido ao esforço. Quando $\varepsilon = 1$ a mola é chamada de dura e suave quando $\varepsilon = -1$. A equação que rege o corpo é dada por $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx + \varepsilon x^3 = 0$. Considere o limite de pequenas massas e tome

   $$\gamma\dot{x} + kx + \varepsilon x^3 = 0.$$

   Obtenha a solução $x = x(t)$ e discuta o efeito de ε ser positivo ou negativo.

   Utilizando $y = 1/x^2$ obtemos $\dot{y} = \frac{2k}{\gamma} y + \frac{2\varepsilon}{\gamma}$. Donde

   $$y(t) = c e^{\frac{2k}{\gamma} t} - \frac{\varepsilon}{k}, \qquad \text{onde } c \text{ é uma constante}$$

   e portanto $x(t) = \frac{1}{\sqrt{y(t)}}$ Impondo $x(0) = \frac{1}{\sqrt{y(0)}} = x_0$ obtemos $c = x_0^{-2} + \frac{\varepsilon}{k}$, logo

   $$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{e^{\frac{2k}{\gamma} t}}{x_0^2} - \frac{\varepsilon}{k}\left(e^{\frac{2k}{\gamma} t} - 1\right)}}$$

   Portanto $x \to 0$ exponencialmente rápido quando $t \to \infty$. O parametro ε não influencia a taxa de decaimento mas a amplitude. Se $\varepsilon < 0$, x decairá com amplitudes menores.

3. (2pt) A asa de um avião segue o modelo reduzido de um oscilador amortecido

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

onde x corresponde ao deslocamento com respeito a posição de equilíbrio, μ o coeficiente de atrito e ω_0 a frequência natural da asa. Os engenheiros gostariam de determinar o valor da frequência natural ω_0 de oscilação da estrutura. Para tanto eles perturbaram a estrutura e mediram sua oscilação x. Depois de uma analise a filtro de dados, eles notaram que a oscilação é bem descrita por

$$x(t) = e^{-2t}\sin\pi t$$

Determine o coeficiente de atrito μ a frequência natural ω_0 de oscilação da estrutura.

Sabemos que as raízes são complexas e portanto $\lambda_1 = r + i\omega$ e $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, com $r = \mu/2$ e $\omega = \sqrt{4\omega_0^2 - \mu^2}/2$. Dado que a solução geral é da forma $x(t) = c_1 e^{rt}\sin\omega t + c_2 e^{rt}\cos\omega t$ Donde $\mu = 4$ e $\omega = \pi$, logo $\omega_0 = \sqrt{\pi^2 + 4}$

4. (3pt) Christian Huygens colocou dois pêndulos com diferentes períodos sobre a mesma viga de madeira. Ele percebeu que devido a interação os pêndulos passaram a ter o mesmo período. Huygens não soube explicar o fenômeno. Hoje sabemos descrever matematicamente este problema. Consider que a fase (ângulo) dos pêndulos seja

$$\dot{\theta} = \omega_1 \quad \dot{\phi} = \omega_2$$

Devido a interação temos

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega_1 + \alpha\sin(\phi - \theta)\\ \dot{\phi} &= \omega_2 + \alpha\sin(\theta - \phi)\end{aligned}$$

Os pêndulos terão o mesmo período quando $\psi = \theta - \phi$ for constante. Ou seja $\dot{\psi} = 0$.

a) Obtenha uma EDO para ψ

Derivando obtemos $\dot{\psi} = \omega_1 - \omega_2 - 2\alpha\sin\psi$

b) Determine os valores de α para que $\psi =$ constante seja solução

Sem perda de generalidade assumimos que $\omega_1 > \omega_2$ Temos que $\dot{\psi} = 0$ logo $\omega_1 - \omega_2 - 2\alpha\sin\psi = 0$, portanto $\sin\psi^* = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\alpha}$. Como $|\sin\psi^*| \leq 1$ obtemos

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \leq \alpha \leq \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

c) Determine o período dos pêndulos quando a diferença de fases é constante.

Como ψ é constante sabemos $\sin\psi^* = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\alpha}$, substituindo na equação de θ obtemos $\dot{\theta} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, logo a frequência é a media das frequências isoladas.