Primeira Prova – SME340

Nome:____ NUSP______________

1. A população de ratos em Sao Carlos se reproduz com taxa de reprodução r. A cidade tem uma capacidade ambiental K para comportar os ratos, isto é, os ratos morrem com taxa $-ry^2/K$, visto que não há recursos para um número grande de ratos. E portanto a competição dentro da população aumenta. A equação que governa a população é a combinação de ambos fatores (nascimentos e morte)

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Determine se há equilíbrio populacional.

Dica: Essa equação é de Bernoulli. Use a transformação de variáveis $v = 1/y$.

Sol: Note que

$$\dot{v} = -\frac{1}{y^2}\dot{y}$$

Multiplicando ambos lados da equação por $-1/y^2$ obtemos

$$\dot{v} = -rv + \frac{r}{K},$$

cuja solução é da forma $v(t) = ce^{-rt} + 1/K$. Impondo $v(0) = v_0$ obtemos

$$v = \frac{(Kv_0 - 1)e^{-rt} + 1}{K}.$$

Portanto

$$y(t) = \frac{K}{(Kv_0 - 1)e^{-rt} + 1}.$$

Note que possivelmente temos uma divergência do denominador se $Kv_0 - 1 < -1$, ou seja, se $v_0 < 0$, mas isso implicaria que $y_0 < 0$. Essa situação não é plausível pois $y_0 > 0$, dado que y_0 é o número de ratos. Portanto para todo $y_0 > 0$, o determinador não diverge. Além disso

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = K$$

e portanto a população se estabiliza em K a capacidade ambiental.

2. Certo material radioativo decresce a uma taxa proporcional a quantidade de material presente. Se, para uma quantidade inicial de 100 mg, se observa um decréscimo de 5% após dois anos, determine.

   a) A quantidade restante como função de t

b) O tempo necessário para uma redução de 10% da quantidade inicial

Sol: a) Seja N a quantidade de material temos que

$$\dot{N} = -\lambda N \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Sabemos que $N_0 = 100$, e basta determinar λ. Dos dados temos

$$0.95 N_0 = N_0 e^{-2\lambda}$$

Portanto

$$\lambda = -\frac{1}{2}\ln 0.95$$

b) Temos que resolver a equação

$$0.9 N_0 = N_0 e^{-\lambda t}$$

E portanto

$$t = \frac{-\ln 0.9}{\lambda} = 2\frac{\ln 0.9}{\ln 0.95}$$

3. Uma estrutura metálica obedece a equação

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

onde x corresponde ao deslocamento com respeito a posição de equilíbrio. Os engenheiros gostariam de determinar o valor da frequência natural ω_0 de oscilação da estrutura. Para tanto eles perturbaram a estrutura e mediram sua oscilação x obtendo

$$x(t) = e^{-t/2}\sin 2\pi t$$

Determine o coeficiente de atrito μ a frequência natural ω_0 de oscilação da estrutura.

Sol: Sabemos que o decaimento exponencial é a parte real da raiz da equação característica, e a frequência da parte oscilante corresponde a parte imaginária. Ou seja,

$$-\frac{1}{2} = -\frac{\mu}{2} \Rightarrow \mu = 1$$

e

$$\frac{\sqrt{4w_0^2 - \mu^2}}{2} = 2\pi \Rightarrow \omega_0 = \frac{\sqrt{16\pi^2 + 1}}{2}$$

4. Considere a equação

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = 3e^{-2t}$$

a) Determine a solução geral

Sol: Sabemos que

$$x_g = x_h + x_p$$

onde x_h é a solução da homogênea e x_p da particular. Determinamos x_h via equação característica e x_p usando o ansatz $x_p = \alpha e^{-2t}$. Obtemos $\alpha = 1$, logo

$$x_g = Ae^{-3t} + Be^{t} - e^{-2t}$$

b) Determine a condição inicial para que a solução seja limitada. **Sol:** As condições iniciais são

$$x_g(0) = x_0 \text{ e } \dot{x}_g(0) = v_0$$

Da equação de x_g obtemos

$$\begin{aligned} x_0 &= A + B - 1 \\ v_0 &= -3A + B + 2 \end{aligned} \tag{1}$$

Como queremos $B = 0$ obtemos $x_0 = A - 1$ e $v_0 = -3A + 2$. Em termos das condições iniciais

$$v_0 = -3x_0 - 1$$

para qualquer x_0.