Prova 2 – SME340 (Mecatrônica)

Nome:____ NUSP______________

14 de Maio de 2017

1. Mostre que
   a) (1.0) $\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{d}{ds}F(s)$
   b) (1.0) Determine $\mathcal{L}(3te^{at})$.
   c) (0.5) Determine $\mathcal{L}(t\cosh t)$, onde $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$

2. (2.0) Determine a solução via Laplace da equação com $y_0 = 0$

$$y' + \beta y = 1$$

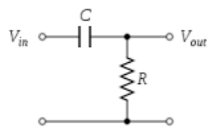
3. Considere o circuito RLC. Aplicando a lei de Kirchhoff obtemos

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i(t) = u.$$

   Considere o circuito com $L = 1H$, $R = 10$ ohms e $C = 1/9F$.

   (a) (0.5) Determine a função transferência W.
   (b) (1.0) obtenha a função peso $w(t)$.
   (c) (1.0) Com $i(0) = i'(0) = 0$, determine a corrente quando $u = \delta(t-4)$.
   (d) (1.0) Seja $u(t)$ uma onda harmonica de frequencia ω. A amplitude de $i(t)$ é dado por $|W(j\omega)|$. Determine a frequência ω para que a amplitude da corrente seja máxima.

4. Considere um circuito passa alta



   A equação que governa o sistema é

$$v_{in} - v_{out} = v_C$$

   Lembrando que $Cv_C = q$ e a corrente no capacitor é a mesma que a corrente do resistor $\frac{dq}{dt} = i_R = v_{out}/R$.

   (a) (1.5) Determine a função de transferência $W(s) = V_{in}(s)/V_{out}(s)$.
   (b) (1.5) Sabemos que a amplitude v_{out} quando v_{in} é uma onda harmônica de frequência ω é $|W(j\omega)|$. Quando $R = C = 100$ e

$$v_{in} = e^{jt} + e^{j\Omega t}$$

   com $\Omega = 10^6$, determine a $|v_{out}|$ (use linearidade)

Prova 2 – SME340 (Mecatrônica)

Nome:____ NUSP______________

14 de Maio de 2017

1. Mostre que

a) (1.0) $\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{d}{ds}F(s)$

Sol:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(tf(t)) &= \int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt = \int_0^\infty -\frac{d}{ds}e^{-st}f(t)dt \\
&= -\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\
&= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f(t))
\end{aligned}$$

b) (1.0) Determine $\mathcal{L}(3te^{at})$. Sol:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(3te^{t}) &= -3\frac{d}{ds}\mathcal{L}(e^{at}) = -3\frac{d}{ds}\frac{1}{s-a} \\
&= \frac{3}{(s-a)^2}
\end{aligned}$$

c) (0.5) Determine $\mathcal{L}(t\cosh t)$, onde $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$ Sol: Por linearidade

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t\cosh t) &= -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}(e^t) + \mathcal{L}(e^{-t})\right) \qquad (1) \\
&= \frac{1}{2(s-1)^2} + \frac{1}{2(s+1)^2}
\end{aligned}$$

2. (2.0) Determine a solução via Laplace da equação com $y_0 = 0$

$$y' + \beta y = 1$$

Sol: Transformando

$$sY(s) + \beta Y(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{(s+\beta)s}$$

Por frações parciais

$$\frac{1}{(s+1)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\beta} \quad \Rightarrow \quad A = 1/\beta, B = -1/\beta.$$

Logo,

$$y(t) = \frac{1}{\beta}\left(1 - e^{-\beta}\right).$$

3. Considere o circuito RLC. Aplicando a lei de Kirchhoff obtemos

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C} i(t) = u.$$

Considere o circuito com $L = 1H$, $R = 10$ ohms e $C = 1/9F$.

(a) (0.5) Determine a função transferência W.

Sol: a) Transformando e substituindo os valores

$$(s^2 + 10s + 9)I(s) = U(s) \quad \Rightarrow \quad W(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 9}$$

(b) (1.0) obtenha a função peso $w(t)$.

Sol: b) Por frações parciais

$$W(s) = \frac{1}{(s+9)(s+1)} = \frac{1}{8(s+1)} - \frac{1}{8(s+9)} \quad \Rightarrow \quad w(t) = \frac{1}{8}\left(e^{-t} - e^{-9t}\right)$$

(c) (1.0) Com $i(0) = i'(0) = 0$, determine a corrente quando $u = \delta(t-4)$.

Sol: c) Neste caso a solução sera

$$i(t) = \int_0^t w(t-s)\delta(t-4)dt \quad \Rightarrow \quad i(t) = w(t-4)$$

(d) (1.0) Seja $u(t)$ uma onda harmonica de frequencia ω. A amplitude de $i(t)$ é dado por $|W(j\omega)|$. Determine a frequência ω para que a amplitude da corrente seja máxima.

Sol: Dado que $|W(j\omega)| = \overline{W(j\omega)}W(j\omega)$ e $W(j\omega) = (-\omega^2 + j10\omega + 9)^{-1}$

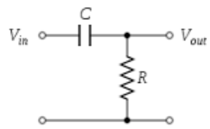
$$|W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - 9)^2 + 100\omega^2}}$$

O máximo é atingido quanto

$$\frac{d}{d\omega}|W(j\omega)| = 0 \quad \Rightarrow \quad w^2 = -41 \ \ ou \ \ w = 0$$

como a primeira opção é um número complexo, o máximo é atingido no zero.

4. Considere um circuito passa alta



A equação que governa o sistema é

$$v_{in} - v_{out} = v_C$$

Lembrando que $Cv_C = q$ e a corrente no capacitor é a mesma que a corrente do resistor $\frac{dq}{dt} = i_R = v_{out}/R$.

(a) (1.5) Determine a função de transferência $W(s) = V_{out}(s)/V_{in}(s)$.
Sol: Sabemos que

$$v_{in} - v_{out} = v_c$$

e também $\dot{v}_c = i/C$, como a corrente no capacitor é igual a do resistor

$$\dot{v}_{in} - \dot{v}_{out} = \frac{1}{RC} v_{out}$$

Transformando

$$sV_{in}(s) - sV_{out}(s) = \frac{1}{RC} V_{out}(s) \quad \Rightarrow \quad W(s) = \frac{RCs}{1 + RCs}$$

(b) (1.5) Sabemos que a amplitude v_{out} quando v_{in} é uma onda harmônica de frequência ω é $|W(j\omega)|$. Quando $R = C = 100$ e

$$v_{in} = e^{jt} + e^{j\Omega t}$$

com $\Omega = 10^6$, determine a $|v_{out}|$ (use linearidade)
Sol:

$$|W(j\omega)| = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC)^2\omega^2}}$$

Portanto

$$|v_{out}| = |W(j1)| + |W(j10^6)| = \frac{10^4}{\sqrt{1 + 10^8}} + \frac{10^{10}}{\sqrt{1 + 10^{20}}} \approx 2$$