Provinha – SME340

Soluções por Victor Hugo de Souza Daniel

1. Se A é nilpotente (existe um inteiro k tal que $A^k = 0$) então

   ☐ A não é invertível

   ☐ A é invertível

   Suponha, por absurdo, que A seja invertível. Então podemos verificar indutivamente que A^n é invertível $\forall n \in \mathbb{N}$ com $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$. Assim, $A^k = 0$ é invertível, *contradição*. $\therefore A$ **não** é invertível.

   Prova 2: A é inversivel se e somente se $\det A \neq 0$. Seja k inteiro tal que $A^k = 0$ como o determinante do produto de matrizes é o produto dos seus determinantes temos

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A^k) \\ &= [(\det(A)]^k \end{aligned} \tag{1}$$

   portanto $\det A = 0$

2. Se A é nilpotente então e^{At}

   ☐ é um polinômio em t.

   ☐ é uma exponencial em t.

   Seja k o menor natural tal que $A^k = 0$. Portanto, $A^n = 0$ para todo inteiro $n \geq k$:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{t^n A^n}{n!} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{t^n A^n}{n!} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^n 0^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{t^n A^n}{n!} \\ &= I + At + ... + \frac{A^n}{n!} t^{k-1} \end{aligned}$$

   polinômio em t.

3. Uma matrix não nula A é idempotente se $A^2 = A$

   ☐ então A tem um autovalor com modulo 1.

   ☐ então A tem um autovalor negativo.

   Primeiramente, note que se $\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalor de A, então $\exists v \neq 0$ tal que

   $$Av = \lambda v$$

   Além disso

   $$\begin{aligned} A^2 v &= A(Av) \\ &= A(\lambda v) \\ &= \lambda A v \\ &= \lambda^2 v \end{aligned}$$

   Portanto, como $A^2 = A$,

   $$A^2 v = Av \Rightarrow \lambda^2 v = \lambda v \Rightarrow (\lambda^2 - \lambda) v = 0$$

   Portanto

   $$\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1.$$

   e A tem um autovalor de modulo 1

4. Se A é idempotente então $B = I - A$ é idempotente e mais $AB = BA = 0$

   ☐ Verdadeiro

   ☐ Falso

   Temos
   $AB = A(I - A) = AI - A^2 = A - A = 0$
   $BA = (I - A)A = IA - A^2 = A - A = 0$
   Além disso:
   $B^2 = B(I - A) = BI - BA = B - 0 = B$, logo B é idempotente.

5. Seja A é idempotente e B tal que $AB = 0$, então

   ☐ $e^A B = B$.

   ☐ $e^A B = 0$

   Como A é idempotente, por indução tem-se que $A^n = A \; \forall n \geq 1$. Assim

   $$e^{At} B = \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n!} \right) B$$

$$
\begin{aligned}
&= B + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{AB}{n!} \\
&= B + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \\
&= B
\end{aligned} \qquad (2)
$$

6. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ então

   ☐ se 0 é autovalor a equação $Ax = 0$ tem infinitas soluções

   ☐ se 0 é autovalor então as colunas de A são LI

   ☐ se 0 não é autovalor então $\det A = 0$.

   i Se 0 é autovalor de A, então existe $v \neq 0$ tal que $Av = 0 \Rightarrow A(\lambda v) = \lambda A v = \lambda 0 = 0$. Portanto $x = \lambda v$ é solução para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e como dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   ii Seja $A = [v_1 \cdots v_n]$ onde v_i é a $i$ésima coluna de A. Notamos que dado $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$ temos que

   $$Ax = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

   Se $x \neq 0$ é autovetor com autovalor nulo então

   $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$$

   tem soluçcão com algum $\alpha_i \neq 0$. Portanto as colunas são LD.

   iii Sabemos que $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$. Portanto $\det A = 0$ se e somente se $\lambda = 0$.

7. Considere $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, então o elemento $(e^A)_{21}$ é

   ☐ 0

   ☐ 1

   Indutivamente, é fácil verificar que

   $$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}$$

   De fato, vale para $n = 0$, já que

   $$A^0 = \begin{pmatrix} 2^0 & 0 \\ 0 & (-3)^0 \end{pmatrix}$$

Note que $(A^n)_{21}$=0 para todo n natural). Logo

$$(e^A)_{21} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^n)_{21}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

8. Existe uma matriz B tal que $A = B + rI$ é inversível para todo r real.

   ☐ Verdadeiro

   ☐ Falso

   Verdadeiro. Basta tomar uma matriz B com autovalores complexos. Tal como

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Dizemos que uma matriz é nilpotente se existe um k tal que $N^k = 0$. Então

   ☐ N tem autovalores nulos

   ☐ N tem autovalores puramente imaginários.

   N tem autovalores nulo. Note que se $Nv = \lambda v$ então $N^k v = \lambda^k v$ pela nilpotencia concluimos que $\lambda^k = 0$.