



# Equações Diferenciais

2º ordem  
raízes complexas

Tiago Pereira  
[tiago@icmc.usp.br](mailto:tiago@icmc.usp.br)





# Solução Geral

---

Considere a EDO

$$x'' + ax' + bx = 0$$

Relembrando que duas soluções LI  
geram todas soluções da EDO



# Equação característica

---

Considere a EDO

$$x'' + ax' + bx = 0$$

A equação característica é

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

# Equação característica

A equação característica é

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

The diagram consists of a horizontal line with the quadratic equation  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ . Two arrows point away from the equation: one arrow points upwards and to the right towards the symbol  $\lambda_1$ , and another arrow points downwards and to the right towards the symbol  $\lambda_2$ . Between the two arrows is a symbol consisting of a diagonal line with a dot above it, followed by a vertical line with a dot to its right, which is the standard notation for inequality ( $\neq$ ).

Solução

$$x_g(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$



# Equação característica

---

Mas se as raízes são complexas?

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

Relembrando

$$\lambda_1 = r + i\omega$$

$$\lambda_2 = r - i\omega$$

# Equação característica

---

Mas se as raízes são complexas?

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

Relembrando

$$\lambda_1 = r + i\omega \quad \Rightarrow z = e^{\lambda_1 t}$$

$$\lambda_2 = r - i\omega$$

# Solução Complexa

---

Se temos uma solução complexa

$$z = x + i y$$

A parte Re da solução não conversa com a Im

Uma sol complexa → Duas reais



# Formula de Euler

---

Relembrando

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

# Formula de Euler

---

Relembrando

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

No nosso caso

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= e^{(r+i\omega)t} \\ &= e^{rt} e^{i\omega t} \\ &= e^{rt} \cos \omega t + i e^{rt} \sin \omega t \end{aligned}$$



# Exemplo

---

Considere o PVI

$$x'' + 4x' + 5x = 0$$

$$x(0) = 1$$

$$x'(0) = 0$$

# Exemplo

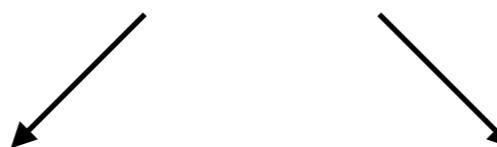
---

Considere o PVI

$$x'' + 4x' + 5x = 0$$

A equação característica é

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$



$$\lambda_1 = -2 + i$$

$$\lambda_2 = -2 - i$$

# Exemplo

---

Considere o PVI

$$x'' + 4x' + 5x = 0$$

Solução complexa

$$z = e^{-2t} \cos t + ie^{-2t} \sin t$$

# Exemplo

---

Considere o PVI

$$x'' + 4x' + 5x = 0$$

Solução complexa

$$z = e^{-2t} \cos t + ie^{-2t} \sin t$$

# Exemplo

---

Considere o PVI

$$x'' + 4x' + 5x = 0$$

Solução complexa

$$z = e^{-2t} \cos t + ie^{-2t} \sin t$$

Solução Geral

$$x_g(t) = c_1 e^{-2t} \cos t + c_2 e^{-2t} \sin t$$

# Exemplo

---

Resolvendo o PVI

$$x_g(t) = c_1 e^{-2t} \cos t + c_2 e^{-2t} \sin t$$

deve satisfazer       $x(0) = 1$        $x'(0) = 0$

obtendo

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$-2c_2 = 0$$



# Exemplo

---

A solução do PVI

$$x'' + 4x' + 5x = 0$$

$$x(0) = 1$$

$$x'(0) = 0$$

é dada por

$$x(t) = e^{-2t} \cos t$$