# Equações Diferenciais

## 2º ordem
## raízes complexas

Tiago Pereira
tiago@icmc.usp.br

ICMC CeMEAI USP

# Solução Geral

Considere a EDO

$$x'' + ax' + bx = 0$$

Relembrando que duas soluções LI
geram todas soluções da EDO

# Equação característica

Considere a EDO

$$x'' + ax' + bx = 0$$

A equação característica é

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

# Equação característica

A equação característica é

$$\begin{tikzcd} & \lambda_1 \\ \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \neq \\ & \lambda_2 \end{tikzcd}$$

Solução

$$x_g(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

# Equação característica

Mas se as raízes são complexas?

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

Relembrando

$$\lambda_1 = r + i\omega$$

$$\lambda_2 = r - i\omega$$

# Equação característica

Mas se as raízes são complexas?

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

Relembrando

$$\lambda_1 = r + i\omega \qquad \Rightarrow z = e^{\lambda_1 t}$$

$$\lambda_2 = r - i\omega$$

# Solução Complexa

Se temos uma solução complexa

$$z = x + i\,y$$

A parte Re da solução não conversa com a Im

Uma sol complexa $\Rightarrow$ Duas reais

# Formula de Euler

Relembrando

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

# Formula de Euler

Relembrando

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

No nosso caso

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= e^{(r+i\omega)t} \\ &= e^{rt} e^{i\omega t} \\ &= e^{rt}\cos\omega t + i e^{rt}\sin\omega t \end{aligned}$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# Exemplo

Considere o PVI

$$x'' + 4x' + 5x = 0$$
$$x(0) = 1$$
$$x'(0) = 0$$

# Exemplo

Considere o PVI

$$x'' + 4x' + 5x = 0$$

A equação característica é

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = -2 + i \qquad \lambda_1 = -2 - i$$

# Exemplo

Considere o PVI

$$x'' + 4x' + 5x = 0$$

Solução complexa

$$z = e^{-2t}\cos t + ie^{-2t}\sin t$$

# Exemplo

Considere o PVI

$$x'' + 4x' + 5x = 0$$

Solução complexa

$$z = e^{-2t}\cos t + ie^{-2t}\sin t$$

# Exemplo

Considere o PVI

$$x'' + 4x' + 5x = 0$$

Solução complexa

$$z = e^{-2t}\cos t + ie^{-2t}\sin t$$

Solução Geral

$$x_g(t) = c_1 e^{-2t}\cos t + c_2 e^{-2t}\sin t$$

# Exemplo

Resolvendo o PVI

$$x_g(t) = c_1 e^{-2t} \cos t + c_2 e^{-2t} \sin t$$

deve satisfazer $\quad x(0) = 1 \qquad x'(0) = 0$

obtendo

$$c_1 + c_2 = 1$$
$$-2c_2 = 0$$

# Exemplo

A solução do PVI

$$x'' + 4x' + 5x = 0$$
$$x(0) = 1$$
$$x'(0) = 0$$

é dada por

$$x(t) = e^{-2t} \cos t$$