EDO: Ressonância

Tiago Pereira

O fenômeno de ressonância ocorre quando um sistema que exibe oscilações amortecidas é forçaado periodicamente. Aqui temos duas possibilidades interessantes. O sistema "ignora" o forçamento e desenvolve oscilações com amplitude desprezível. Ou absorve a energia do forçamento de maneira ótima entrando em ressonância com o forçamento.

Vamos considerar a EDO

$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = A_0 \sin \omega t$$

sob a ação de um forçamento harmônico de frequência ω. O truque agora é utilizar a formula da Euler

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

e resolver a EDO na forma complexa

$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = A_0 e^{i\omega t}.$$

Lembrando que para recuperar a solução x_p do problema original basta tomar a parte imaginária de solução complexa X_p que vamos encontrar. Chutamos a solução particular X_p como

$$X_p(t) = Be^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad X_p'(t) = i\omega B e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad X_p''(t) = -\omega^2 B e^{i\omega t}$$

Substitutindo e ansatz na EDO e cancelando o termo $e^{-i\omega t}$ obtemos

$$B(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2) = A_0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{A_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma}$$

A melhor estrategia é escrever B na forma polar

$$B = re^{i\theta} \qquad \text{relembrando que} \qquad r^2 = B\bar{B} \quad \& \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\mathrm{Im} B}{\mathrm{Re} B}$$

Determinando o módulo r como

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{A_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma} \frac{A_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma} && (1) \\ &= \frac{A_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} && (2) \end{aligned}$$

Portanto

$$r = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

Donde temos

$$X_p(t) = re^{i(\omega t+\theta)}$$

Como a solução da EDO é a parte imaginária $x_p = \text{Im } X_p$ temos

$$x_p(t) = r\sin(\omega t + \theta).$$

Vamos analisar o ganho em amplitude

$$g(\omega) = \frac{r(\omega)}{A_0}$$

da solução com respeito ao forçamento que nos diz a energia que sistema consegue obter do forçamento. Inspecionando obtemos

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

Para determinar o máximo valor de g em função de ω analisamos a derivada de g

$$\frac{dg}{d\omega} = \frac{1}{2}\frac{-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\omega\gamma^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]^{3/2}}$$

Portanto o máximo é atingido quando o numerador se anula

$$-2\omega[2(\omega_0^2 - \omega^2) - \gamma^2] = 0$$

Logo, ou $\omega = 0$ ou

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2}\gamma^2}$$

O ganho na ressonância é

$$g(\omega_{\text{res}}) = \frac{1}{\gamma\omega_0}$$

Ou seja, o ganho em amplitude é inversamente proporcional a dissipação γ.