# Equações Diferenciais

# Ressonância

Tiago Pereira
tiago@icmc.usp.br

# EDO's com forçamento

Considere a EDO

$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = A_0 \sin \omega t$$

# EDO's com forçamento

Considere a EDO

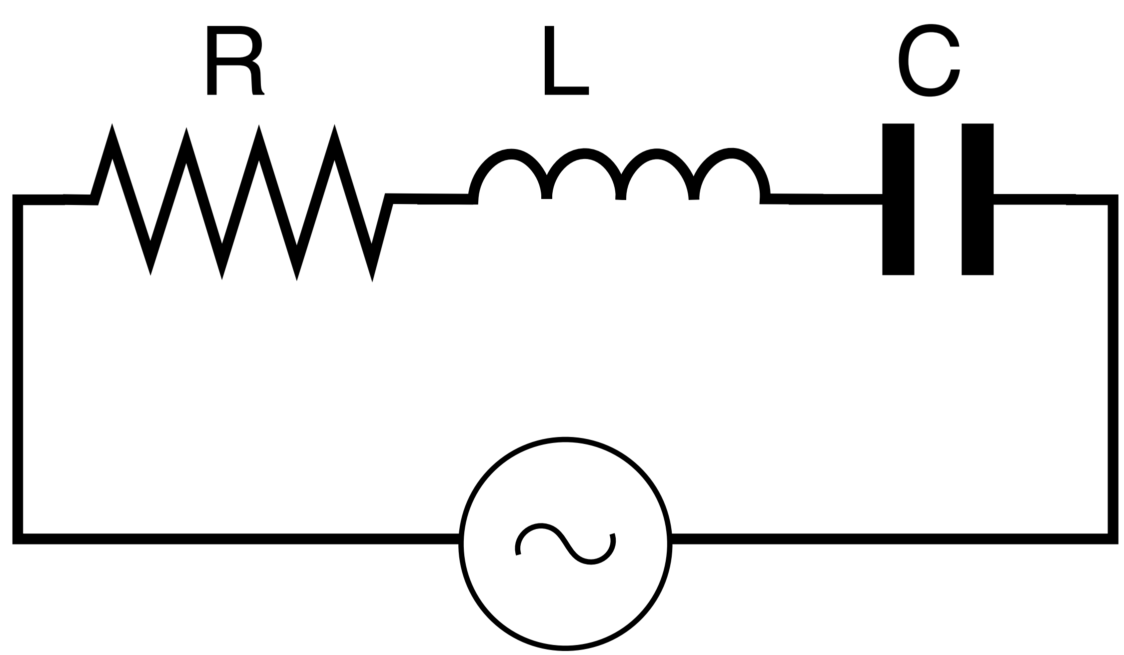
$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = \boxed{A_0 \sin \omega t}$$

Forçamento periódico

# EDO's com forçamento

Considere a EDO

$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = A_0 \sin \omega t$$

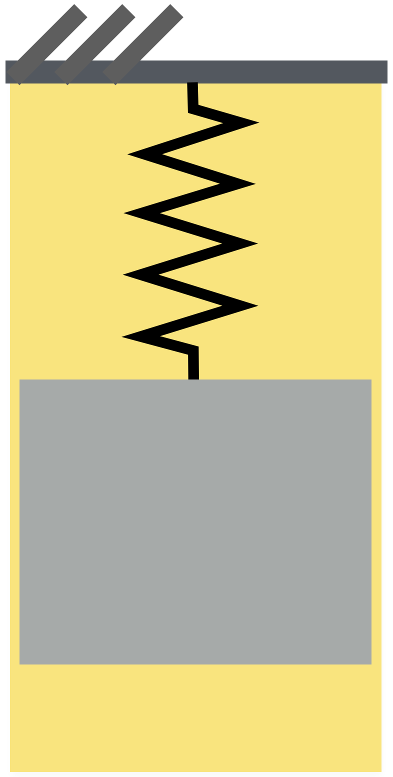



https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# EDO's com forçamento

Considere a EDO

$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = A_0 \sin \omega t$$

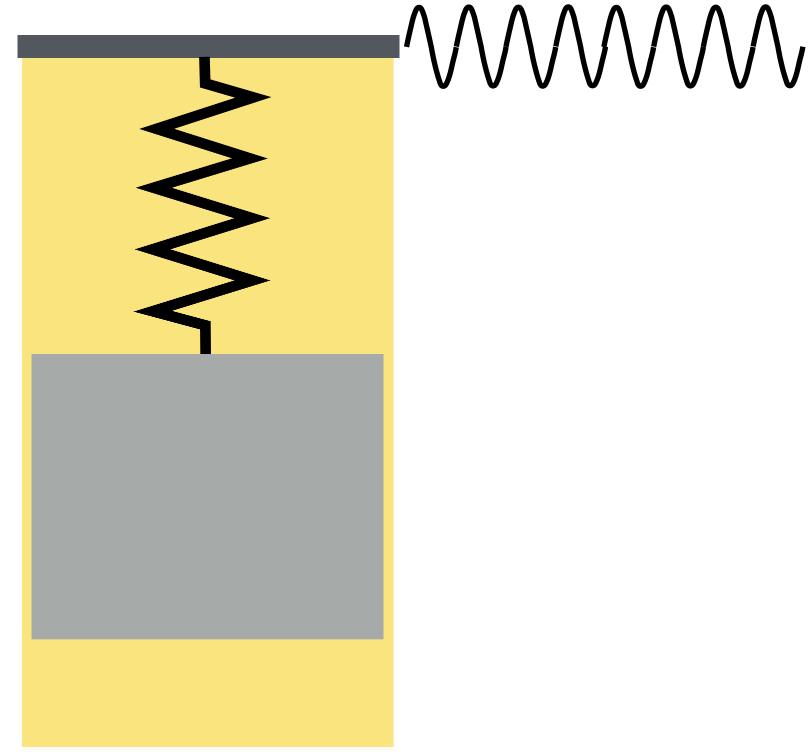


https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# EDO’s com forçamento

Considere a EDO

$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = A_0 \sin \omega t$$



https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# EDO's com forçamento

Considere a EDO

$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = A_0 \sin \omega t$$

Qual é a amplitude de oscilação da resposta?

# Truque: Utilizar a forma complexa

Pela formula de Euler

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

# Forma complexa

$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = A_0 e^{i\omega t}$$

# Determinando a particular

Chutando

$$x_p(t) = Be^{i\omega t}$$

# Determinando a particular

Obtemos

$$x_p(t) = Be^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad x_p'(t) = i\omega Be^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad x_p''(t) = -\omega^2 Be^{i\omega t}$$

# Voltando para a EDO

Originalmente

$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = A_0 \sin \omega t$$

Substituindo $x_p$

$$B(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2) = A_0$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# Resolvendo

$$B = \frac{A_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma}$$

# Passando para polares

$$B = re^{i\theta}$$

$$r^2 = B\bar{B}$$

# Caso não homogêneo

$$r = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

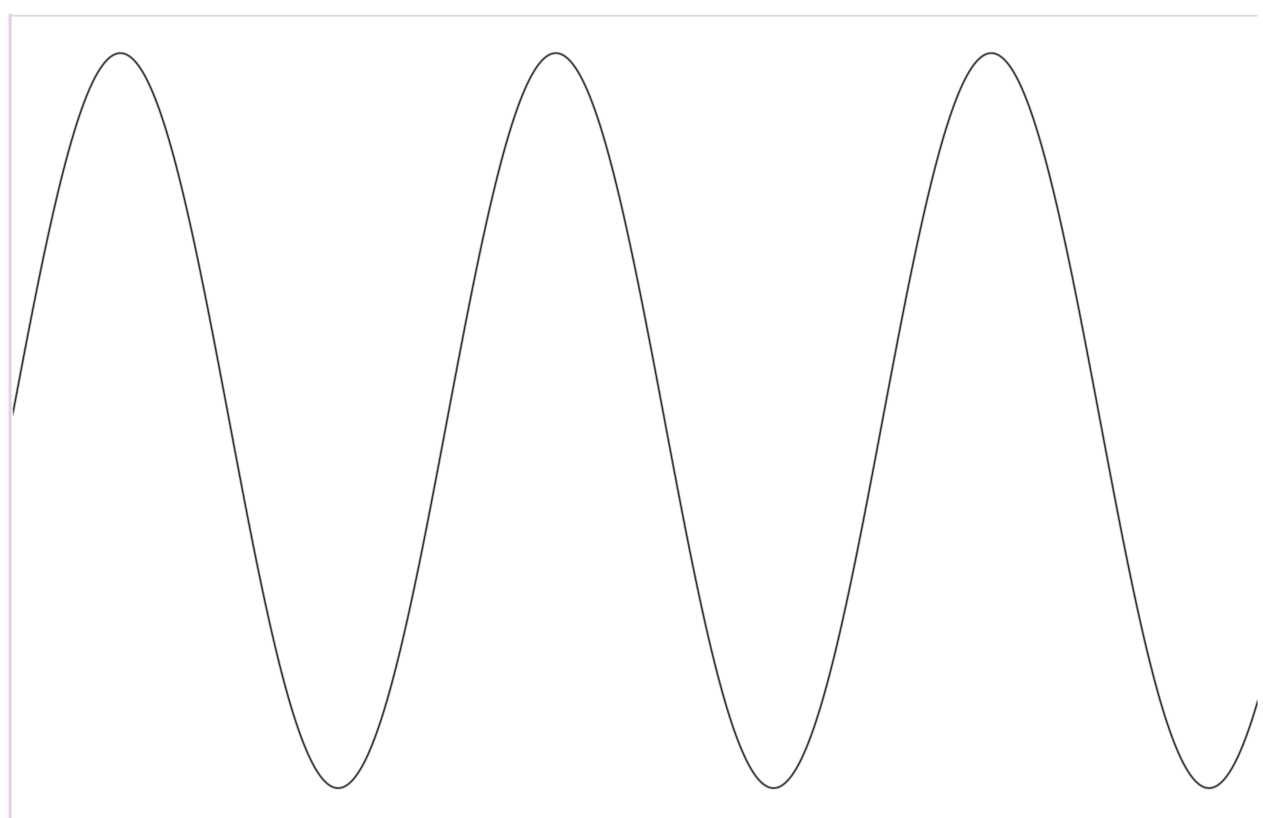
# Finalmente

$$x_p(t) = re^{i(\omega t+\theta)}$$

# Tomando apenas a parte Im

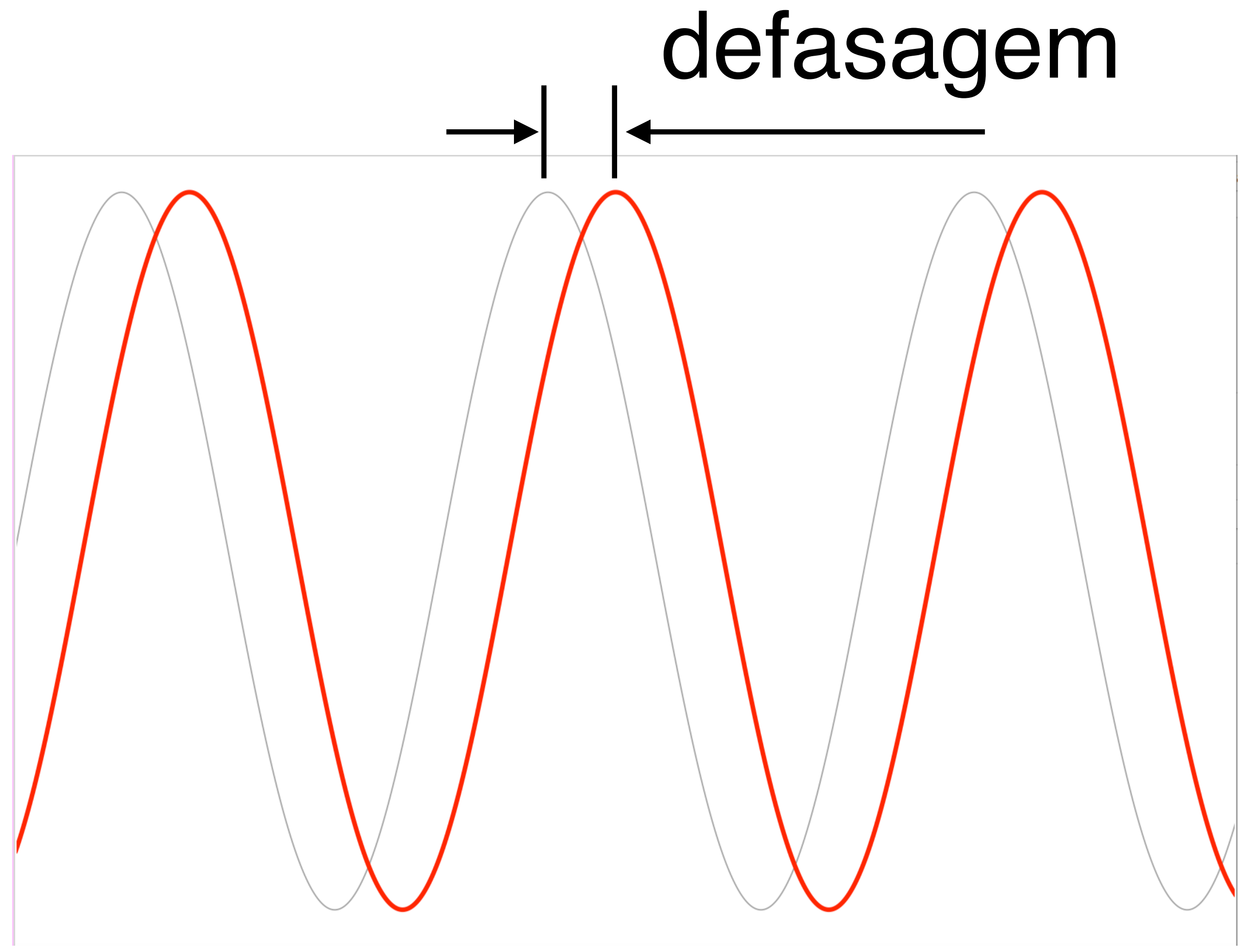
$$x_p(t) = r\sin(\omega t + \theta)$$

# Comparando forçamento e Solução



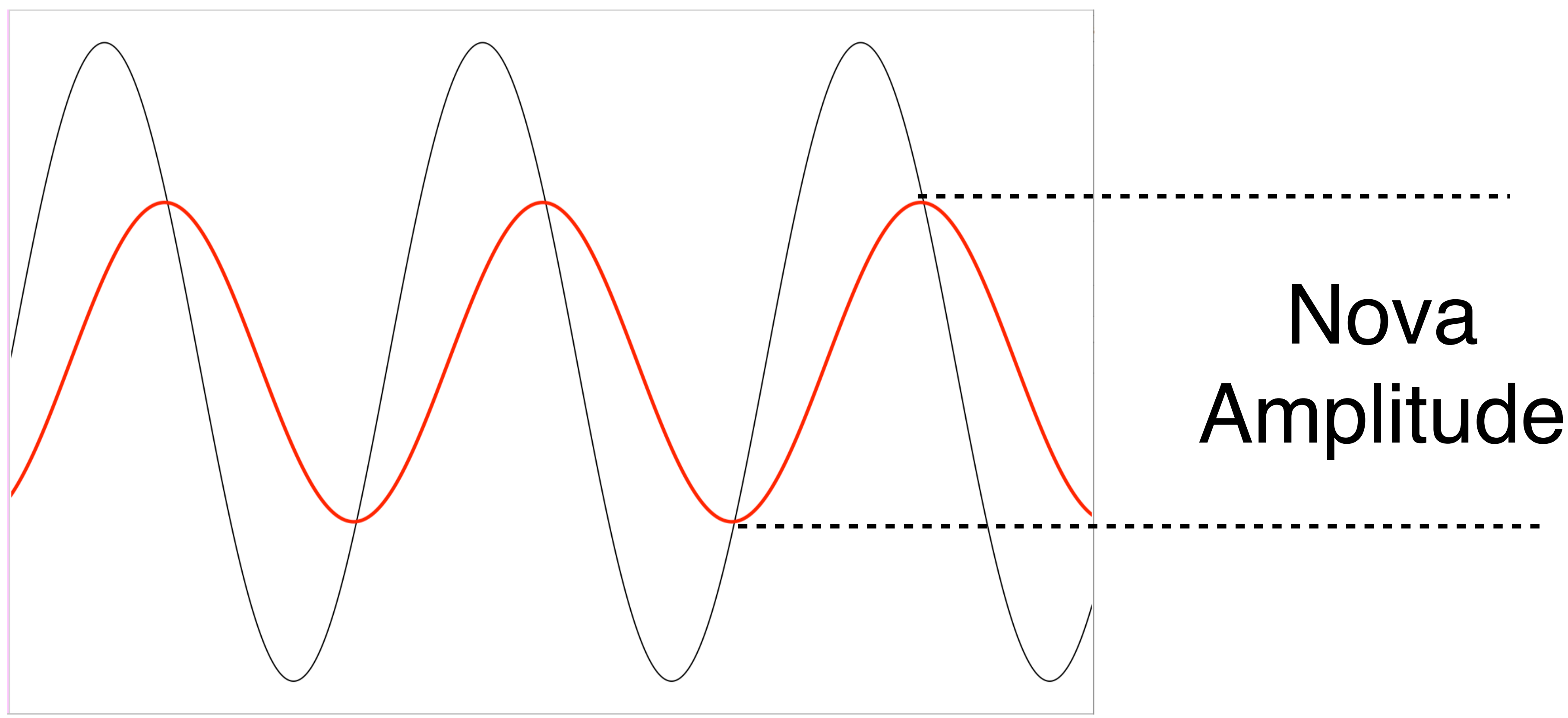
https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# Comparando forçamento e Solução




https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

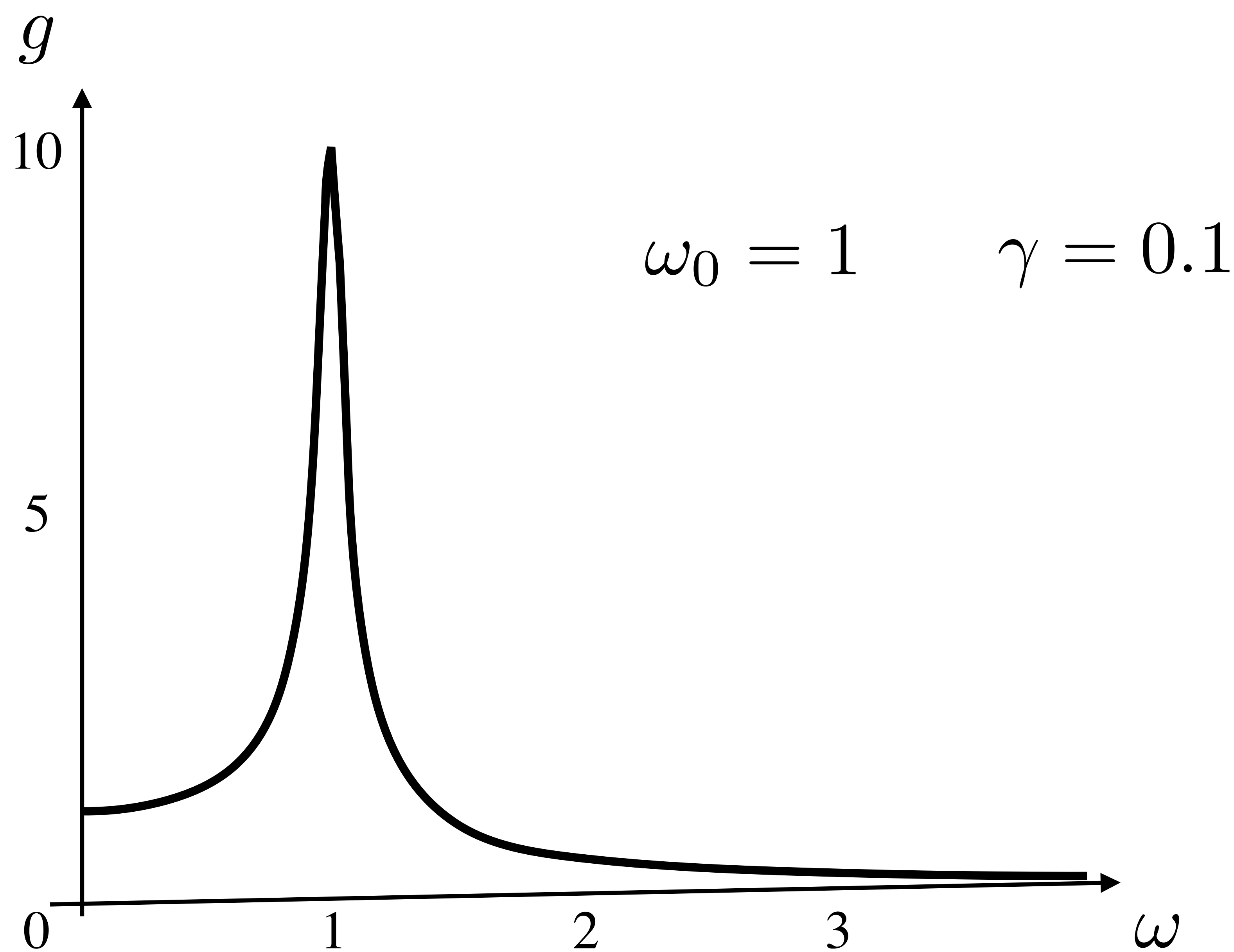
# Comparando forçamento e Solução



# Ganho em amplitude

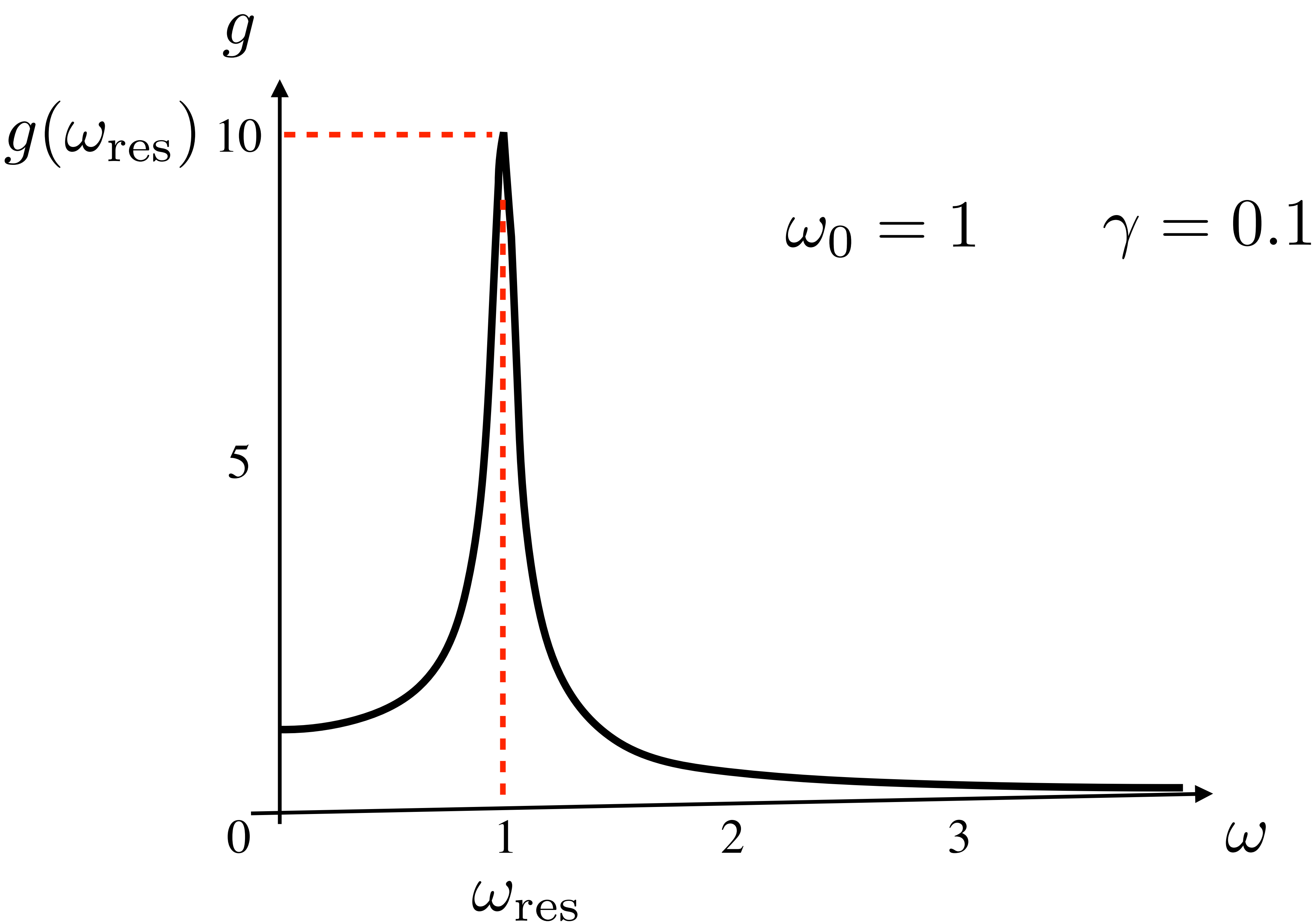
$$g(\omega) = \frac{r(\omega)}{A_0}$$

# Ganho em amplitude



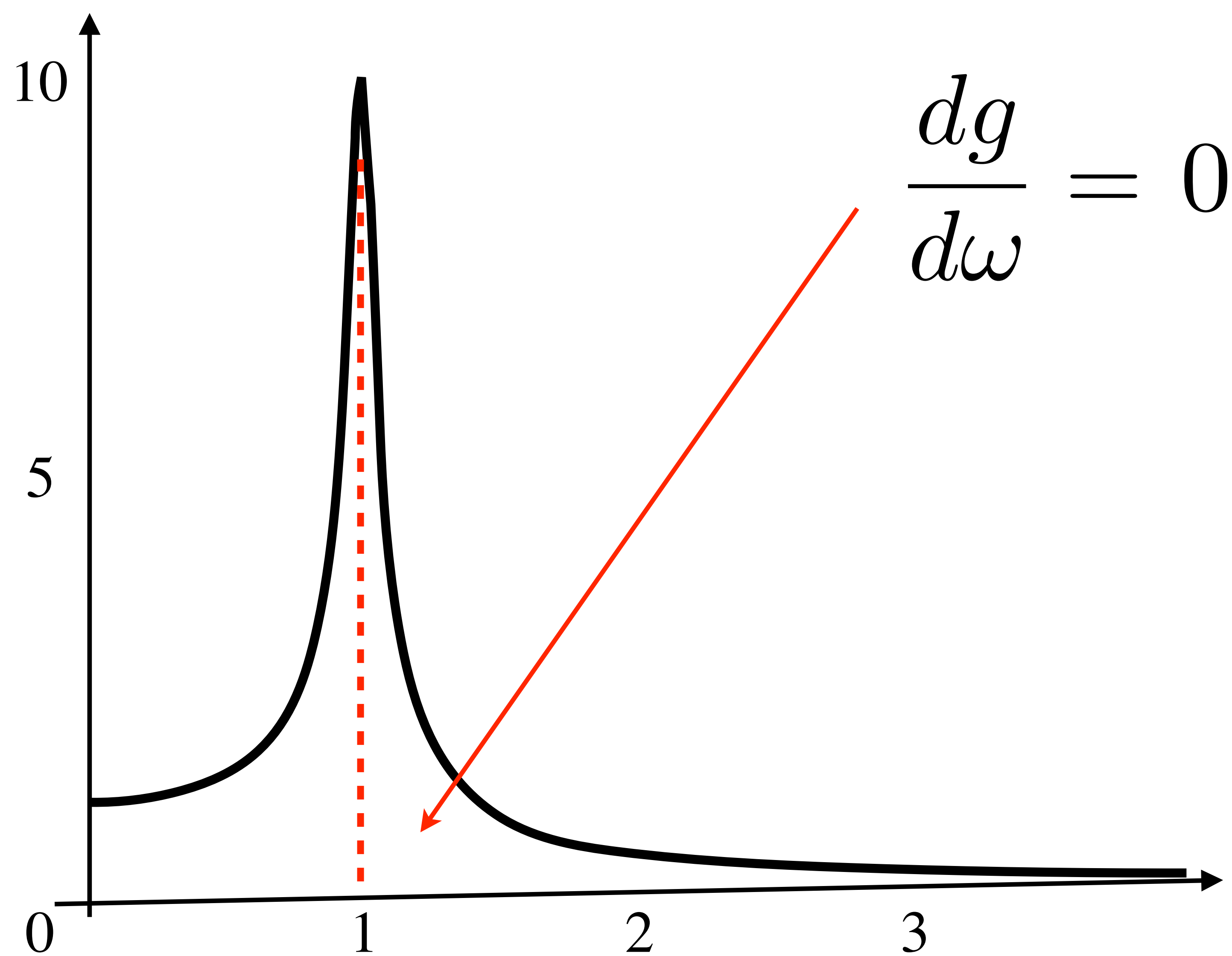

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# Ganho em amplitude



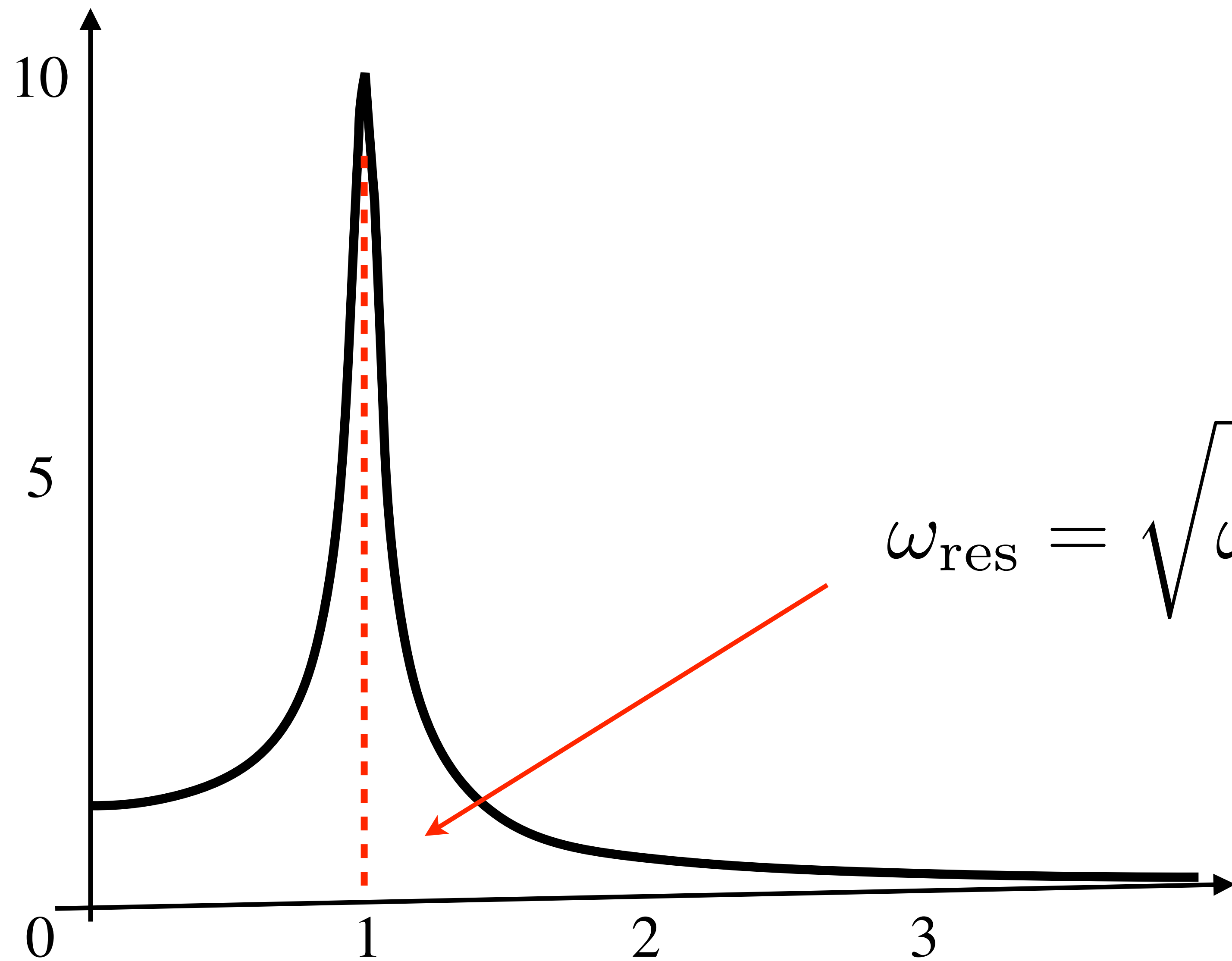

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# Ganho em amplitude




https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

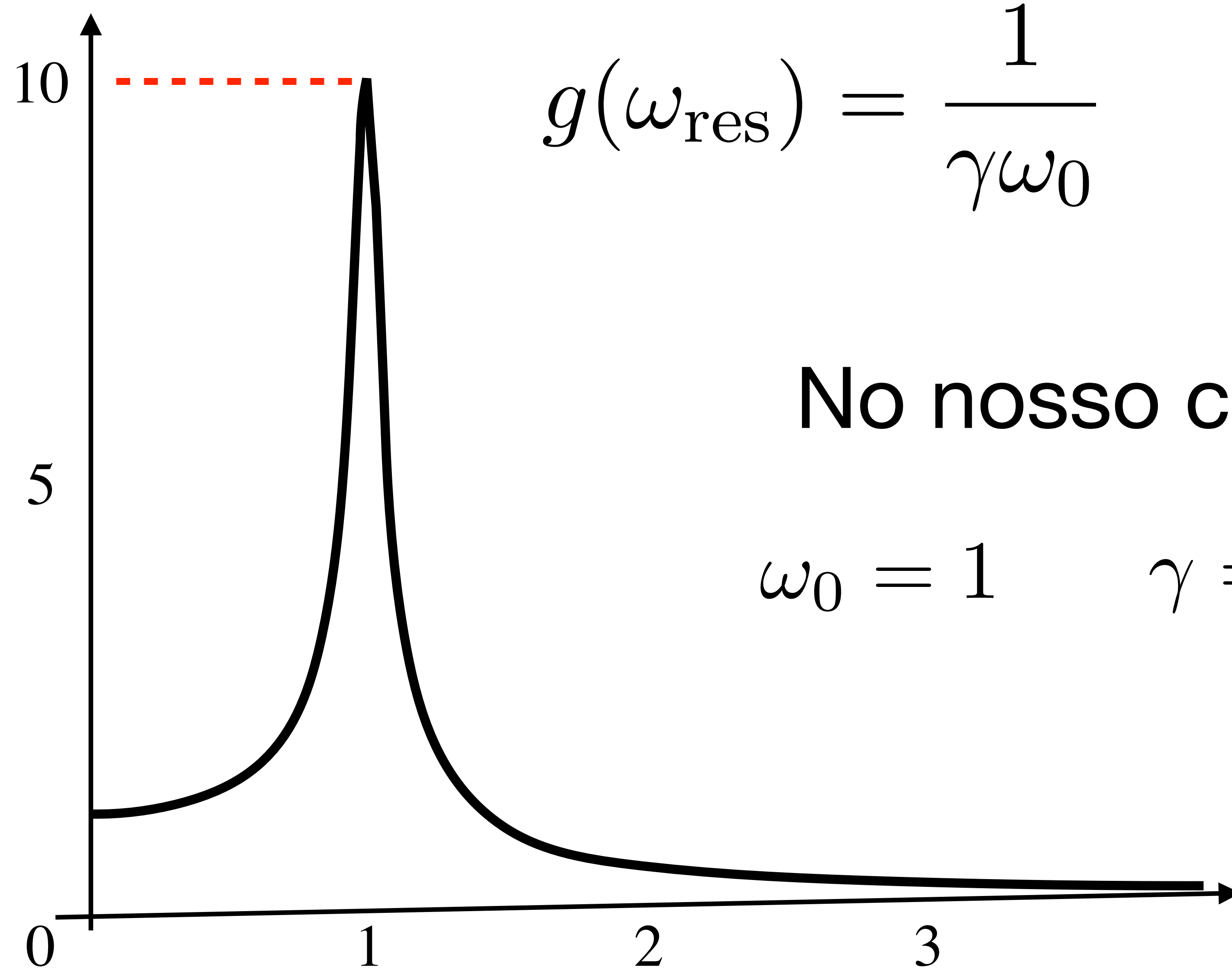
# Ganho em amplitude




$$\omega_{\mathrm{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# Ganho em amplitude




$$g(\omega_{\text{res}}) = \frac{1}{\gamma\omega_0}$$

No nosso caso

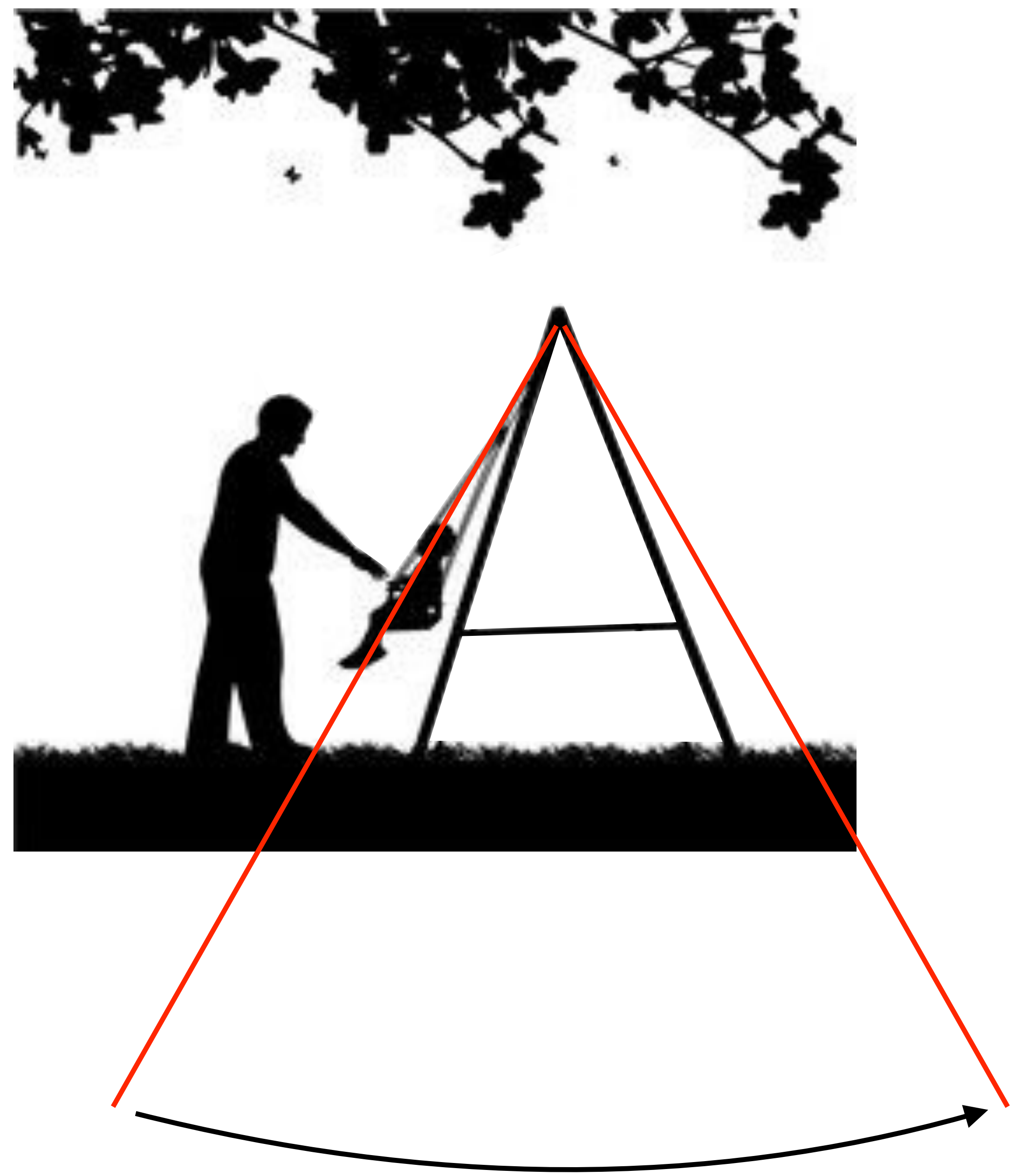
$\omega_0 = 1 \qquad \gamma = 0.1$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# Aplicações da Ressonância

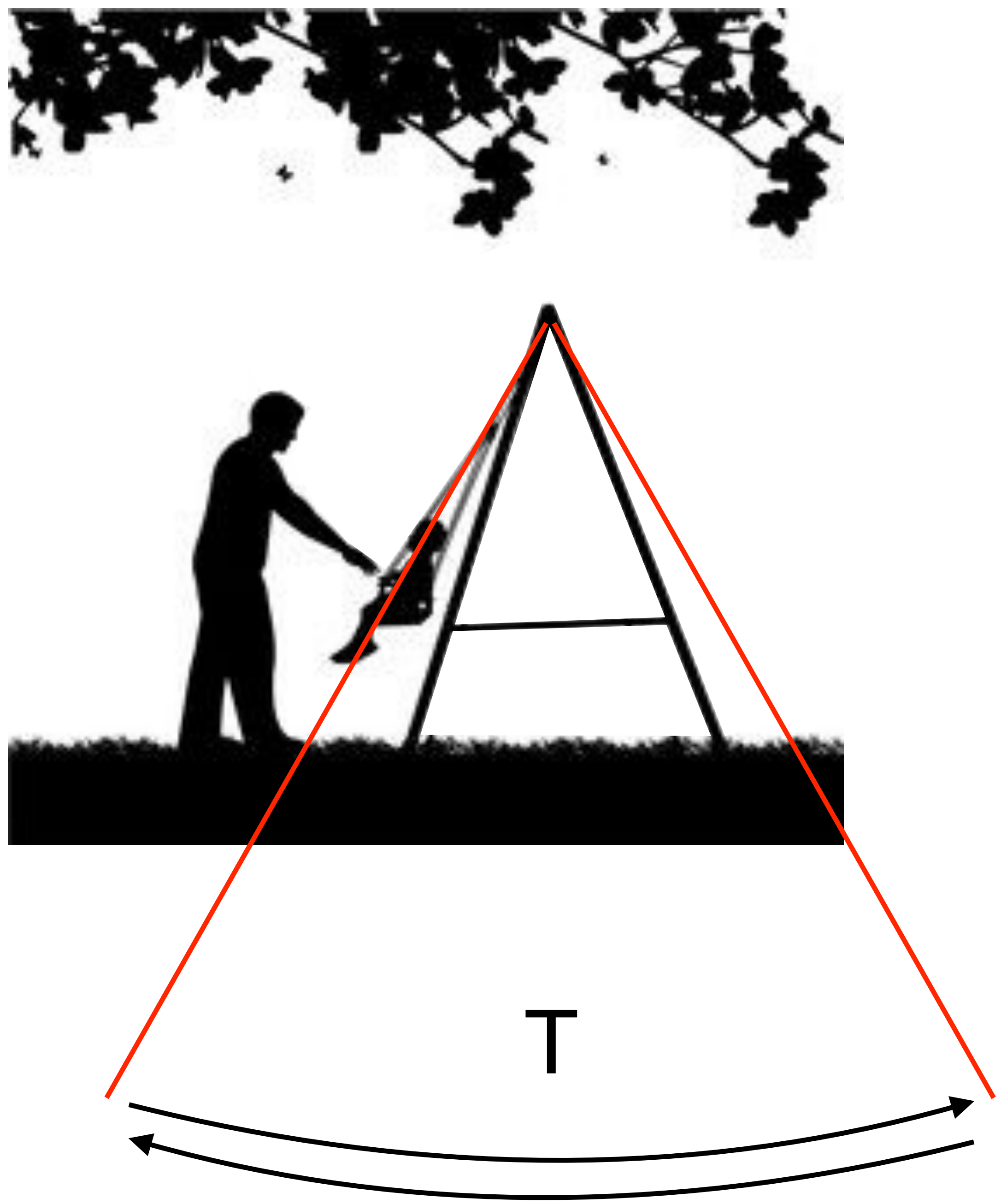
https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# Aplicações da Ressonância



https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# Aplicações da Ressonância




https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

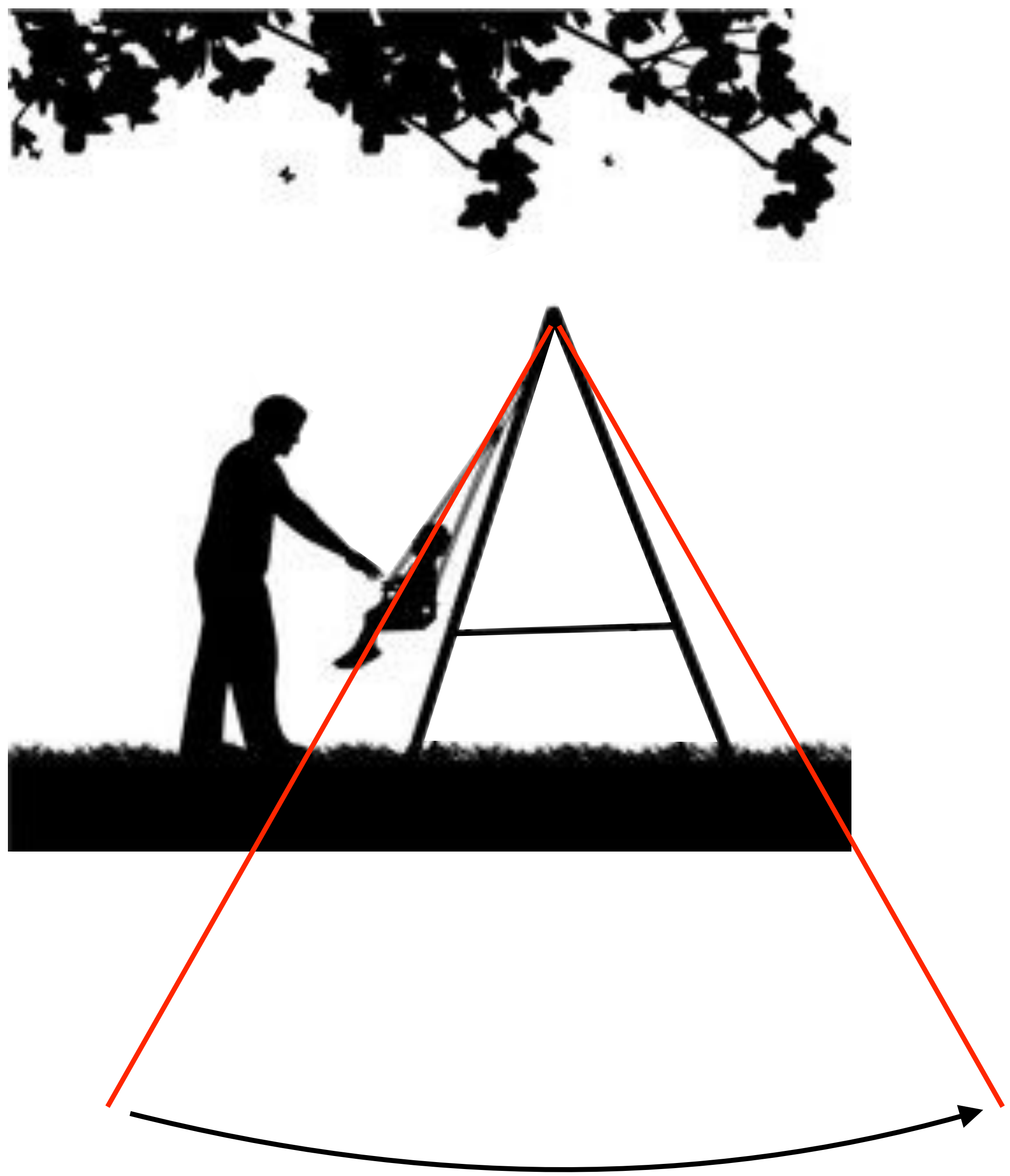
# Aplicações da Ressonância


https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# Aplicações da Ressonância

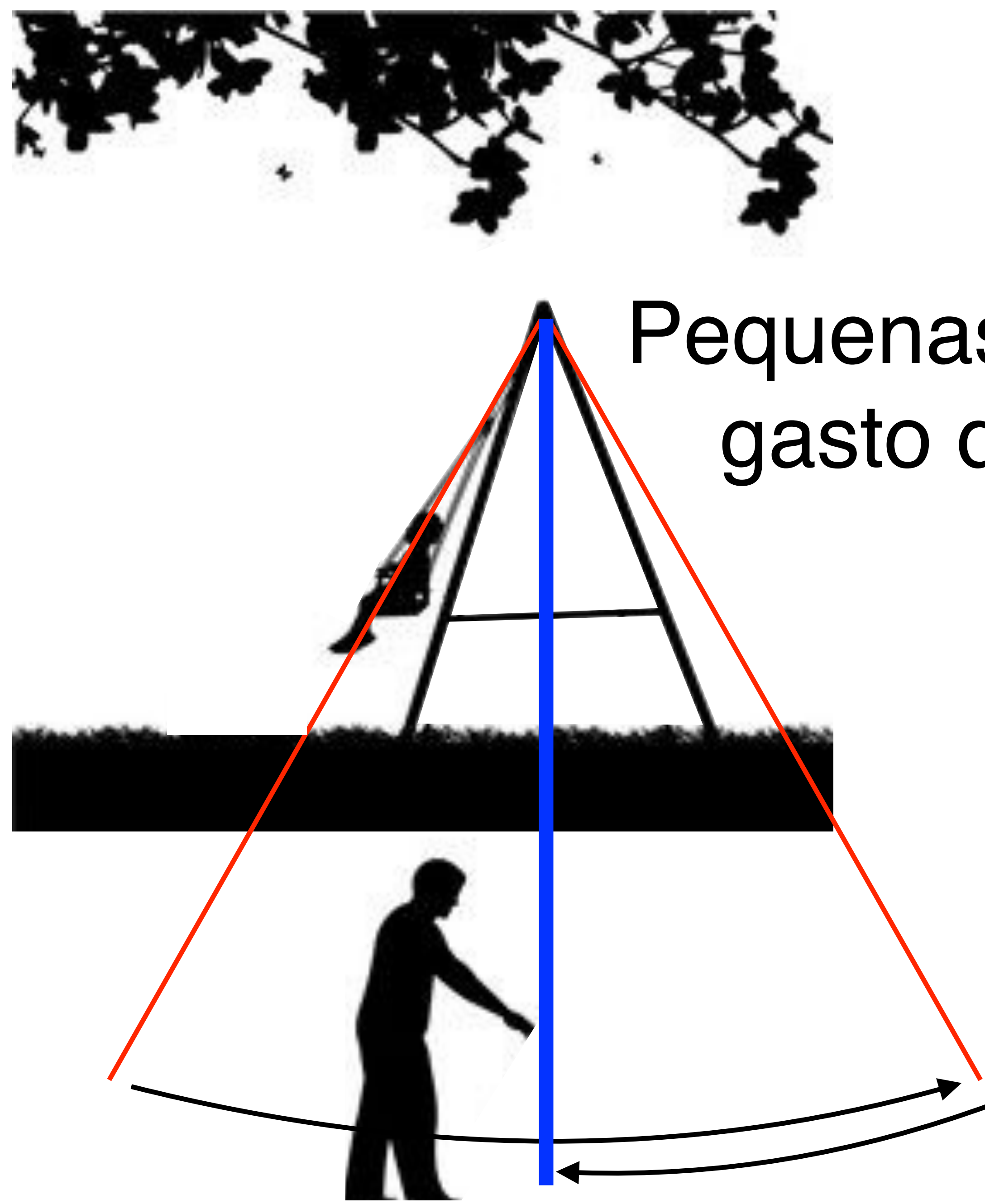
https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# Aplicações da Ressonância



https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

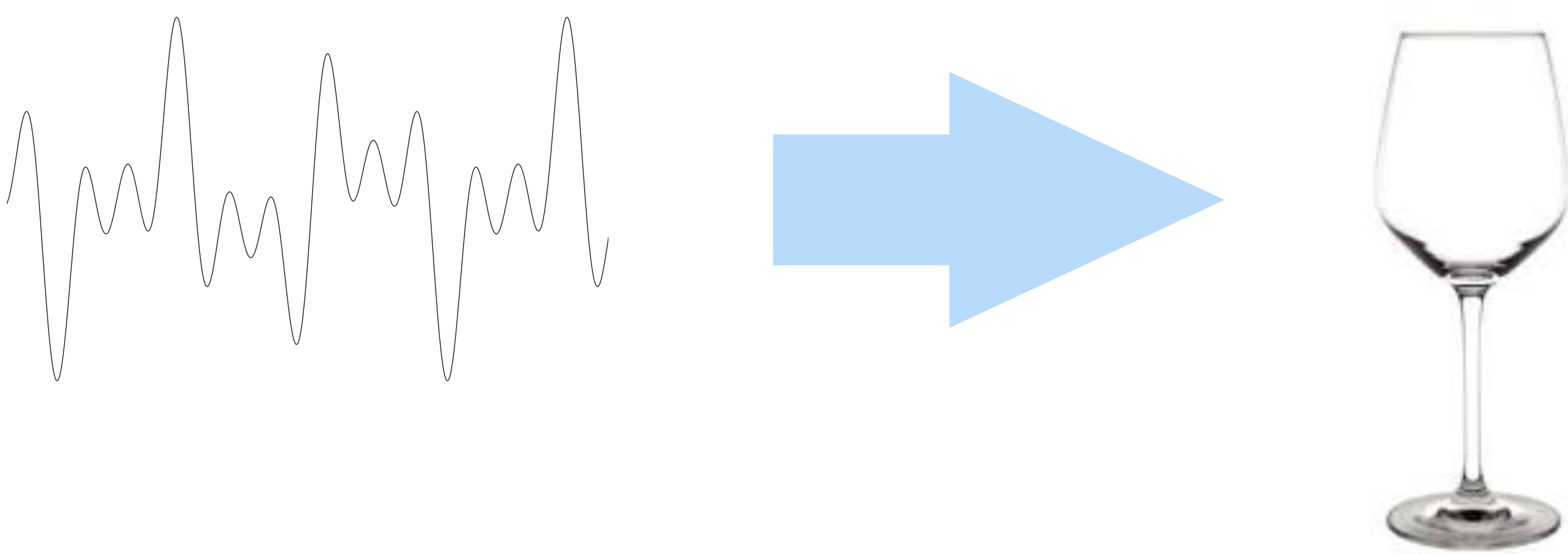
# Aplicações da Ressonância



Pequenas amplitudes
gasto de energia

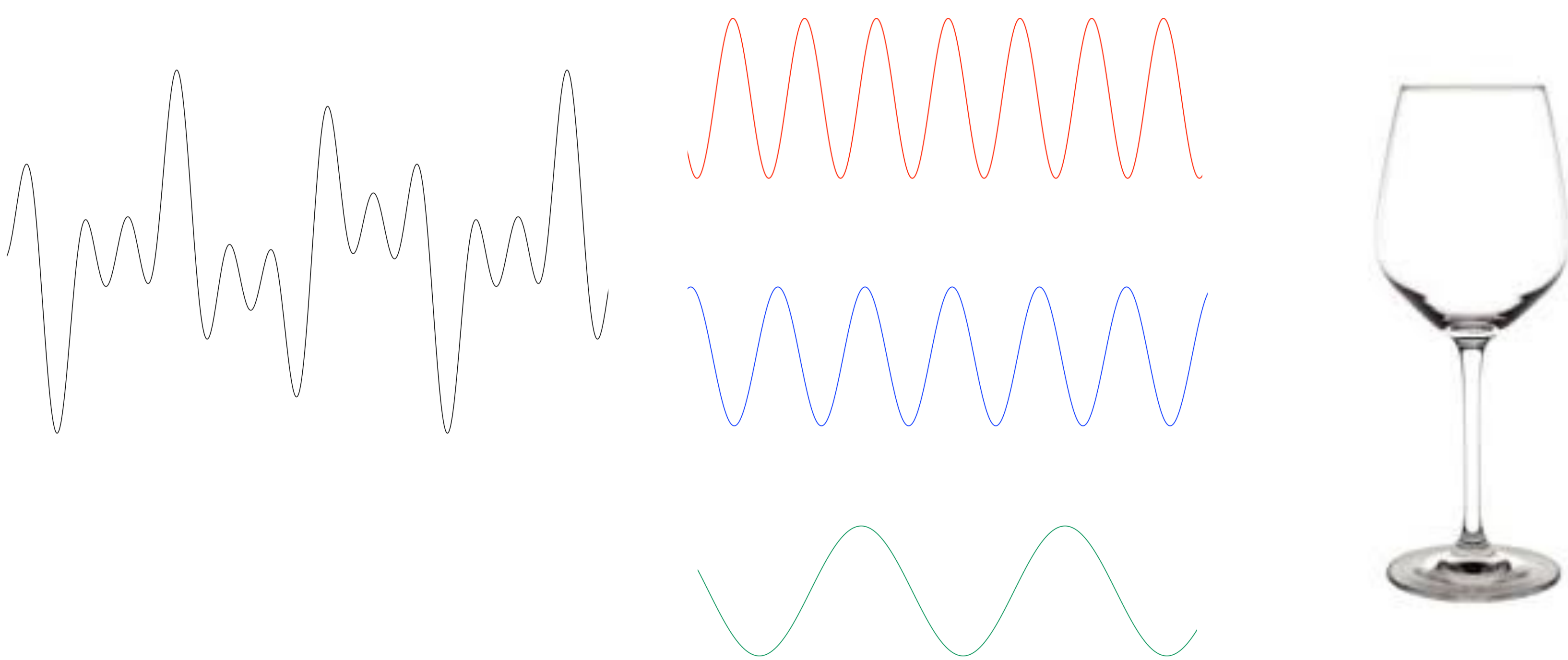
https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# Aplicações da Ressonância



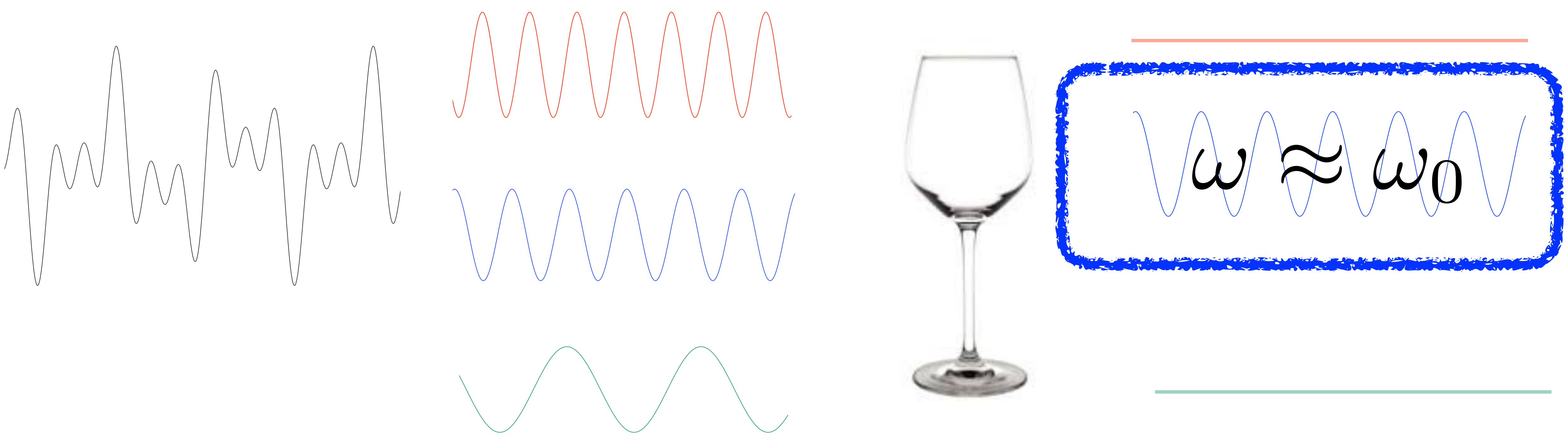
https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# Aplicações da Ressonância



https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# Aplicações da Ressonância




https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

# Aplicações da Ressonância

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html