SME340

$4^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

Sistemas de Equações de Lineares

1. Verifique que $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$ e $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$ são LI.

   Considere α_1 e α_2 reais e

   $$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0$$

   Como o determinante da matriz que atua no vetor de incógnitas é não nulo, a única solução é $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e portanto as soluções são L.I.

2. O problema de valor inicial

   $$v'' = -4v$$

   satisfazendo

   $$v(0) = v_0 \text{ e } v'(0) = v'_0$$

   tem solução $v = v_0 \cos 2t + 1/2 v'_0 \sin 2t$. Determine esta solução reescrevendo a EDO como um sistema de primeira ordem e avaliando o sistema matricial.

   Solução: Seja $u = v'$, então $u' = -4v$. Portanto,

   $$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

   Os autovalores e autovetores são $\lambda_1 = 2i$ com $\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$ e $\lambda_2 = -2i$ com $\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$. Logo, a solução geral será

   $$\begin{pmatrix} v(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} e^{2it} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} e^{-2it}$$

   Impondo condições iniciais concluímos o exercício.

3. Considere o sistema de equações

   $$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

   (a) Verifique que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$ e $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ são soluções.

   Solução: Note que

   $$\vec{x}'_1 = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} \quad \text{mas} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

   e portanto $\vec{x}_1$ é solução. Fazendo o mesmo cálculo concluímos que $\vec{x}_2$ também é solução.

(b) Escreva a solução geral.

Solução: Como o espaço das soluções é bidimensional e $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ são soluções LI temos que a solução geral é

$$\vec{x}_{\text{geral}}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t)$$

4. Ache os autovalores e autovetores para

$$\frac{d}{dt}u = Au = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} u$$

Por que sabemos, sem fazer cálculos, que e^{At} será uma matriz ortogonal e $\|u(t)\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ será constante.

Sabemos que a solução geral é

$$u(t) = e^{At}u_0$$

Pela propriedade $(e^A)^T = e^{A^T} = e^{-A}$ onde na última igualdade utilizamos que a matriz é anti-simétrica $A^T = -A$. Como

$$\|u(t)\|^2 = u(t)^T u(t) = u_0^T e^{(At)^T} e^{At} u_0 = u_0^T e^{-At} e^{At} u_0 = u_0^T u_0$$

ou seja, a transposta da exponencial de A é sua inversa.

5. Escreve o sistema

$$x_1' = 2x_1 - 3tx_2 + \sin t$$
$$x_2' = -x_1 + -x_1^2 + 3x_2 + \cos t$$

na forma

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{f}(\vec{x}, t)$$

onde A é uma matriz autonôma e $\vec{f}$ uma função vetorial. Encontre a solução geral do sistema linear.

Temos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f = \begin{pmatrix} -3tx_2 + \sin t \\ -x_1^2 + \cos t \end{pmatrix}$$

6. Suponha que a população de coelhos c e a população de lobos l é

$$\frac{dc}{dt} = \beta c - 2l$$
$$\frac{dl}{dt} = c + l$$

onde β é um parâmetro que depende de condições externas (clima, alimento dos coelhos, etc.)

(a) Tome $\beta = 4$. Se inicialmente as populações de coelhos e lobos forem $c = 300$ e $l = 200$, quais serão as populações no tempo t?

Para $\beta = 4$ os autovalores e autovetores da matriz linearizada é

$$\lambda_1 = 3 \; e \; v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad \lambda_2 = 2 \; e \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Seja $u = \begin{pmatrix} c \\ l \end{pmatrix}$ e portanto a solução geral é

$$u(t) = c_1 v_1 e^{3t} + c_2 v_2 e^{2t}$$

impondo a condição inicial $u_0 = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix}$ obtemos $c_1 = 100$ e $c_2 = 100$. Logo

$$c(t) = 200e^{3t} + 100e^{2t} \quad \text{e} \quad l(t) = 100e^{3t} + 100e^{2t}$$

(b) Depois de um longo tempo qual é a proporção da população de coelhos em relação a de lobos

Temos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{c(t)}{l(t)} = 2$$

(c) Para quais valores de β este sistema é estável? (Dizemos que um sistema é estável quando todas as suas soluções convergem a zero quando t vai para infinito)

Isso acontecerá quando os autovalores tem parte real negativa. Portanto

$$\text{tr}A = \beta + 1 < 0 \quad \text{e} \quad \det A = \beta + 2 > 0 \Rightarrow -2 < \beta < -1$$

7. Encontre a solução geral do seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} x' &= x - 2y + e^{-5t} \\ y' &= 2x + y \end{aligned}$$

Note que os autovalores a matriz associada são complexos. Reescreva a solução real geral.

(Solução por Victor Hugo de Souza) – O sistema pode ser expresso por

$$X' = AX + B$$

onde

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvamos o sistema homogêneo (eliminando o forçamento B). Um autovalor de A é $\lambda = 1 + 2i$ associado ao autovetor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

e logo duas soluções LI são

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathrm{Re}(e^{\lambda t}v) \\ &= \begin{pmatrix} e^t\cos(2t) \\ e^t\sin(2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e $X_2 = Im(e^{\lambda t}v) = (e^t\sin(2t) \quad -e^t\cos(2t))^\dagger$
Logo a solução geral da homogênea será $X_h = c_1X_1 + c_2X_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Além disso

$$X_p = \frac{e^{-5t}}{20}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

é solução particular. Donde a solução geral será:

$$\begin{aligned} X &= X_h + X_p \\ &= \begin{pmatrix} c_1e^t\cos(2t) + c_2e^t\sin(2t) - \frac{3}{20}e^{-5t} \\ \\ c_1e^t\sin(2t) - c_2e^t\cos(2t) + \frac{1}{20}e^{-5t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

para $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

8. Se A e B comutam então

$$\exp(A+B) = \exp A \exp B$$

Dê um exemplo onde a igualdade não é satisfeita.

9. Prove que para qualquer $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}A\lambda + \mathrm{det}A$$

Mostre que para qualquer $B = PAP^{-1}$ então:

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$$

logo o tr e det são invariantes por transformação de similaridade.

10. Seja T um operador simétrico $T = T^\dagger$ sobre V. Mostre que

i) Todo autovalor de T é real

ii) Autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais

11. Seja A uma transformação anti-simétrica. Prove que $\langle Ax, x\rangle = 0$ para todo vetor x. Há uma recíproca?

12. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se

$$Au = \lambda u \quad \text{e} \quad Av = \beta v \quad \text{com} \quad \lambda \neq \beta$$

então $\{v, u\}$ é um conjunto L.I.

13. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com todos autovalores simples. Então A é diagonalizável.

14. Um resultado fundamental em analise matricial relaciona o determinante de uma matriz a seu tracco. Para qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ temos

$$\det(I + tA + O(t^2)) = 1 + t \times \operatorname{tr}(A) + O(t^2).$$

Demonstre este resultado para $n = 2$ e $n = 3$.