SME 341

1º Semestre - 2019

1ª Lista de Exercícios

Equações Escalares

1. Determine a ordem das equações. Indique se elas são homogêneas, lineares ou não-lineares:

   a) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ Linear homogênea de 2^o ordem

   b) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \sin(t+x) = \sin x$ Não linear e não homogênea de 2^o ordem

   c) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \cos^2 x\dfrac{dy}{dx} = e^x$ Linear não homogênea de 3^o ordem

   d) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \dfrac{dy}{dx} = t^3$ Não linear não homogênea de 2^o ordem

2. Verifique se as funções propostas são soluções das EDO's apresentadas.

   a) $y'' - y = 0$

   Possíveis soluções: $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = ke^x$

Note que

$$y_1'(x) = -e^{-x} \quad \text{e} \quad y_1''(x) = y_1(x)$$

Portanto y_1 resolve a EDO. Para a outra função candidata

$$y_2'(x) = ke^x \quad \text{e} \quad y_2''(x) = y_2(x)$$

logo y_2 também resolve a EDO.

   b) $y'' - y = x$

   Possíveis soluções: $y_1(x) = ax + e^{-x}$, $y_2(x) = k(x + e^{-x})$

Note que

$$y_1'(x) = a + -e^{-x} \quad \text{e} \quad y_1''(x) = e^{-x}$$

Adicionando e subtraindo o termo ax obtemos

$$y_1''(x) = -ax + \underbrace{ax + e^{-x}}_{y_1} \Rightarrow y_1''(x) - y_1(x) = -ax$$

Portanto y_1 é solução apenas se $a = -1$.

   c) $\frac{dx}{dt} + x^2 = 0$

   Possíveis soluções: $x_1(t) = t^{-1}$, $x_2(t) = \ln t^2$

Note que

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{t^2} = -\left(\frac{1}{t}\right)^2 = -x_1^2 \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} + x_1 = 0$$

O função x_2 não é solução.

3. Resolva os problemas de valor inicial

a) $y' + \frac{2}{x}y = y$ com condição inicial $y(1) = 1$

Podemos reescrever a equação como

$$\frac{dy}{y} = \left(1 - \frac{2}{x}\right) dx \quad \text{e portanto} \quad \int_1^y \frac{dy}{y} = \int_1^x \left(1 - \frac{2}{x}\right) dx$$

Integrando obtemos

$$y(x) = \frac{e^{x-1}}{x^2}$$

b) $y' + 6xy = 0$ com condição inicial $y(\pi) = 5$

Como no item anterior reescrevemos a EDO

$$\frac{dy}{y} = -6xdx \quad \text{e portanto} \quad \int_5^y \frac{dy}{y} = \int_\pi^x 6xdx$$

Integrando obtemos

$$y(x) = 5e^{3(x^2-\pi^2)}$$

c) $y' = \cos x$ com condição inicial $y(0) = 0$

$$y(x) = \sin x$$

d) $y' + \frac{2}{x}y = -x^9 y$ com condição inicial $y(1) = 2$

$$y(x) = 2\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{10}(x^{10}-1)}$$

4. As vezes é possível resolver uma equação não-linear realizando uma mudança de variável que converte a equação original numa equação linear. Uma classe importante que equação tem a forma

$$y' + p(t)y = q(t)y^n$$

é chamada de equação de Bernoulli.

a) Resolva a equação de Bernoulli para $n = 0$ e $n = 1$.

Para $n = 0$ resolva a equação pelo método do fator integrante. Obtendo

$$y(t) = e^{-\int_0^t p(s)ds} + \int_0^t e^{-\int_u^t p(s)ds} q(u)du$$

Para $n = 1$ a equacao reduz a $y' = [q(t) - p(t)]y$ e obtemos

$$y(t) = e^{-\int_0^t [q(s)-p(s)]ds} y_0$$

b) Mostre que se $n \neq 0, 1$, então a substituição $v = y^{1-n}$ reduz a equação de Bernoulli a uma equação linear.

A ideia é escrever a EDO para v notando que $v' = \frac{1}{(1-n)y^n} y'$ e substituindo a EDO para y.

5. Resolva as seguintes equações de Bernoulli

   a) $y' + \frac{y}{x} = xy^2$ $\quad y = \frac{1}{-x^2+Cx}$

   b) $y' + y - y^3 = 0$ $\quad y = \frac{1}{\sqrt{1-ae^{2t}}}$

   c) $y' = ry(1-y)$, com $r > 0$ $\quad y = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{y_0}-1\right)e^{-rt}}$

6. Certo material radioativo decresce a uma taxa proporcional a quantidade de material presente. Se, para uma quantidade inicial de 100 mg, se observa um decréscimo de 5% após dois anos, determine.

   a) A quantidade restante como função do tempo

   Tomando $\alpha = \ln\left(\frac{95}{100}\right)^{1/2}$, então

$$m(t) = 100e^{\alpha t}$$

   b) O tempo necessário para uma redução de 10% da quantidade inicial

$$T = \frac{1}{\alpha}\ln 0.9$$

7. Uma partícula de massa m desloca-se sobre o eixo Ox sob a ação da força resultante $f(x)$, onde f é contínua. Seja $V(x)$ uma função definida em J tal que para todo $x \in J$ tal que

$$V' = -f(x)$$

   (diz-se que a força f deriva do potencial V). Seja $x : I \to J$ a função de posição da partícula, (para cada instante $t \in I$, $x(t) \in J$ é a posição da partícula em t). Assuma que o movimento da partícula pela lei de Newton:

$$m\ddot{x}(t) = f(x(t)).$$

   a) Demonstre que existe uma constante $E \in \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in I$:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + V(x(t)) = E$$

Existência e Unicidade de Soluções

8. Considere o problema de valor inicial no qual se procura a solução da equação
$$\dot{y} = -\frac{1}{y}$$
que satisfaça a condição inicial $y(0) = 0$. Mostre que este problema não possui nenhuma solução real para $t > 0$. Qual das hipóteses do teorema de Picard é violada? A solução geral seria
$$y(t) = \sqrt{2(t_0 + y_0^2/2 - t)}$$
mas para $y_0 = t_0 = 0$ temos a raiz de um número negativo e portanto não existe solução. Note que a função $1/y$ não é diferenciável em $y = 0$ isso viola o hipótese.

9. Considere o problema de valor inicial no qual se procura a solução da equação
$$\dot{y} = 3y^{2/3}$$
que satisfaça a condição $y(0) = 0$. Mostre que este problema não tem solução única. Qual das hipóteses do teorema de Picard é violada?
De fato, note que
$$y_1(t) = 0 \quad \text{e} \quad y(t) = t^3$$
ambas resolvem a EDO. S função $y^{2/3}$ não é diferencíavel em $y = 0$

10. Considere o problema de valor inicial no qual se procura a solução da equação
$$\dot{y} = y^2$$
que satisfaça a condição $y(0) = y_0$ com $y_0 \neq 0$. Mostre que a solução deste problema diverge a tempo finito $t = 1/y_0$.
A solução é
$$y(t) = \frac{1}{y_0 - t}$$
Logo a solução explode a tempo finito.