4^o Lista : SME341

Operadores Lineares

1. Considere o sistema linear homogêneo
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 &= 0 \end{aligned}$$
Determine uma base e a dimensão do subespaço das soluções do sistema.

2. Quais das seguintes aplicações são operadores lineares
Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
a) $F(x, y, z) = (x - y, x + y, 0)$
b) $F(x, y, z) = (x - y, x + y, 0)$
c) $F(x, y, z) = (2x - y + z, 0, 0)$
d) $F(x, y, z) = (2x^2 + 3y, x, z)$
e) $F(x, y, z) = (x + y - 1, 2\ln x - y + 2)$
f) $F(x, y, z) = F(z, x, y)$
Seja $F : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ tal que
g) $F(p(t)) = tp'(t)$
h) $F(p(t)) = t(p^2(t))$
i) $F(p(t)) = p'(t) + t^2p''(t)$

3. Para cada uma das transformações lineares a seguir determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem:
a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, F(x, y, z) = x + y + z$
b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, F(x, y) = 2x, x + y$
c) $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, F(x, y, z, t) = 2x + x - z + 3t$
d) $F : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}); F(p(t)) = t^2p''(t)$
e) $F : \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}), F(A) = MA + A$, onde $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Diga se é Falso ou Verdadeira cada uma das afirmações abaixo, justifique

   a) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ que é injetora

   b) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to P_2(\mathbb{R})$ que é sobrejetora

   c) Subconjuntos de um conjunto linearmente dependente são linearmente dependentes

   d) Os espaços vetoriais $P_4(\mathbb{R})$ e $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ são isomorfos

5. Suponha que λ_1 e λ_2 sejam autovetores distintos e diferentes de zero de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Mostre que :

   a) Os autovetores v_1 e v_2 correspondentes são L.I.

   b) $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são L.I.

6. Ache os autovalores e autovetores correspondentes das transformações lineares dadas:

   1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2y, x)$
   2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$
   3. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $(x, y, z) \mapsto (x + y, x - y + 2x, 2x + y - z)$
   4. $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$

7. Seja T o operador linear de $\mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0) = (2, 1)$ $T(0, 1) = (1, 4)$

   a) Determine $T(2, 4)$

   b) Determine $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2, 3)$

   c) Prove que T é uma aplicação bijetora.

8. Utilize a forma diagonal para encontrar A^n nos seguintes casos (n natural)

   a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

   Você pode generalizar o seu procedimento para o caso de uma matriz quadrada qualquer? Quais as condições?