Capítulo 4

Transformada de Laplace

4.1 Integrais Impróprias

Seja $f(t)$ uma função definida para todo $t \geq a$ tal que exista a integral $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ qualquer que seja $b > a$. A **integral imprópria** de f é definida por

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)\,dt, \tag{4.1}$$

caso o limite exista e seja finito. Neste caso, dizemos que f é **integrável no sentido impróprio** em $[a, \infty)$ ou que a integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty f(t)\,dt$ é **convergente**. Caso contrário, dizemos que a integral imprópria é **divergente**.

Por exemplo, a integral imprópria $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\,dt$ é convergente, pois

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-t}\,dt = \lim_{b\to\infty} \big[-e^{-t}\big]_0^b = \lim_{b\to\infty} (1 - e^{-b}) = 1.$$

A integral imprópria $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, pois

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dt}{t} = \lim_{b\to\infty} \big[\ln t\big]_1^b = \infty.$$

Exercícios 4.1. 1) Verifique se cada uma das integrais dadas abaixo converge ou diverge:

$$\text{a)} \int_2^{\infty} \frac{dt}{(t-1)^{3/2}}. \quad \text{b)} \int_0^{\infty} t\, e^{-t^2}\, dt. \quad \text{c)} \int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t}\, dt. \quad \text{d)} \int_e^{\infty} \frac{dt}{t\,(\ln t)^2}.$$

2) Mostre que a integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ é convergente se $p > 1$ e é divergente se $p \leq 1$.

Integrais impróprias em que o integrando depende ainda de uma outra variável são de grande importância em matemática e em outras aplicações. O interesse central deste capítulo é estudar integrais da forma

$$\int_0^{\infty} e^{-s\,t} f(t)\, dt. \tag{4.2}$$

A integral (4.2) define uma função $F(s)$, da variável s. O domínio desta função é constituido por todos os valores de s tais que esta integral seja convergente.

Consideremos, por exemplo

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\,t}\, dt. \tag{4.3}$$

Esta integral é divergente se $s \leq 0$. Para $s > 0$, temos

$$\int_0^{\infty} e^{-s\,t}\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-s\,t}\, dt = \lim_{b\to\infty} \Big(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s\,b}}{s}\Big) = \frac{1}{s}.$$

Deste modo,

$$F(s) = \frac{1}{s} \quad (s > 0).$$

Faça o mesmo para as integrais abaixo e obtenha as igualdades:

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-s\,t}\, t\, dt = \frac{1}{s^2}$ $(s > 0)$. b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-s\,t} \operatorname{sen} t\, dt = \frac{1}{s^2+1}$ $(s > 0)$.

c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-s\,t}\, t^2\, dt = \frac{2}{s^3}$ $(s > 0)$. d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-s\,t} \operatorname{senh} t\, dt = \frac{1}{s^2-1}$ $(s > 1)$.

[sugestão: $\operatorname{senh} t = (e^t - e^t)/2$].

As integrais acima sugerem que o domínio da função $F(s)$ seja um intervalo da forma (a, ∞). Pode-se mostrar que isto é verdadeiro em geral.

4.2 A Transformada de Laplace

Seja $f(t)$ uma função definida para todo $t \geq 0$. A função

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s\,t} f(t)\, dt \tag{4.4}$$

é chamada **transformada de Laplace** de $f(t)$, e denotada por $\mathcal{L}[f(t)]$.

Exemplo 4.1. De acordo com o exemplo da seção anterior temos para $s > 0$

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^\infty e^{-s\,t}\, dt = \frac{1}{s}. \; \square$$

Exemplo 4.2. Para $s > c$, temos

$$\mathcal{L}[e^{c\,t}] = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-s\,t} e^{c\,t}\, dt = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{(c-s)\,t}}{c-s}\right]_0^b = \frac{1}{s-c}. \; \square$$

Exemplo 4.3. Integrando por partes duas vezes temos

$$\int_0^b e^{-s\,t} \cos w\,t\; dt = \left.\frac{w\, e^{-s\,t} \operatorname{sen} w\,t - s\, e^{-s\,t} \cos w\,t}{s^2+w^2}\right|_0^b,$$

$$\int_0^b e^{-s\,t} \operatorname{sen} w\,t\,dt = \left. \frac{w\,e^{-s\,t}\,\cos wt - s\,e^{-s\,t}\,\operatorname{sen} w\,t}{s^2+w^2} \right|_0^b .$$

Fazendo $b \to \infty$ em cada uma destas igualdades obtemos, para $s > 0$,

$$\mathcal{L}[\cos w\,t] = \frac{s}{s^2+w^2} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}[\operatorname{sen} w\,t] = \frac{w}{s^2+w^2}. \; \square$$

Exemplo 4.4. Cálculo de $\mathcal{L}[t^n]$ para n inteiro positivo. Integrando por partes, temos (para $s > 0$)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^n] &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-s\,t}\,t^n\,dt = \lim_{b\to\infty} \Big[-\left.\frac{t^n\,e^{-s\,t}}{s}\right|_0^b + \frac{n}{s}\int_0^b e^{-s\,t}\,t^{n-1}\,dt \Big] \\ &= \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-s\,t}\,t^{n-1}\,dt = \frac{n}{s}\,\mathcal{L}[t^{n-1}].\end{aligned}$$

Assim, se $n = 1$, temos $\mathcal{L}[t] = \dfrac{1}{s}\,\mathcal{L}[1] = \dfrac{1}{s^2}$.

Se $n \geq 2$, temos $\mathcal{L}[t^n] = \dfrac{n}{s}\mathcal{L}[t^{n-1}] = \dfrac{n(n-1)}{s^2}\mathcal{L}[t^{n-2}] = \cdots = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$. $\square$

4.3 Algumas Propriedades

As propriedades que enunciamos a seguir são de grande utilidade para o cálculo de transformadas.

Propriedade 1 (Linearidade): *Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$ e a, b são constantes, então*

$$\mathcal{L}[a\,f(t) + b\,g(t)] = a\,F(s) + b\,G(s) = a\,\mathcal{L}[f(t)] + b\,\mathcal{L}[g(t)].$$

De fato,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[a\,f(t) + b\,g(t)] &= \int_0^\infty e^{-s\,t}[a\,f(t) + b\,g(t)]\,dt = \\ &= a\int_0^\infty e^{-s\,t}\,f(t)\,dt + b\int_0^\infty e^{-s\,t}\,g(t)\,dt \\ &= a\,\mathcal{L}[f(t)] + b\,\mathcal{L}[g(t)]. \; \square\end{aligned}$$

Exemplo 4.5. Calculemos $\mathcal{L}[\operatorname{senh} a\,t]$, usando a Propriedade 1.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\operatorname{senh} a\,t] &= \mathcal{L}[\frac{1}{2}(e^{a\,t} - e^{-a\,t})] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{a\,t}] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-a\,t}] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > |a|.\end{aligned}$$

De modo análogo obtemos $\mathcal{L}[\cosh a\,t] = \dfrac{s}{s^2-a^2}$, para $s > |a|$. $\square$

Propriedade 2: *Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, para $s > s_0$, então*

$$\mathcal{L}[e^{a\,t} f(t)] = F(s-a), \ \textit{para} \ \ s > s_0 + a. \tag{4.5}$$

De fato,

$$\mathcal{L}[e^{a\,t} f(t)] = \int_0^\infty e^{-s\,t} e^{a\,t} f(t)\ dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)\,t} f(t)\,dt = F(s-a). \ \square$$

Usando esta propriedade e os exemplos precedentes, podemos escrever

$$\mathcal{L}[e^{a\,t} \operatorname{sen} \omega\,t] = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}[e^{a\,t} \cos \omega\,t] = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{a\,t} t^n] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

Propriedade 3: *Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, então*

$$\mathcal{L}[t^n\, f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\ F(s). \tag{4.6}$$

Façamos a verificação para $n = 1$. Temos

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-s\,t} f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\ e^{-s\,t} f(t)\,dt = -\int_0^\infty e^{-s\,t}\, t\, f(t)\,dt.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}[t\, f(t)] = -F'(s). \tag{4.7}$$

Aplicando repetidas vezes a igualdade (4.7), obtemos (4.6). $\square$

EXEMPLO 4.6. Segue de (4.6) com $n = 2$ e $n = 1$ que

$$\mathcal{L}[t^2\, e^{5\,t}] = \frac{d^2}{ds^2}\,\Big(\frac{1}{s-5}\Big) = \frac{2}{(s-5)^3} \qquad \text{e}$$
$$\mathcal{L}[t \text{ sen}\, 3\,t] = -\frac{d}{ds}\,\Big(\frac{3}{s^2+9}\Big) = \frac{6\,s}{(s^2+9)^2}. \; \square$$

A próxima propriedade faz uso do seguinte conceito:

Uma função $f(t)$ é de **ordem exponencial** se existirem constantes M, $\alpha > 0$ tais que para todo t suficientemente grande

$$|f(t)| \le Me^{\alpha t}.$$

As funções $\operatorname{sen} t$, $\cos t$, $e^{k\,t}$ e t^n $(n \ge 0)$ são de ordem exponencial pois $|\operatorname{sen} t| \le 1$, $|\cos t| \le 1$ e $|e^{k\,t}| = e^{k\,t}$ para todo $t \ge 0$. Para a função t^n, notemos que, para t suficientemente grande, $|t^n| \le e^t$, pois $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^n}{e^t} = 0$.

A função e^{t^2} não é de ordem exponencial, uma vez que para qualquer $\alpha > 0$ temos que $\lim\limits_{t\to\infty} e^{t^2} e^{-\alpha\,t} = \infty$.

PROPRIEDADE 4: *Suponha que f e f' sejam integráveis em $[0, b]$, para todo $b > 0$. Se f for de ordem exponencial, então existe $\mathcal{L}[f'(t)]$ e*

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0). \tag{4.8}$$

De fato, integrando por partes, temos

$$\int_0^b e^{-s\,t} f'(t)\,dt = e^{-s\,b}\,f(b) - f(0) + s\int_0^b e^{-s\,t}\,f(t)\,dt.$$

Fazendo $b \to \infty$, a integral do 1º membro tende a $\mathcal{L}[f'(t)]$, a integral do 2º membro tende a $\mathcal{L}[f(t)]$ e a parcela $e^{-s\,b}\,f(b)$ tende a zero, pois f é de ordem exponencial (os valores de s devem ser maiores do que a constante α da definição de ordem exponencial). $\square$

Observação 4.1. Esta propriedade aplica-se a derivadas de ordem superior. Por exemplo, para a derivada segunda, a igualdade (4.8) implica

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''(t)] &= s\,\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0)\\ &= s\,\{s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0)\} - f'(0)\\ &= s^2\,\mathcal{L}[f(t)] - s\,f(0) - f'(0).\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2\,\mathcal{L}[f(t)] - s\,f(0) - f'(0). \ \Box \tag{4.9}$$

Observação 4.2. As igualdades (4.8) e (4.9) são de grande importância, especialmente na resolução de equações diferenciais, como veremos adiante. Estas igualdades também podem ser utilizadas para obter transformadas de Laplace de funções. Calculemos, por exemplo, $\mathcal{L}[e^{k\,t}]$ utilizando (4.8). Notemos que a função $f(t) = e^{k\,t}$ satisfaz $f'(t) = k\,e^{k\,t}$ e $f(0) = 1$. Substituindo estes dados em (4.8), obteremos que $\mathcal{L}[ke^{k\,t}] = s\,\mathcal{L}[e^{k\,t}] - 1$, donde $(s-k)\,\mathcal{L}[e^{k\,t}] = 1$. Logo,

$$\mathcal{L}[e^{k\,t}] = \frac{1}{s-k}. \ \Box$$

Exercícios 4.2. 1) Calcule a transformada de Laplace das seguintes funções:

a) $t^2 - 3\,t + 2$. b) $4\,\cos 3\,t - 5\,\operatorname{sen} 2\,t$. c) $2\,t\,e^{3\,t}$.

d) $t^2\,\cos 5\,t$. e) $t\,e^{2\,t}\,\operatorname{sen} 3\,t$. f) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{se } t > \pi. \end{cases}$

2) Use a igualdade (4.9) para mostrar que

$$\mathcal{L}[\cos\omega\,t] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}[\operatorname{sen}\omega\,t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

4.4 Transformada Inversa - Frações Parciais

Dada uma função $F(s)$, definida em um intervalo (a, ∞), um problema que se coloca é o de achar uma função $f(t)$ tal que $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. Uma tal f é chamada **Transformada Inversa** de F e será indicada por $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

Os exemplos da Seção 4.2 fornecem

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}] = 1 \qquad \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s-c}] = e^{c\,t} \qquad \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^{n+1}}] = \frac{t^n}{n!}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+\omega^2}] = \cos\omega\, t \qquad \mathcal{L}^{-1}[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}] = \operatorname{sen}\omega\, t.$$

Usando esta tabela de transformada inversa e as Propriedades 1, 2 e 3, podemos calcular transformadas inversas de um grande número de funções.

Exemplo 4.7. Calcule $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{s^2-4s+5}]$.

Solução: Notando que $s^2 - 4s + 5 = (s-2)^2 + 1$, e usando a Propriedade 2, podemos escrever

$$\frac{1}{s^2-4s+5} = \frac{1}{(s-2)^2+1} = \mathcal{L}[e^{2\,t}\,\operatorname{sen} t].$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2-4s+5}] = e^{2\,t}\,\operatorname{sen} t. \;\Box$$

Exemplo 4.8. Calcule $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{(s-5)^3}]$.

Solução: Notemos que $\dfrac{d^2}{ds^2}(\dfrac{1}{s-5}) = \dfrac{2}{(s-5)^3}$, donde

$$\frac{1}{(s-5)^3} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}(\frac{1}{s-5}) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}[e^{5\,t}] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[t^2\,e^{5\,t}] = \mathcal{L}[\frac{1}{2}t^2\,e^{5\,t}].$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s-5)^3}] = \frac{1}{2}t^2\,e^{5\,t}. \ \Box$$

Exemplo 4.9. Calcule $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{s+2}{s^2+2\,s+10}]$.

Solução: Podemos escrever $s^2+2\,s+10 = (s+1)^2+9$, donde

$$\frac{s+2}{s^2+2\,s+10} = \frac{s+1+1}{(s+1)^2+9} = \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + \frac{1}{3}\,\frac{3}{(s+1)^2+3^2}.$$

Agora, notemos que

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}] = e^{-t}\,\cos 3\,t \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}[\frac{3}{(s+1)^2+3^2}] = e^{-t}\,\operatorname{sen} 3\,t.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+2}{s^2+2s+10}] = e^{-t}\,\cos 3\,t + \frac{1}{3}\,e^{-t}\,\operatorname{sen} 3\,t. \ \Box$$

Observe que este procedimento aplica-se a expressões do tipo

$$\frac{A\,s+B}{s^2+p\,s+q} \tag{4.10}$$

em que o denominador não possui raízes reais.

Isto sugere que usemos o método das frações parciais para calcular $\mathcal{L}^{-1}[P(s)/Q(s)]$, em que P e Q são polinômios e o grau de P é menor que o grau de Q. Este método transforma um tal quociente em uma soma de frações da forma (4.10) e frações da forma $C/(s-a)$. Acreditamos que o leitor esteja suficientemente familiarizado com a decomposição em frações parciais, e vamos apenas exemplificar sua utilização no cálculo de $\mathcal{L}^{-1}$.

Exemplo 4.10. Calcule $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{3\,s^2-7\,s+12}{(s-2)\,(s-3)\,(s+2)}]$.

Solução: Escrevemos $\dfrac{3s^2-7\,s+12}{(s-2)\,(s-3)\,(s+2)}=\dfrac{A}{s-2}+\dfrac{B}{s-3}+\dfrac{c}{s+2}$. Eliminando denominadores, obtemos

$$A\,(s-3)\,(s+2)+B\,(s-2)\,(s+2)+C\,(s-2)\,(s-3)\equiv 3s^2-7\,s+12.$$

Substituindo $s=2$, obtemos $-4A=10$ o que implica que $A=-5/2$. Analogamente, obtemos $B=18/5$ e $C=19/10$. Temos então

$$\frac{3\,s^2-7\,s+12}{(s-2)\,(s-3)\,(s+2)}=-\frac{5}{2}\,\frac{1}{s-2}+\frac{18}{5}\,\frac{1}{s-3}+\frac{19}{10}\,\frac{1}{s+2}.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{3\,s^2-7\,s+12}{(s-2)\,(s-3)\,(s+2)}]=-\frac{5}{2}\,e^{2\,t}+\frac{18}{5}\,e^{3\,t}+\frac{19}{10}\,e^{-2\,t}.\ \square$$

Exemplo 4.11. Calcule $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{2\,s^2+9\,s+7}{(s-4)\,(s^2+9)}]$.

Solução: Escrevemos $\dfrac{2\,s^2+9\,s+7}{(s-4)\,(s^2+9)}=\dfrac{A}{s-4}+\dfrac{B\,s+C}{s^2+9}$. Eliminando denominadores, obtemos

$$A\,(s^2+9)+(B\,s+C)\,(s-4)\equiv 2\,s^2+9\,s+7$$

ou $(A+B)\,s^2+(C-4\,B)\,s+(9\,A-4C)\equiv 2\,s^2+9\,s+7$. Igualando os termos de mesma potência, obtemos

$$\begin{cases} \quad A+B &= 2\\ -4\,B+C &= 9\\ 9\,A-4\,C &= 7.\end{cases}$$