Equações Diferenciais

Transformada de Laplace

Tiago Pereira
tiago@icmc.usp.br

ICMC CeMEAI USP

O que é a transformada de Laplace

Ferramenta para resolução de EDO

O que é a transformada de Laplace

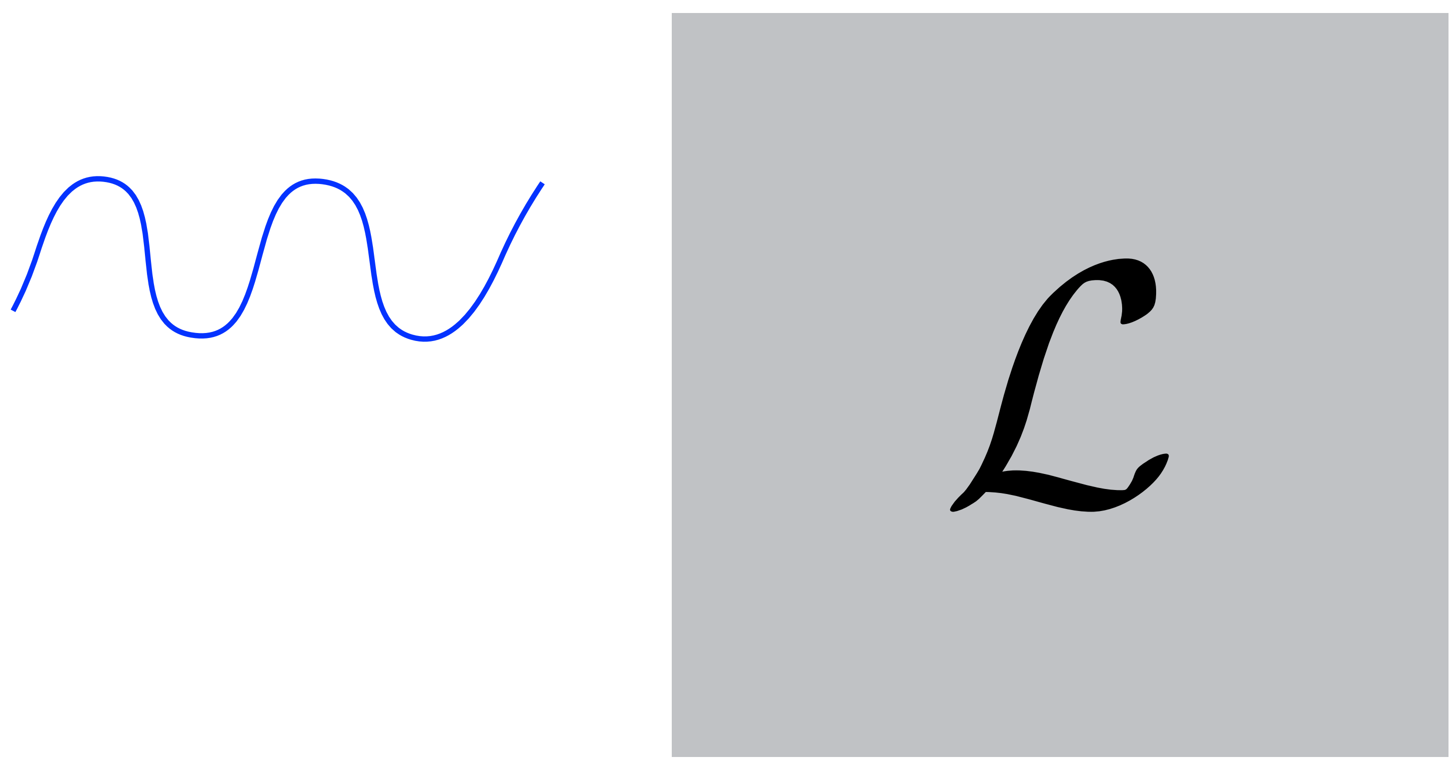
1785 estudando Teoria de Probabilidade

O que é a transformada de Laplace

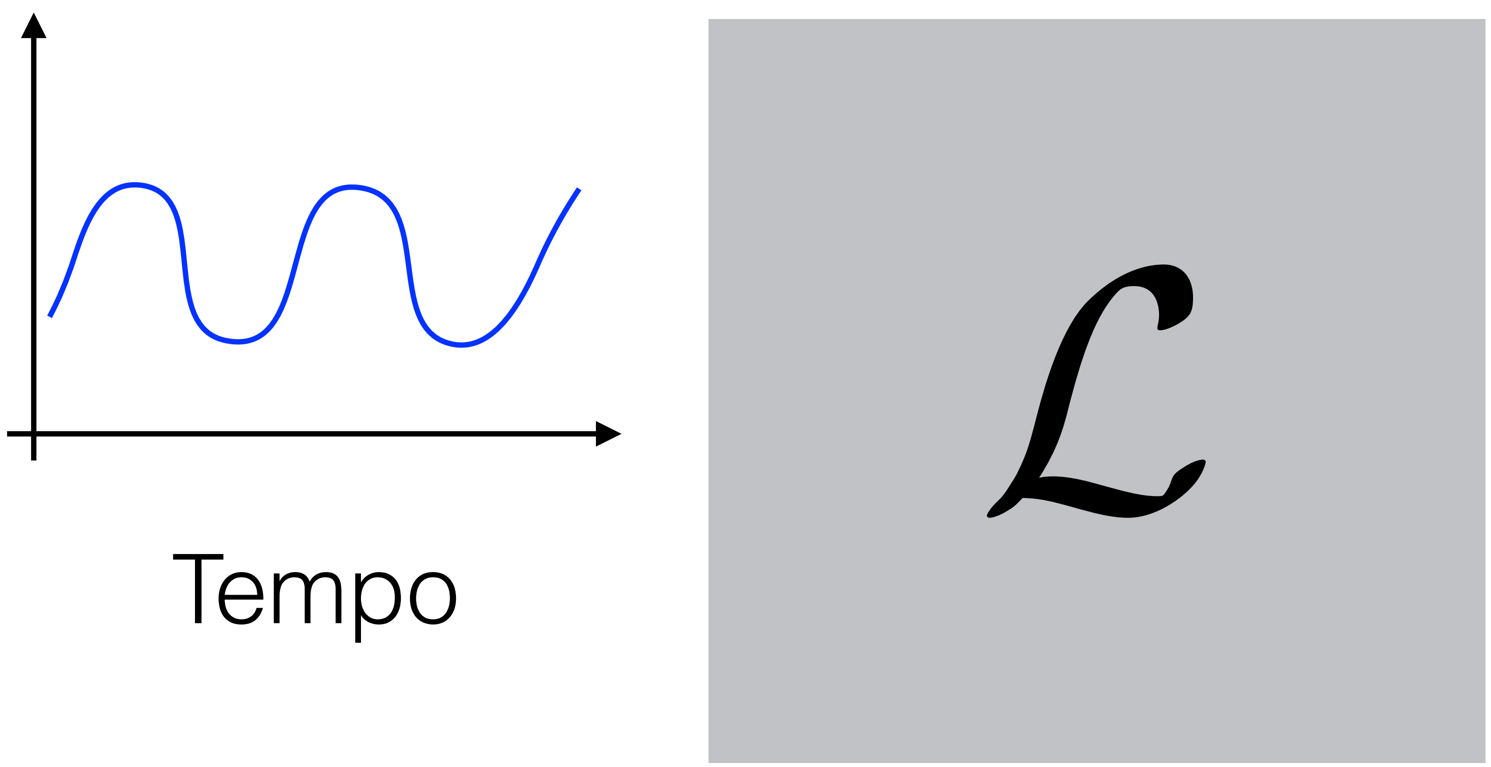
$$\mathcal{L}$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

O que é a transformada de Laplace

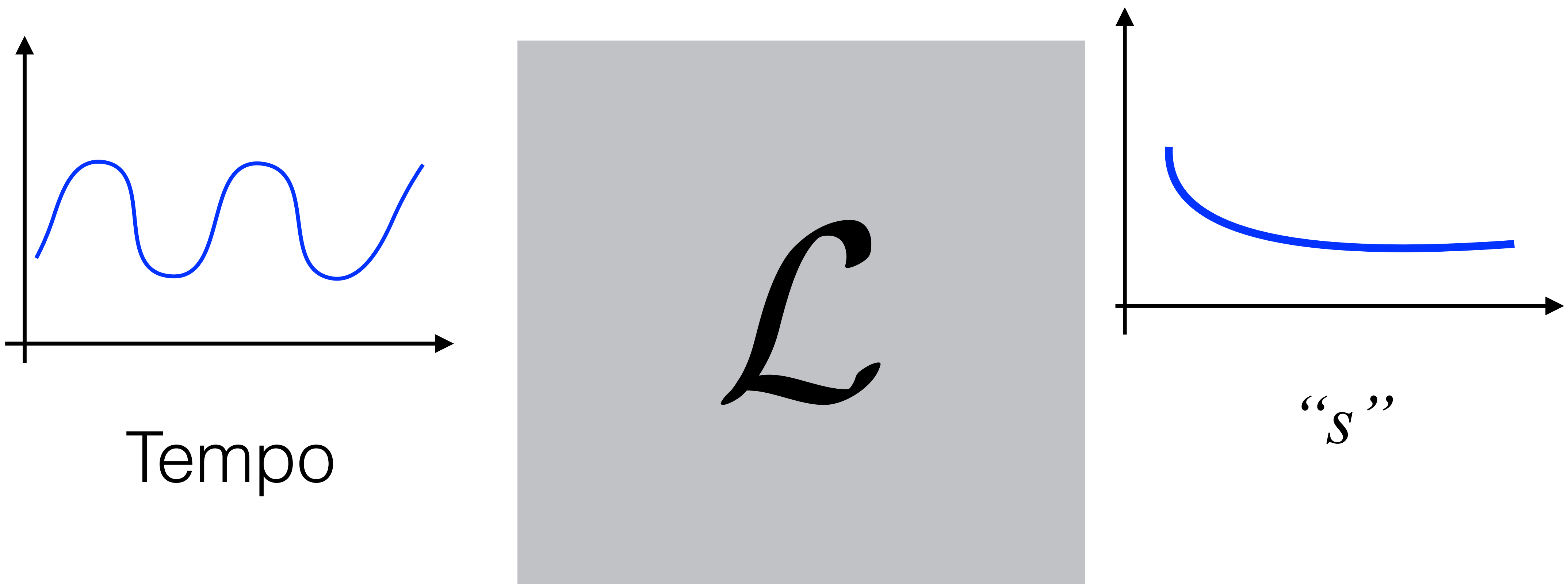


O que é a transformada de Laplace



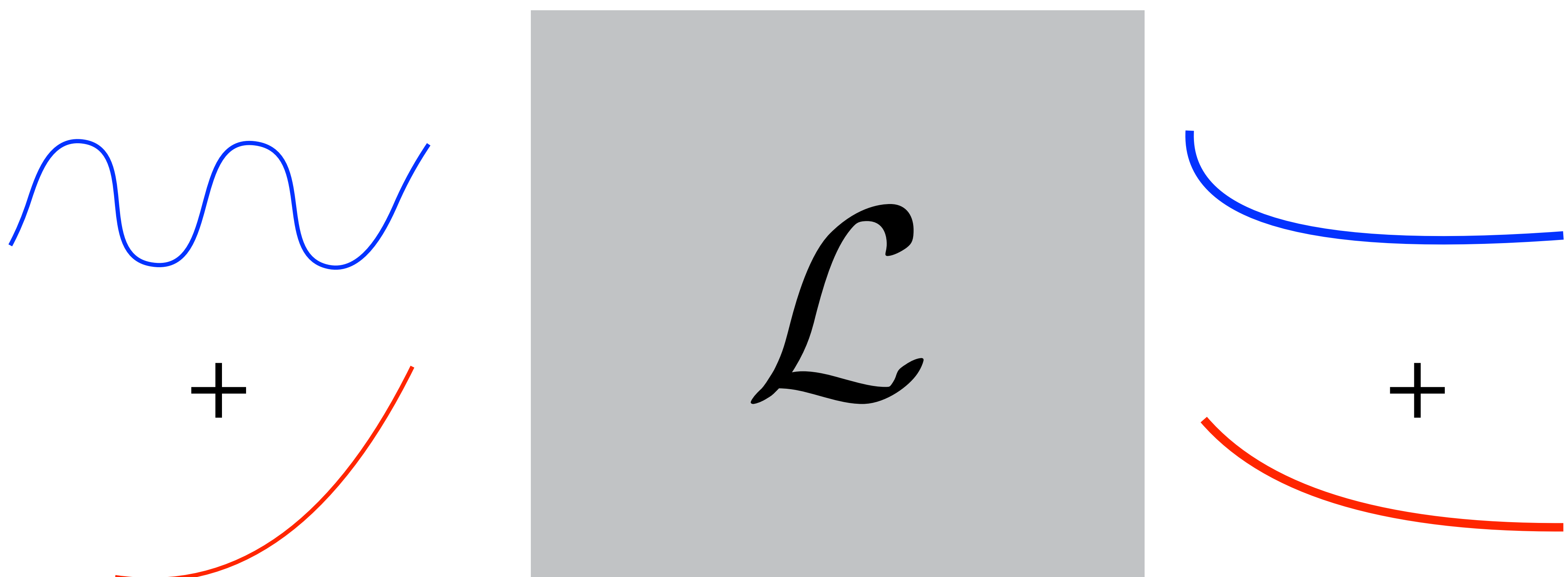
https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

O que é a transformada de Laplace



https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

O que é a transformada de Laplace



https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Alguns exemplos

Operação Linear

O que é a transformada de Laplace

sinal	Transformada
$f(t)$	$F(s)$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
1	$\dfrac{1}{s}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Resolvendo uma EDO por Laplace

$$x' + x = 0$$

Recap

$$x(t) = x_0 e^{-t}$$

Resolvendo uma EDO por Laplace

$$x' + x = 0$$

Por Laplace

$$\mathcal{L}(x' + x) = \mathcal{L}(0)$$

$$\mathcal{L}(x') + \mathcal{L}(x) = 0$$

Resolvendo uma EDO por Laplace

sinal	Transformada
$f(t)$	$F(s)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
1	$\frac{1}{s}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$

Por Laplace

$$\mathcal{L}(x') + \mathcal{L}(x) = 0$$

$$X(s)$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Resolvendo uma EDO por Laplace

sinal	Transformada
$f(t)$	$F(s)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
1	$\frac{1}{s}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$

Por Laplace

$$\mathcal{L}(x') + \mathcal{L}(x) = 0$$

$$sX(s) - x_0$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Resolvendo uma EDO por Laplace

sinal	Transformada
$f(t)$	$F(s)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
1	$\frac{1}{s}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$

Por Laplace

$$\mathcal{L}(x') + \mathcal{L}(x) = 0$$

$$sX(s) - x_0 + X(s) = 0$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Resolvendo uma EDO por Laplace

$$x' + x = 0$$

Por Laplace

$$sX(s) - x_0 + X(s) = 0$$

$$X(s)(1 + s) = x_0$$

Resolvendo uma EDO por Laplace

$$x' + x = 0$$

Por Laplace

$$X(s) = x_0 \frac{1}{s+1}$$

Resolvendo uma EDO por Laplace

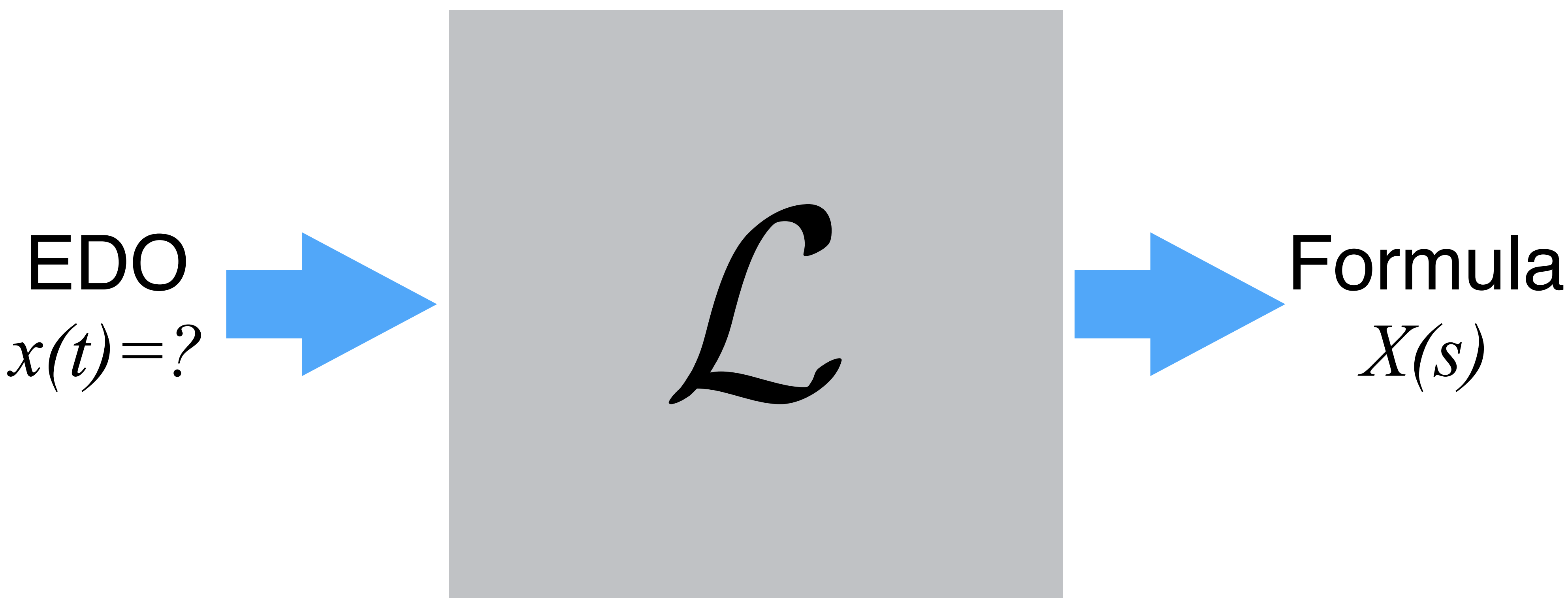
sinal	Transformada
$f(t)$	$F(s)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
1	$\frac{1}{s}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$

Por Laplace

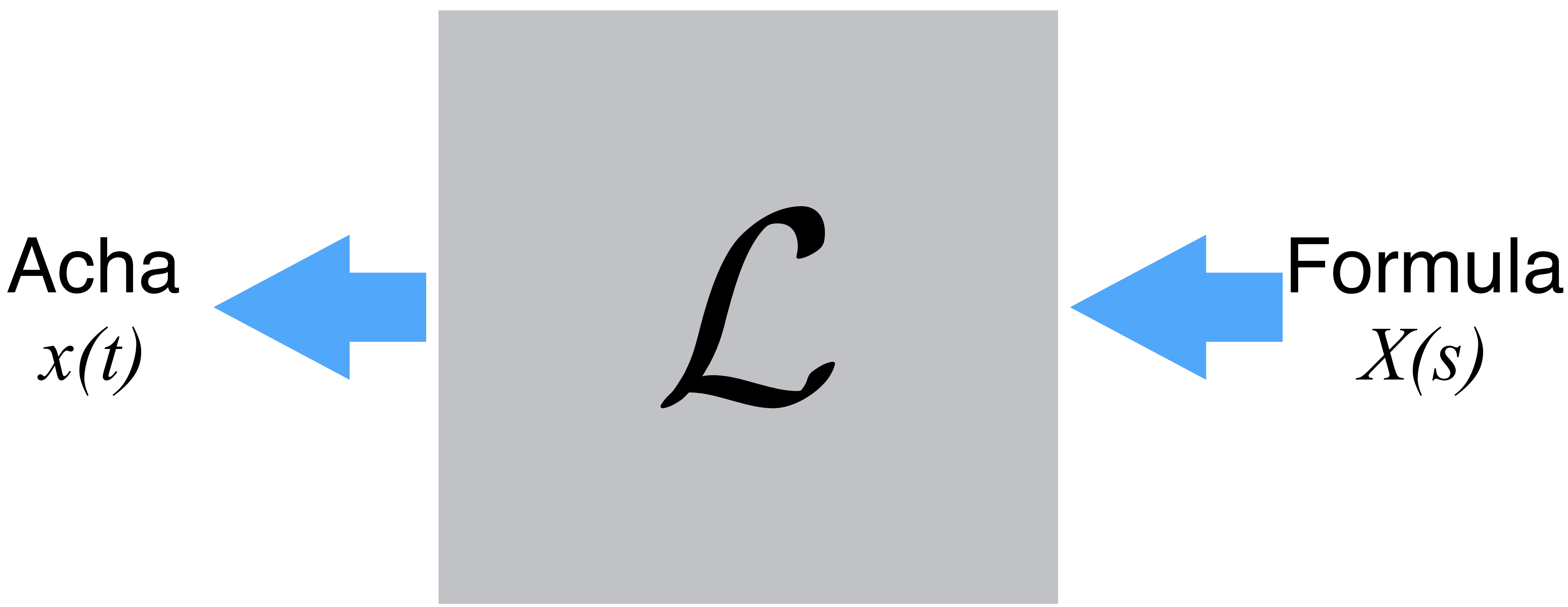
$$X(s) = x_0 \frac{1}{s+1} \Rightarrow x_0 e^{-t}$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Recap



Recap



Pergunta

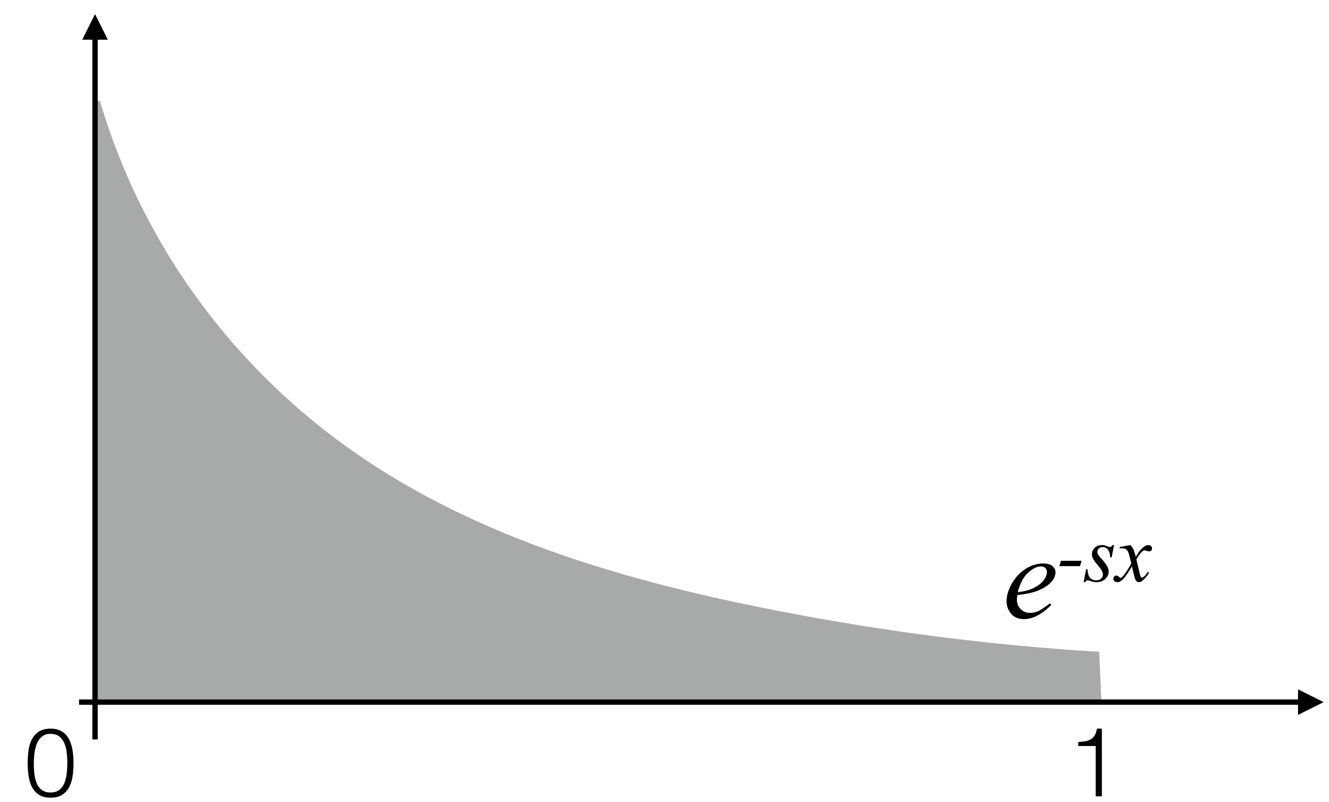
O que tem dentro dessa caixa?

$$\mathcal{L}$$

Como funciona essa transformação

Detour

Calcular a area da região

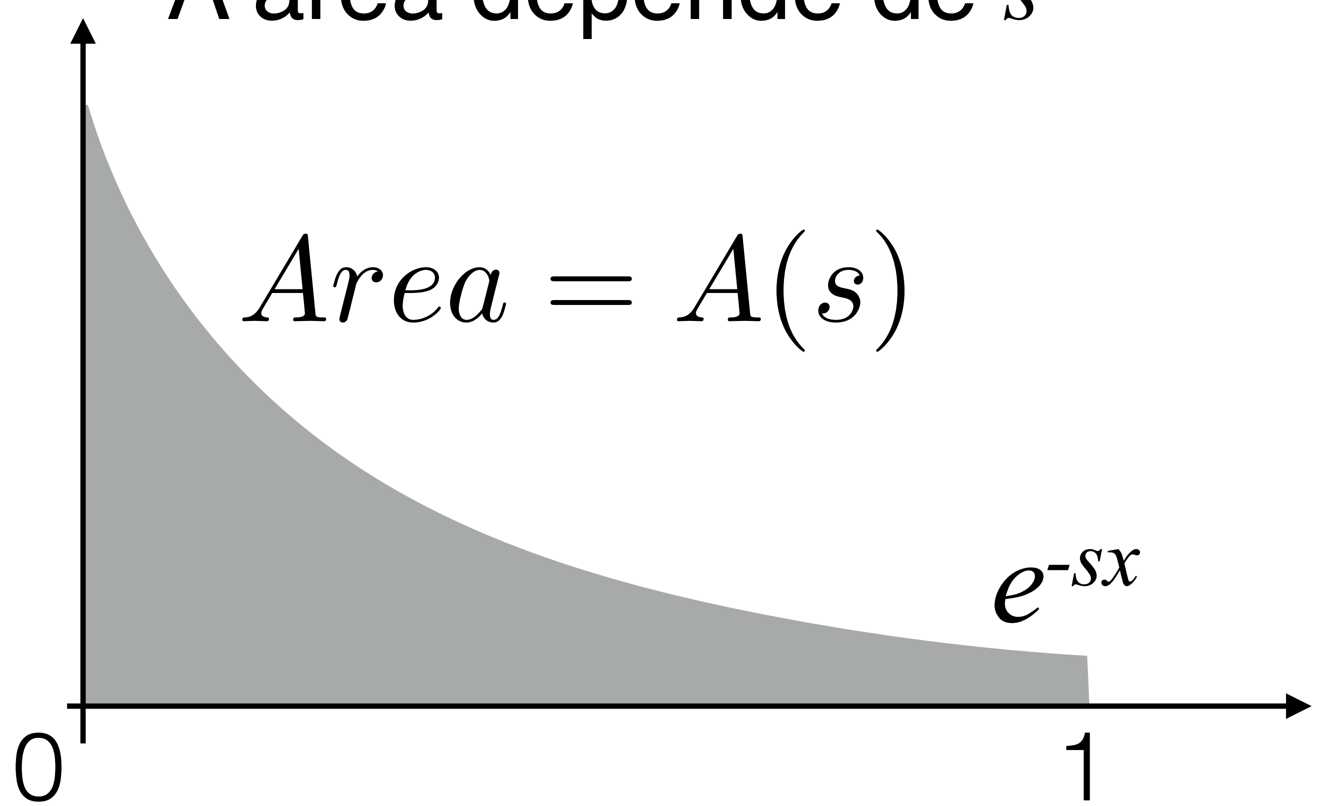


https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Detour

Calcular a area da região

A area depende de s



https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Detour

$$A(s) = \int_0^\infty e^{-sx}$$

Como integramos em x a resposta não depende de x

Detour

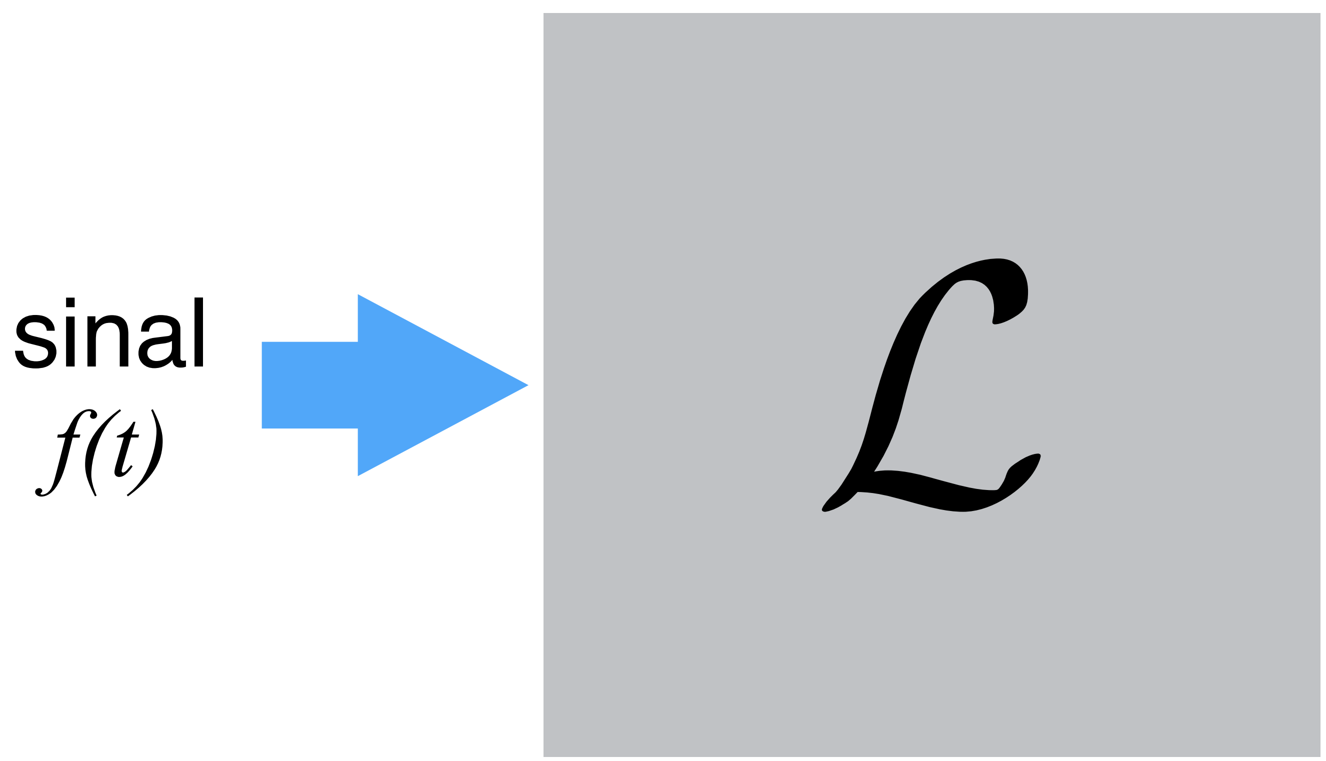
$$A(s) = \int_0^\infty e^{-sx}$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-sx} \Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{s}$$

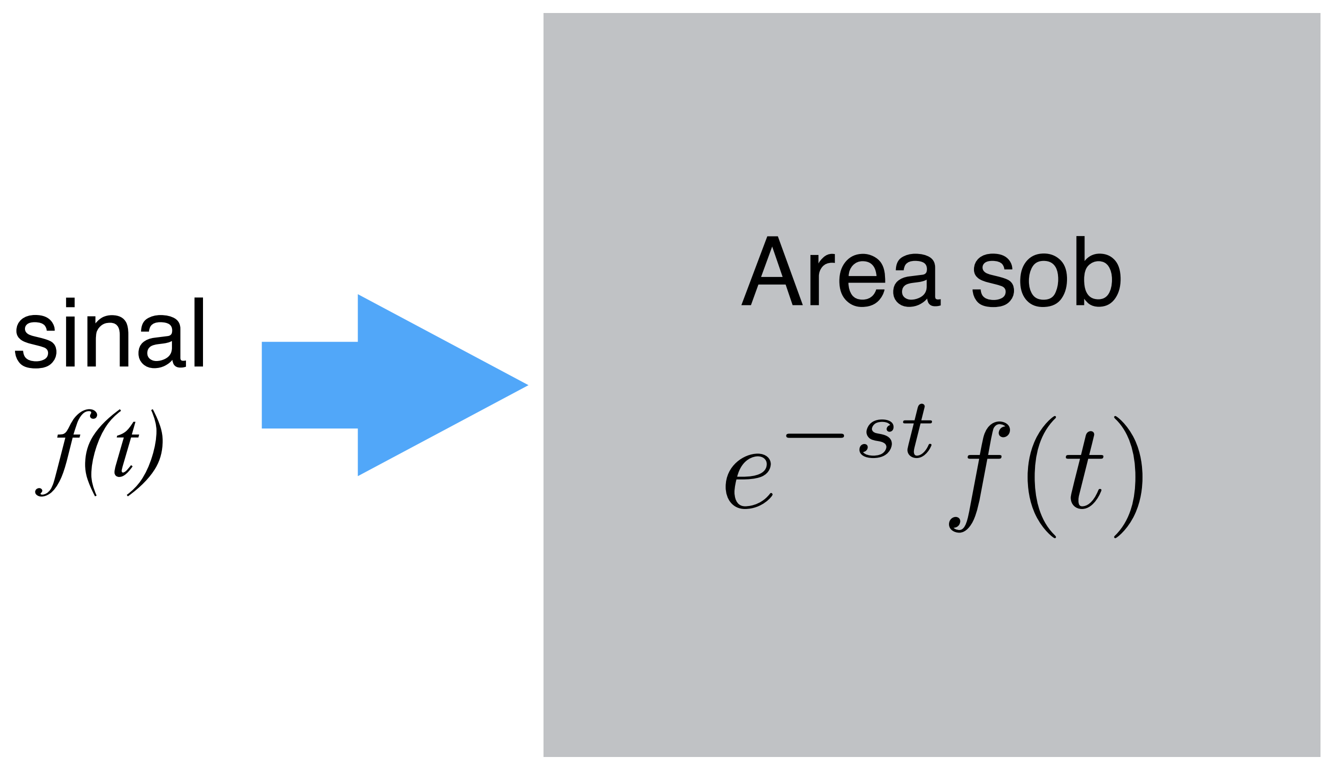
https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Transformada de Laplace



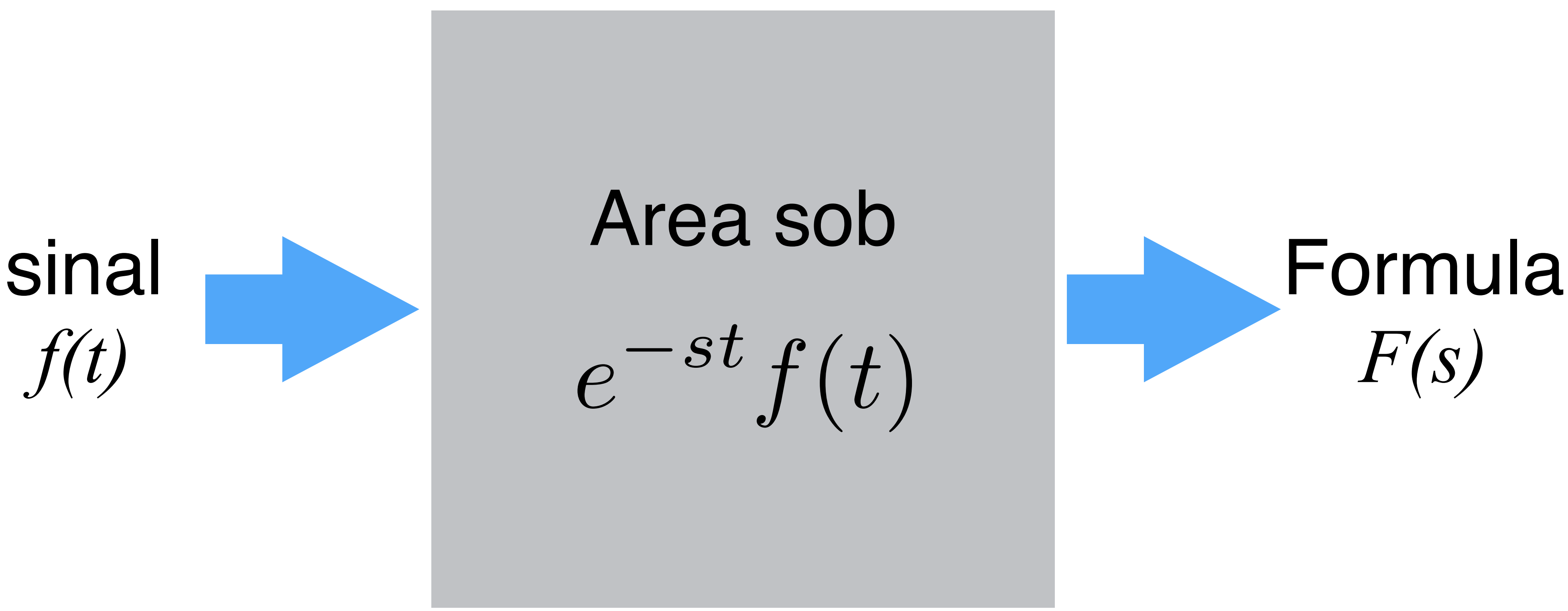
https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Transformada de Laplace



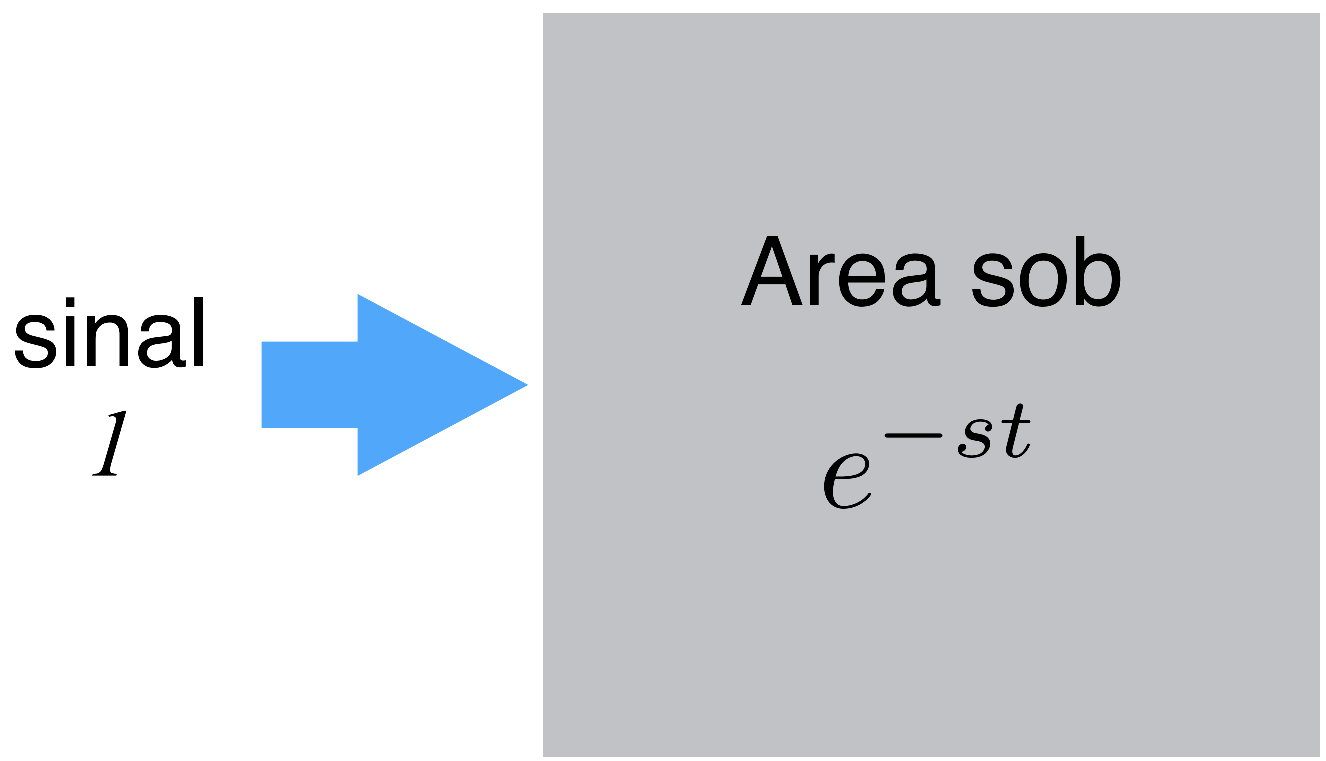
https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Transformada de Laplace



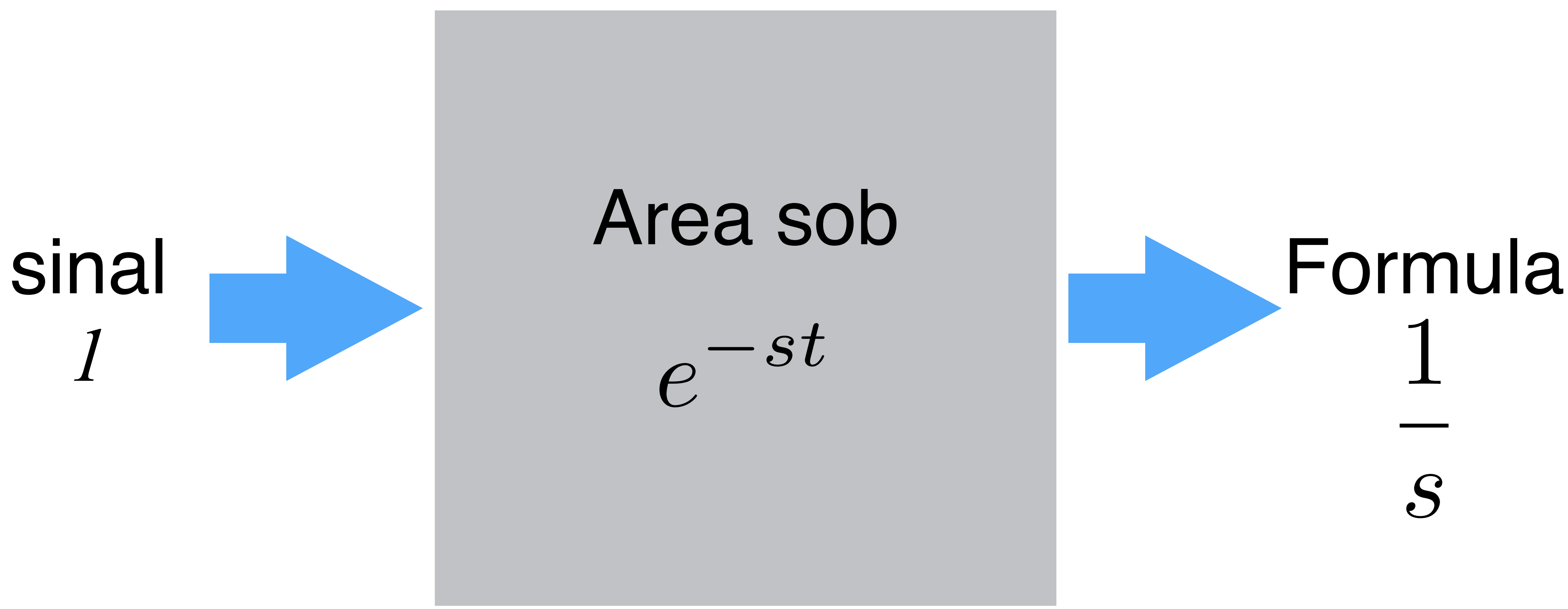
https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Transformada de Laplace



https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Transcformada de Laplace



https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Transformada de Laplace

sinal

1

sinal	Transformada
$f(t)$	$F(s)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
1	$\frac{1}{s}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$

Formula

$$\frac{1}{s}$$

Exemplo

Resolva PVI $\begin{cases} x' + 5x = e^{-2t} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

Exemplo

$$x' + 5x = e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}(x' + 5x) = \mathcal{L}(e^{-2t})$$

$$sX(s) - x_0 + 5X(s) = \frac{1}{s+2}$$

Exemplo

$$x' + 5x = e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}(x' + 5x) = \mathcal{L}(e^{-2t})$$

$$sX(s) - x_0 + 5X(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$(s+5)X(s) = \frac{1}{s+2}$$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Exemplo

$$X(s) = \frac{1}{s+5}\frac{1}{s+2}$$

Exemplo

$$X(s) = \frac{1}{s+5}\frac{1}{s+2}$$

Massagear *X(s)* até ele virar algo conhecido

sinal	Transformada
$f(t)$	$F(s)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/edo.html

Exemplo: Frações Parciais

$$X(s) = \frac{1}{s+5}\frac{1}{s+2}$$

$$= \frac{A}{s+5} + \frac{B}{s+2}$$

$$A + B = 0$$
$$2A + 5B = 1$$

$\Rightarrow$

$$A = -1/3$$
$$B = 1/3$$

Exemplo: Frações Parciais

$$X(s) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+5}\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{3}\left(e^{-2t} - e^{-5t}\right)$$

Solução do PVI