Notas de Aula de PMA5633 - Introdução à Álgebra Linear

Wagner Vieira Leite Nunes
Departamento de Matemática
ICMC - USP

13 de setembro de 2019

Sumário

Capítulo 1

Introdução

9.08.2019 - 1.a

Nesta notas estudaremos os espaços vetoriais, transformações lineares entre os mesmos, alguns operadores importantes definidos nos mesmos.

O capítulo 2 será dedicado às matrizes.

O capítulo 3, trataremos do escalonamento de matrizes e dos sistemas lineares.

No capítulo 4, introduziremos os espaços vetoriais e daremos uma série de propriedades e exemplos dos mesmos.

No capitulo 5, trataremos dos subespaços dos espaços vetoriais, além de propriedades e exemplos.

Combinações lineares serão estudas, bem como suas propriedades, no capitulo 6.

O capítulo 7 será dedicado a noção de dependência linear.

No capítulo 8 trataremos de base (ordenada) e no capítulo 9 a dimensão de espaços vetoriais finitamente gerados.

A matriz mudança de base (ordenada) e propriedades associadas, serão tratados no capítulo 11.

No capítulo 12, estudaremos as transformações, operadores e funcionais lineares, bem como, suas propriedades e exemplos.

No capítulo 13, estudaremos a matriz de uma transformação, operadores ou funcional linear, relativamente a base (ordenadas) dos espaços vetoriais reais (ou complexos) e do contr-a domínio bem como, suas propriedades e exemplos.

No capítulo 14 introduziremos a noção de auto-valores e auto-vetores, propriedades e exemplos associados aos mesmos.

No capítulo 15 estudaremos a diagonalização de alguns operadores lineares, propriedades e exemplos associados ao tema.

No capítulo 16 introduziremos os espaços euclidianos, propriedades e exemplos associados aos mesmos.

O capítulo 17 será dedicado aos estudo dos operadores lineares auto-adjuntos, propriedades e exemplos associados aos mesmos.

Capítulo 2

Matrizes numéricas

2.1 Introdução

Neste capítulo trataremos de um elemento de grande importância, em particular, no estudo da Álgebra Linear, a saber: Matrizes.

Lembraremos a definição, as operações, propriedades das mesmas e algumas aplicações que são, particularmente, importantes para o nosso contexto.

Introduziremos o escalonamento de matrizes e apresentaremos algumas aplicações desse processo para inversão de matrizes.

No Capítulo 3 apresentamos o método de Crammer para resolução

2.2 Definições básicas

Definição 2.2.1 *Uma* **matriz** *é uma tabela retangular de números reais ou complexos.*

Tais números são denominados **entradas** *da matriz.*

Uma matriz será sempre indicada por uma letra maiúscula: $A, B, C, \cdots$.

Uma matriz horizontal será denominada **matriz linha**.

Uma matriz vertical será dita **matriz coluna**.

A **ordem (ou tamanho) de uma matriz** *é o seu número de linhas pelo seu número de colunas.*

Observação 2.2.1

1. *Em geral uma matriz, de tamanho* $n \times m$, *com entradas*

$$a_{ij} \in \mathbb{R} \quad ou \quad \mathbb{C}, \quad para\ cada \quad i \in \{1, 2 \cdots, n\} \quad e \quad j \in \{1, 2, \cdots, m\}$$

tem a seguinte forma:

$$A \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n\,m}$$

onde $n, m \in \mathbb{N}$ *são fixos.*

2. *No item 1. acima, diremos que a matriz* A *tem* $\underline{\underline{n}}$ **linhas** *e* $\underline{\underline{m}}$ **colunas**.

3. *Quando, no item 1. acima, temos*

$$n = m,$$

diremos que a matriz A *é* **quadrada de ordem** $\underline{\underline{n}}$.

4. *No item 3. acima, as entradas*

$$a_{ii}, \quad \textit{para} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

formarão, o que denominaremos de **diagonal principal** *da matriz.*

5. *Uma matriz linha será do tipo*

$$A \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1\,m}$$

onde $m \in \mathbb{N}$ *é fixo.*

6. *Uma matriz coluna será do tipo*

$$A \doteq \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n\,1}$$

onde $n \in \mathbb{N}$ *é fixo.*

Para ilustrar temos o:

Exemplo 2.2.1 *A matriz*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -3 \end{pmatrix}$$

é uma matriz, com entradas complexas, do tipo coluna, de tamanho 3×1.

Notemos que

$$a_{11} \doteq 1, \quad a_{21} \doteq i, \quad e \quad a_{31} \doteq -3.$$

□

Um outro é dado pelo:

Exemplo 2.2.2 *A matriz*

$$B \doteq \begin{pmatrix} 10 & 50 & \pi & e \end{pmatrix}$$

é uma matriz, cujas entradas são números reais, do tipo linha, de tamanho 1×4.

Notemos que

$$a_{11} \doteq 10, \quad a_{12} \doteq 50, \quad a_{13} \doteq \pi \quad e \quad a_{14} \doteq e.$$

□

Temos também o:

Exemplo 2.2.3 *A matriz*

$$C \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

é uma matriz, cujas entradas são números reais, de tamanho 3×3*, ou seja, uma matriz quadrada de ordem* 3*.*

Notemos que

$$\begin{aligned} a_{11} &\doteq 1\,, \quad a_{12} \doteq 2\,, \quad a_{13} \doteq 3\,, \\ a_{21} &\doteq 4\,, \quad a_{22} \doteq 5\,, \quad a_{23} \doteq 6\,, \\ a_{31} &\doteq 7\,, \quad a_{32} \doteq 8\,, \quad a_{33} \doteq 9\,, \end{aligned}$$

Observemos que a diagonal principal da matriz A*, será dada por:*

$$a_{11} \doteq 1\,, \quad a_{22} \doteq 5 \quad e \quad a_{33} \doteq 9\,.$$

□

Notação 2.2.1

1. *Denotaremos por:*

$$M_{nm}(\mathbb{R}) \doteq \{\textit{matrizes de tamanho } n \times m, \textit{ cujas entradas são números reais}\} \tag{2.1}$$

   e de modo semelhante definimos

$$M_{nm}(\mathbb{C}) \doteq \{\textit{matrizes de tamanho } n \times m, \textit{ cujas entradas são complexos}\}. \tag{2.2}$$

2. *Para simplificar a notação acima, denotaremos os conjuntos acima por*

$$M_{nm}\,,$$

   quando não for importante o tipo de entradas da matriz, se números reais ou complexos.

3. *Quando*

$$n = m\,,$$

   ou seja, quando tratamos de matrizes quadradas, dentotaremos os conjuntos $M_{nn}(\mathbb{R})$*, respectivamente* $M_{nn}(\mathbb{C})$*, simplesmente por*

$$M_n(\mathbb{R})\,, \quad \textit{respectivamente} \quad M_n(\mathbb{C})\,,$$

isto é,

$$M_n(\mathbb{R}) \doteq \{\textit{matrizes de quadradas de ordem } \underline{n}\,, \textit{ cujas entradas são números reais}\} \tag{2.3}$$

e de modo análogo definimos

$$M_n(\mathbb{C}) \doteq \{\textit{matrizes de quadradas de ordem } \underline{n}\,, \textit{ cujas entradas são complexos}\} \tag{2.4}$$

Exemplo 2.2.4 *Nos Exemplos 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3 acima, temos que*

$$A \in M_{31}(\mathbb{C})\,, \quad B \in M_{14}(\mathbb{R}) \quad e \quad C \in M_3(\mathbb{R})\,.$$

□

Podemos agora introduzir a:

Definição 2.2.2 *Sejam* $n, m, p, q \in \mathbb{N}$, $A \in M_{nm}$ *e* $B \in M_{pq}$.
Diremos que as matrizes A *e* B *são* **iguais**, *escrevendo*

$$A = B\,,$$

s0,e e somente se, temos:

$$n = p\,, \quad m = q$$
$$e \quad a_{ij} = b_{ij}\,, \quad para \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad e \quad j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \tag{2.5}$$
$$onde \quad A \doteq (a_{ij})_{nm} \quad e \quad B \doteq (b_{ij})_{nm}\,, \tag{2.6}$$

ou seja, duas matrizes são iguais serão iguais se, e somente se, têm o mesmo tamanho e as correspondentes entradas são iguais.

2.3 Operações com matrizes

Definição 2.3.1 *Sejam* $n, m, p, q \in \mathbb{N}$, $A \in M_{nm}$ *e* $B \in M_{pq}$.
Definiremos a **adição das matrizes** A **e** B, *indicada por* $A + B$, *se, e somente se,*

$$n = p\,, \quad m = q\,, \tag{2.7}$$

ou seja, se as matrizes A *e* B *têm o mesmo tamanho.*
Neste caso, definimos a matriz

$$C \doteq A + B \in M_{nm}$$

como sendo a matriz de ordem $n \times m$, *que terá como entradas*

$$c_{ij} \doteq a_{ij} + b_{ij}\,, \quad para \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad e \quad j \in \{1, 2, \cdots, m\}, \tag{2.8}$$

onde

$$A \doteq (a_{ij})_{nm}\,, \quad B \doteq (b_{ij})_{nm} \quad e \quad C \doteq (c_{ij})_{nm}\,.$$

Observação 2.3.1 *Notemos que, da Definição (2.3.1) acima, se*

$$A \doteq (a_{ij})_{nm}\,, \quad B \doteq (b_{ij})_{nm} \quad e \quad C \doteq A + B\,,$$

então

$$\begin{aligned} \textit{se} \qquad & C = (c_i)_{nm}\,, \\ \textit{teremos:} \qquad & (c_{ij})_{nm} = (a_{ij} + b_{ij})_{nm}\,. \end{aligned}$$

Para ilustrar temos o:

Exemplo 2.3.1 *Se*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad B \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

então

$$A + B \overset{(2.8)\ e\ (2.9)}{=} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1+i \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Para a operação de adição introduzida na Definição 2.3.1, temos as seguintes propriedades:

Proposição 2.3.1

1. *O conjunto M_{nm} é fechado como a operação de adição introduzida na Definição 2.3.1, isto é, a soma de duas matrizes $n \times m$ é uma matriz $n \times m$, ou ainda*

$$\begin{array}{rccc} + : & M_{nm} \times M_{nm} & \to & M_{nm} \\ & (A\,,B) & \mapsto & A + B \end{array};$$

2. *A adição em M_{nm} (introduzida na Definição 2.3.1) é comutativa, isto é,*

$$A + B = B + A\,, \quad \textit{para} \quad A\,,B \in M_{nm}\,; \tag{2.10}$$

3. *A adição em M_{nm} é associativa, isto é,*

$$(A + B) + C = A + B + C\,, \quad \textit{para} \quad A\,,B\,,C \in M_{nm}\,; \tag{2.11}$$

4. *A adição em M_{nm} admite um único elemento neutro, isto é, existe uma (única) matriz $n \times m$, denominada* **matriz nula**, *indicada por O_{nm}, tal que*

$$A + O_{nm} = A\,, \quad \textit{para} \quad A \in M_{nm}\,; \tag{2.12}$$

A matriz O_{nm} é a matriz de ordem $n \times m$ cujas entradas são todas zero, isto é,

$$\begin{aligned} & O_{nm} \doteq (0_{ij})_{nm}\,, \\ \textit{onde} \quad & 0_{ij} \doteq 0\,, \quad \textit{para} \quad i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\} \quad e \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m\}\,. \end{aligned} \tag{2.13}$$

5. *A adição em* M_{nm} *admite um único elemento oposto, isto é, se* $A \in M_{nm}$*, existe uma (única) matriz* $n \times m$*, denominada* **oposta** *da matriz* A*, denotada por* $-A$ *tal que*

$$A + (-A) = O_{nm} \tag{2.14}$$

A matriz $-A$ *é a matriz de ordem* $n \times m$*, cujas entradas são os opostos das correspondentes entradas da matriz* A*, isto é, se*

$$A = (a_{ij})_{nm}\,,$$
$$\text{então} \quad -A \doteq (-a_{ij})\,. \tag{2.15}$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

□

Notação 2.3.1 *No caso que*

$$m = n\,,$$

denotaremos a matriz quadrada, nula de ordem n *por:*

$$O_n\,, \tag{2.16}$$
$$\text{ou seja,} \quad O_n \doteq (0_{ij})_{nn}\,,$$
$$\text{onde} \quad 0_{ij} \doteq 0\,, \quad \text{para} \quad i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}\,. \tag{2.17}$$

Temos também a:

Definição 2.3.2 *Diremos que uma matriz quadrada*

$$A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$$

é uma **matriz diagonal** *se*

$$a_{ij} = 0\,, \quad \text{para} \quad i \neq j\,, \tag{2.18}$$
$$\text{com} \quad i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}\,.$$

Observação 2.3.2 *Notemos que uma matriz quadrada será uma matriz diagonal se, e somente se, os números fora da diagonal principal forem iguais a zero, mais explicitamente, uma matriz diagonal* $A = (a_{ij}) \in M_n$*, deverá ter o seguinte aspecto:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Para ilustrar temos o:

Exercício 2.3.1 *As matrizes* O_n *e* I_n *são matrizes diagonais.*

Temos também a:

Proposição 2.3.2 *Se as matrizes* $A, B \in M_n$ *são matrizes diagonais, então a matriz*

$$A + B,$$

é uma matriz diagonal.

Demonstração:

Deixaremos a demonstração como exercício para o leitor.

□

Podemos também a introduzir a:

Definição 2.3.3 *Sejam* $A \doteq (a_{ij})_{nm} \in M_{nm}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*).*
A matriz $B \doteq (b_{ij})_{nm} \in M_{nm}$ *cujas entradas são:*

$$b_{ij} \doteq \alpha\, a_{ij}, \quad \textit{para} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad \textit{e} \quad j \in \{1, 2 \cdots, m\}, \tag{2.20}$$

será denominada **produto do número real (ou complexo)** α **pela matriz** A *e indicada por* $\alpha \cdot A$.

Observação 2.3.3 *Segue da Definição 2.3.3 acima, que se* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\alpha \in \mathbb{C}$*) e* $(a_{ij}) \in M_{nm}$*, então*

$$\alpha \cdot (a_{ij})_{nm} = (\alpha\, a_{ij})_{nm}, . \tag{2.21}$$

Para ilustrar temos o:

Exemplo 2.3.2 *Se*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\textit{e} \quad \alpha = -2, \tag{2.22}$$

então

$$\alpha \cdot A \overset{(2.20)\ \textit{e}\ (2.22)}{=} \begin{pmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

□

Com isto temos as seguintes propriedades:

Proposição 2.3.3 *Sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) e* $A, B \in M_{nm}$.
Então:

1. *O conjunto* M_{nm} *é fechado como a operação de muliplicação de número (real ou complexo) por matrizes definida acima, isto é, a multiplicação de um número (real ou complexo) por uma matriz* $n \times m$ *é uma matriz* $n \times m$, *, ou ainda*

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R} \text{ (ou C)} \times M_{nm} & \to & M_{nm} \\ & (\alpha, A) & \mapsto & \alpha \cdot A \end{array};$$

2. *Vale a distributiva do produto de número real (ou complexo) pela soma de matrizes, isto é:*

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B; \tag{2.23}$$

3. *Vale a distributiva da soma de números reais (ou complexos) pelo produto de matriz, isto é:*

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot B; \tag{2.24}$$

4. *Vale a associativa do produto de números reais (ou complexos) pelo produto de matrizes, isto é:*

$$(\alpha\, \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A); \tag{2.25}$$

5. *Temos que*

$$1 \cdot A = A; \tag{2.26}$$

6. *Temos também que*

$$0 \cdot A = O_{nm}. \tag{2.27}$$

7. *Temos também que*

$$\alpha \cdot O_{nm} = O_{nm}. \tag{2.28}$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

□

Temos também a:

Proposição 2.3.4 *Se a matriz* $A \in M_n$ *é uma matriz diagonal, então a matriz*

$$\alpha \cdot A$$

será uma matriz diagonal, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*).*

Demonstração:

Deixaremos a demonstração como exercício para o leitor.

□

Temos agora a:

Definição 2.3.4 *Sejam* $A \doteq (a_{ik})_{nm} \in M_{nm}$, $B \doteq (b_{kj})_{mp} \in M_{mp}$.

Definimos o **produto da matriz** A **pela matriz** B, *como sendo a matriz*

$$C \doteq (c_{ik})_{np} \in M_{np}\,,$$

cujas entradas são dadas por

$$c_{ij} \doteq \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}\,, \quad \textit{para} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad \textit{e} \quad j \in \{1, 2, \cdots, p\}. \tag{2.29}$$

A matriz C, *cujas entradas são dadas por* (2.29), *será denotada por* $A \cdot B$.

Observação 2.3.4

1. *Para podermos realizar o produto da matriz* A *pela matriz* B, *isto é,*

$$A \cdot B\,,$$

é **necessário** *que o número de colunas da matriz* A, *seja igual ao número de linhas da matriz* B.

2. *Em geral o produto, o produto de matrizes* **não** *é comutativo, isto é, em geral*

$$A \cdot B \neq B \cdot A\,,$$

mesmo que os produtos envolvidos possam ser realizados.

O seguinte exemplo ilustra a situação descrita acima:

Sejam

$$A \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Então teremos:

$$A \cdot B \overset{(2.29)\ e\ (2.30)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textit{e} \quad B \cdot A \overset{(2.29)\ e\ (2.30)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, neste caso, teremos: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

3. *O modo introduzido na Definição 2.3.4 de fazer o produto de matrizes é extremamente útil em diversas situações.*

   Entre outras, podemos aplicar o produto de matrizes introduzido na Definição 2.3.4, para transformarmos sistemas lineares de equações algébricas do 1.o grau envolvendo matrizes, como mostra o exemplo:

   Suponhamos que tenhamos o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 = b_3 \end{cases} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned} \textit{onde} \quad & a_{ij}\,, \quad \textit{para} \quad i \in \{1\,,2\,,3\} \quad \textit{e} \quad j \in \{1\,,2\} \\ \textit{e} \quad & b_i,\,, \quad \textit{para} \quad i \in \{1\,,2\,,3\} \end{aligned} \tag{2.32}$$

   são números (reais ou complexos) dados.

   Considerando-se

$$A \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\,, \tag{2.33}$$

$$x \doteq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

$$\textit{e} \quad b \doteq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\,, \tag{2.35}$$

   o sistema linear pode ser reescrito na forma da seguinte equação matricial:

$$A \cdot x = b\,. \tag{2.36}$$

   Deixaremos como exercício para o leitor a verificação da igualdade acima.

Temos as seguintes propriedades para o produto de matrizes:

Proposição 2.3.5

1. *O produto de matrizes é associativo, isto é:*

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C\,, \tag{2.37}$$

   onde $A \in M_{nm}$, $B \in M_{mp}$ *e* $C \in M_{pq}$.

2. *Vale a distributiva do produto de matrizes pela soma de matrizes, isto é:*

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C\,, \tag{2.38}$$

   onde $A \in M_{nm}$ *e* $B\,,C \in M_{mp}$;

3. *Vale a distributiva da soma de matrizes pelo produto de matrizes, isto é:*

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C\,, \tag{2.39}$$

onde $A\,, B \in M_{nm}$ *e* $C \in M_{mp}$;

4. *Vale a associativa do produto de números reais (ou complexos) por matrizes, isto é:*

$$\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)\,, \tag{2.40}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*),* $A \in M_{nm}$ *e* $B \in M_{mp}$.

5. *Se* $A \in M_{nm}$ *então*

$$\begin{aligned} A \cdot O_{mp} &= O_{np}\,, \\ O_{pn} \cdot A &= O_{pm}\,. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Demonstração:
Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

□

Com isto temos o seguinte exercício, cuja resolução deixaremos a cargo do leitor:

Exemplo 2.3.3 *Mostre que a matriz*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

é solução da equação

$$Z^3 - 5\,Z^2 + 8\,Z - 4 = O\,,$$

onde, para $n \in \mathbb{N}$, *definimos:*

$$A^n \doteq \underbrace{A \cdots A \cdots A}_{n-vezes}\,. \tag{2.42}$$

Temos agora a:

Definição 2.3.5 *Seja* $n \in \mathbb{N}$. *Denotaremos por*

$$I_n \doteq (\delta_{ij})_{nn} \in M_n\,,$$

a matriz quadrada de ordem n, *cujas entradas são:*

$$\delta_{ij} \doteq \begin{cases} 0\,, & para \quad i \neq j \\ 1\,, & para \quad i = j \end{cases}\,,$$

onde $i, j \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}$, *será denominada* **matriz identidade** *de ordem* $\underline{n}$.

Com isto temos a:

Proposição 2.3.6 *Se* $A \in M_{nm}$, *então*

$$I_n \cdot A = A \cdot I_m = A\,. \qquad (2.43)$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

□

Proposição 2.3.7 *Se ae matrizes* $A\,, B \in M_n$ *são matrizes diagonais, então a matriz*

$$A \cdot B$$

será uma matriz diagonal.

Demonstração:

Deixaremos a demonstração como exercício para o leitor.

□

2.4 Matriz inversível ou não singular

Observação 2.4.1 *Para números reais (ou complexos) temos a seguinte propriedade: se* $\alpha \neq 0$, *então existe* α^{-1}, *tal que*

$$\alpha\,\alpha^{-1} = 1\,.$$

Para matrizes em geral, isto pode **<u>não</u>** *ocorrer, como mostra o seguinte exemplo: Consideremos*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2.44)$$

então **<u>não</u>** *existe uma matriz* $B \in M_2(\mathbb{R})$, *tal que*

$$A \cdot B = I_2\,. \qquad (2.45)$$

De fato, se existisse a matriz

$$B \doteq \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \qquad (2.46)$$

tal que que valesse a identida (2.45), *então deveríamos ter*

$$A \cdot B \overset{(2.29),(2.44)\ e\ (2.46)}{=} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2\,,$$

para qualquer $b_{11}, b_{12} \in \mathbb{R}$, *(ou* $\mathbb{C}$*) mostrando que para a matriz* A, *dada por* (2.44), *não existe uma matriz* B, *que satisfaz* (2.45).

Em vista disso temos a:

Definição 2.4.1 *Seja $A \in M_n$.*
Se existir uma matriz $X \in M_n$ tal que

$$A \cdot X = X \cdot A = I_n \,, \tag{2.47}$$

diremos que A é uma matriz **inversível**.
A matriz X será dita uma **matriz inversa** *da matriz A.*

Observação 2.4.2 *Segundo a Definição 2.4.1 acima, só faz sentido perguntar se uma* **matriz quadrada** *é inversível.*

Para ilustrar temos o:

Exemplo 2.4.1 *A matriz*

$$X \doteq \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

é uma matriz inversa da matriz

$$A \doteq \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

pois

$$\begin{aligned} A \cdot X &\overset{(2.29),(2.49)\ e\ (2.48)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\overset{(2.29),(2.48)\ e\ (2.49)}{=} X \cdot A \,, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.4.1, que a matriz X, dada por (2.48), é uma matriz inversa da matriz A, dada por (2.49).

□

Temos agora a:

Proposição 2.4.1 *(unicidade da matriz inversa associada a uma matriz inversível) Suponhamos que a matriz $A \in M_n$ é uma matriz inversível.*
Se X e $\widetilde{X} \in M_n$ são matrizes inversas associadas a matriz A então devemos ter

$$\widetilde{X} = X \,.$$

Demonstração:
Se X e $\tilde{X}$ são inversas associadas a matriz A, então teremos, em particular, que

$$X \cdot A = I_n \tag{2.50}$$

$$\text{e} \quad A \cdot \widetilde{X} = I_n \,. \tag{2.51}$$

Assim

$$
\begin{aligned}
X &\overset{(2.43)}{=} X \cdot I_n \\
&\overset{(2.51)}{=} X \cdot (A \cdot \widetilde{X}) \\
&\overset{(2.37)}{=} (X \cdot A) \cdot \widetilde{X} \\
&\overset{(2.50)}{=} I_n \cdot \widetilde{X} \\
&\overset{(2.43)}{=} \widetilde{X},
\end{aligned}
$$

$$\text{ou seja,} \quad X = \widetilde{X},$$

completando a demonstração.

□

Observação 2.4.3 *Logo se uma matriz quadrada é inversível, segue da Proposição 2.4.1, existirá uma única matriz X satisfazendo (2.47).*

Devido a este fato, podemos introduzir a:

Definição 2.4.2 *Uma matriz $A \in M_n$ que admite matriz inversa será dita* **não singular**.

Neste caso a matriz inversa associada a matriz A será denotada por A^{-1}.

Uma matriz $A \in M_n$ que **não** *admite matriz inversa, será denominada* **singular**.

Com isto temos a:

Proposição 2.4.2 *Sejam $A, B \in M_n$ matrizes não singulares.*

Então a matriz $A \cdot B \in M_n$ é uma matriz não singular.

Aldisso, temos que

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}. \tag{2.52}$$

Demonstração:

Como A é uma matriz não singular, da Definições 2.4.1 e 2.4.2, segue que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n. \tag{2.53}$$

Mas a matriz B também é uma matriz não singular, assim

$$B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = I_n. \tag{2.54}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\left(B^{-1} \cdot A^{-1}\right) \cdot (A \cdot B) &\overset{(2.37)}{=} \left[\left(B^{-1} \cdot A^{-1}\right) \cdot A\right] B \\
&\overset{(2.37)}{=} \left[B^{-1} \cdot \left(A^{-1} \cdot A\right)\right] B \\
&\overset{(2.53)}{=} \left(B^{-1} \cdot I_n\right) \cdot B \\
&\overset{(2.43)}{=} B^{-1} \cdot B \\
&\overset{(2.4.5)}{=} I_n.
\end{aligned} \tag{2.55}
$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}(A \cdot B) \cdot \left(B^{-1} \cdot A^{-1}\right) &\overset{(2.37)}{=} A \cdot \left[B \cdot \left(B^{-1} \cdot A^{-1}\right)\right] \\ &\overset{(2.37)}{=} A \cdot \left[\left(B \cdot B^{-1}\right) \cdot A^{-1}\right] \\ &\overset{(2.54)}{=} (A \cdot I_n) \cdot A^{-1} \\ &\overset{(2.43)}{=} A \cdot A^{-1} \\ &\overset{(2.53)}{=} I_n . \end{aligned} \tag{2.56}$$

Portanto, de (2.55), (2.56) e das Definições 2.4.1 e 2.4.2, segue que a matriz $A \cdot B$ é não singular e, além disso, teremos

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} ,$$

como queríamos demonstrar.

□

Como consequência temos o:

Corolário 2.4.1 *Sejam* $k \in \mathbb{N}$ *e* $A_1 , \ldots , A_k \in M_n$ *matrizes não singulares.*

Então a matriz

$$A_1 \cdot A_2 \cdots A_k \in M_n$$

é uma matriz não singular.

Além disso, temos

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1} . \tag{2.57}$$

Demonstração:

Usar a Proposição 2.4.2 acima e indução matemática.

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

□

□

Observação 2.4.4

1. *Mostramos na Proposição 2.4.2 acima, temos que o subconjunto das matrizes não singulares em* M_n *é fechado em relação ao produto de matrizes, ou seja, se* $A , B \in M_n$ *são não singulares, então a matriz quadrada* $A \cdot B$ *também será não singular.*

2. *Vimos no item 2. da Observação 2.3.4, que se*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq O_2 \quad e \quad B \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq O_2 ,$$

mas

$$A \cdot B = O_2 .$$

Observemos que tanto a matriz quadrada A*, quanto a matriz quadrada* B *são matrizes singulares.*

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

3. *Se uma das duas fosse não singular isso* **<u>não</u>** *poderia ocorrer, como mostra o resultado a seguir.*

Temos agora a

Proposição 2.4.3 *Se a matriz $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$ é uma matriz diagonal, cuja diagonal principal não contém zeros , isto é,*

$$a_{ii} \neq 0\,, \qquad para \quad i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$$

então a matriz A será uma matriz não singular (isto é, existe a matriz inversa da matriz A).

Além disso, teremos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}. \tag{2.58}$$

Demonstração:

Deixaremos a demonstração como exercício para o leitor.

□

Proposição 2.4.4 *Suponhamos que $A \in M_n$ é uma matriz não singular e que a matriz $B \in M_{np}$ é tal que*

$$A \cdot B = O_{np}\,. \tag{2.59}$$

$$\textit{Então deveremos ter:} \quad B = O_{np}\,. \tag{2.60}$$

Demonstração:

Como a matriz A é uma matriz não singular, das Definições 2.4.1 e 2.4.2, segue que (veja (2.47))

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n\,. \tag{2.61}$$

Mas,

$$\begin{aligned} B &\overset{(2.53)}{=} I_n \cdot B \\ &\overset{(2.61)}{=} (A^{-1} \cdot A) \cdot B \\ &\overset{(2.37)}{=} A^{-1} \cdot (A \cdot B) \\ &\overset{(2.59)}{=} A^{-1} \cdot O_{np} \\ &\overset{(2.41)}{=} O_{np}\,, \\ \text{ou seja,} \quad B &= O_{np}\,, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

Deixaremos para o leitor a resolução do:

Exemplo 2.4.2 *Sejam* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *tais que*

$$A \cdot B = I_n .$$

Mostre que

$$\begin{aligned} & B \cdot A = I_n \\ \text{e, portanto,} \quad & B = A^{-1} . \end{aligned} \tag{2.62}$$

Observação 2.4.5

1. *Uma aplicação para as propriedades associadas a matrizes desenvolvidas acima, é considerar a equação matricial:*

$$A \cdot x = b , \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned} \text{onde:} \quad & A \in M_n , \\ & b \in M_{n1} , \qquad \text{são dadas} \\ e \quad & x \in M_{n1} \end{aligned}$$

   é uma matriz a ser encontrada (se existir).

2. *Notemos que, na situação do item 1. acima, se matriz quadrada* A *é uma matriz não singular então*

$$x \doteq A^{-1} \cdot b , \tag{2.64}$$

   será a única solução da equação matricial (2.63).

   Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

3. *De modo semelhante com fizemos no item 3. da Observação 2.3.4, podemos associar a equação matricial (2.63) acima, a um sistema linear de* $\underline{n}$ *equações algébricas lineares, a* $\underline{n}$ *incógnitas do tipo*

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \cdots + a_{nn}\, x_n = b_n \end{cases} \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned} \text{onde} \quad & a_{ij} , \quad \text{para} \quad i, j \in \{1, 2, \cdots, n\} \\ e \quad & b_i \quad \text{para} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\} , \end{aligned}$$

   são números (reais ou complexos) dados.

   Logo as correspontes entradas da matriz coluna $\underline{x}$ *serão as (únicas) soluções do sistema linear associado à equação matricial (2.63).*

Para finalizar esta seção, introduziremos a:

Definição 2.4.3 *Dada uma matriz quabrada*

$$A \doteq (a_{ij})_{nn} \in M_n(\mathbb{R}),$$

definimos o **traço da matriz $\underline{A}$**, *denotado por* $\operatorname{tr}(A)$, *como sendo a soma de todos os elementos da diagonal principal da matriz* $\underline{A}$, *isto é,*

$$\operatorname{tr}(A) \doteq \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{2.66}$$

Para ilustrar temos o:

Exercício 2.4.1 *Encontre o traço da matriz*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.67}$$

Resolução:

Temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A) &\overset{(2.66)}{=} \sum_{i=3}^{n} a_{ii} \\ &\overset{(2.67)}{=} 3+0+2=5. \end{aligned} \tag{2.68}$$

□

Temos as seguintes propriedades para o traço de matrizes:

Proposição 2.4.5 *Sejam* $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.
Então:

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B), \tag{2.69}$$

$$\operatorname{tr}(\alpha \cdot A) = \alpha \operatorname{tr}(A). \tag{2.70}$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

□

Temos também a:

Proposição 2.4.6 *Sejam* $A \doteq (a_{ik})_{nm} \in M_{nm}$, $B \doteq (b_{ki})_{mn} \in M_{mn}$.
Então

$$\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A). \tag{2.71}$$

Demonstração:

Notemos que se

$$A \cdot B = (c_{ij})_{nn} \tag{2.72}$$

$$\text{e} \quad B \cdot A = (d_{ls})_{mm}\,, \tag{2.73}$$

então, da Definição 2.3.4 (veja (2.29)), teremos:

$$c_{ij} \doteq \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}\,, \quad \text{para cada} \quad i\,, j \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\} \tag{2.74}$$

$$\text{e} \quad d_{ls} \doteq \sum_{r=1}^{n} b_{lr} a_{rs}\,, \quad \text{para cada} \quad l\,, s \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, m\}. \tag{2.75}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A\,B) &\overset{(2.66)\ \text{e}\ (2.72)}{=} \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \\
&\overset{(2.74)}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{ki} \right) \\
&\overset{\text{comutativa da adição e do produto de números}}{=} \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} \right) \\
&\overset{(2.75)}{=} \sum_{k=1}^{m} d_{kk} \\
&\overset{(2.66)\ \text{e}\ (2.73)}{=} \mathrm{tr}(B\,A)\,,
\end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \quad \mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot A)\,,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Podemos também introduzir a:

Definição 2.4.4 *Se* $A \in M_{nm}$ *definimos a* **matriz transposta da matriz** $A = (a_{ij})_{nm}$, *denotada por* A^t, *como sendo a matriz* $A^t = (b_{ij})_{mn} \in M_{mn}$, *dada por*

$$b_{ij} \doteq a_{ji}\,, \quad \textit{par cada} \quad j \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\} \quad \textit{e} \quad i \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, m\}. \tag{2.76}$$

Observação 2.4.6

1. *A relação que existe entre uma matriz e sua matriz transposta é que as colunas da 1.a, serão as linhas da 2.a e vice-versa.*

2. *Notemos que*

$$\textit{se} \quad m = n\,,$$
$$\textit{então} \quad A\,, A^t \in M_n\,.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Para ilustar temos o

Exemplo 2.4.3 *Se*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

então

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

Também temos o:

Exemplo 2.4.4 *Se*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$

então

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Em particular, neste caso, temos

$$A^t = A.$$

□

Temos as seguintes propriedades para a transposição de uma matriz:

Proposição 2.4.7 *Sejam* $A, B \in M_{nm}$ *e* $C, D \in M_n$.
Então:

1. *temos que*
$$\left(A^t\right)^t = A; \tag{2.77}$$

2. *temos que*
$$(A+B)^t = A^t + B^t; \tag{2.78}$$

3. *segue que*
$$(C \cdot D)^t = D^t \cdot C^t; \tag{2.79}$$

4. *temos que*
$$(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t; \tag{2.80}$$

5. *se a matriz A é uma matriz diagonal (veja a Definição 2.3.2), então*

$$A^t = A\,. \tag{2.81}$$

Em particular, temos

$$\begin{aligned} I_n{}^t &= I_n \\ e \quad O_n{}^t &= O_n\,. \end{aligned}$$

6. *temos:*

$$\operatorname{tr}\left(A^t\right) = \operatorname{tr}(A)\,. \tag{2.82}$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

□

Para finalizar, temos o:

Corolário 2.4.2 *Sejam $A \doteq (a_{ij})_{mn}\,, B \doteq (b_{ij})_{mn} \in M_{mn}(\mathbb{R})$.*
Então:

$$\operatorname{tr}\left(B^t \cdot A\right) = \operatorname{tr}(A \cdot B^t)\,. \tag{2.83}$$

Demonstração:

Consequência imediata da Proposição 2.4.5 acima.

□

2.5 Matrizes triangulares superiores e inferiores

Começaremos com a:

Definição 2.5.1 *Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$, será dita* <u>**triangular superior**</u> *se*

$$a_{ij} = 0\,, \quad \text{para} \quad i > j \quad \text{com} \quad i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}\,. \tag{2.84}$$

Temos também a:

Definição 2.5.2 *Diremos que a matriz quadrada $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$, é* <u>**triangular inferior**</u> *se*

$$a_{ij} = 0\,, \quad \text{para} \quad i < j \quad \text{com} \quad i, j \in \{1, 2 \cdots, n\}\,. \tag{2.85}$$

Observação 2.5.1

1. *Uma matriz triangular superior $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$, deverá ter o seguinte aspecto:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.86}$$

2. *Uma matriz triangular inferior* $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$*, deverá ter o seguinte aspecto:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.87}$$

Com isto temos as seguintes propriedades:

Proposição 2.5.1

1. *Se as matrizes* $A, B \in M_n$ *são matrizes triangulares superiores, então as matrizes*

$$A + B, \quad A \cdot B \quad e \quad \alpha \cdot A$$

serão matrizes triangulares superiores, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*).*

2. *Se as matrizes* $A, B \in M_n$ *são matrizes triangulares inferiores, então as matrizes*

$$A + B, \quad A \cdot B \quad e \quad \alpha \cdot A$$

serão matrizes triangulares inferiores, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*).*

3. *Se a matriz* $A \in M_n$ *é triangular superior, cuja diagonal principal tem todas as entradas não nulas, então a matriz* A *é uma a matriz não singular (isto é, existe a matriz inversa da matriz* A*).*

   Além disso, a matriz A^{-1} *também será uma matriz triangular superior.*

4. *Se a matriz* $A \in M_n$ *é triangular inferior, cuja diagonal principal tem todas as entradas não nulas, então a matriz* A *é uma a matriz não singular (isto é, existe a matriz inversa da matriz* A*).*

   Além disso, a matriz A^{-1} *também será uma matriz triangular inferior.*

Demonstração:
Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

□

2.6 Determinante

Temos a:

Definição 2.6.1 *Seja* $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$ *uma matriz quadrada.*
Se $n = 1$*, definimos o* **determinante da matriz A**, *denotado por* $\det(A)$*, como sendo*

$$\det(A) \doteq a_{11}. \tag{2.88}$$

Se $n > 1$, *para cada* $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *definamos uma matriz, denotada por* A_{ij}, *como sendo a matriz quadrada de ordem* $n-1$, *obtida da matriz* A, *retirando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna da matriz* A, *isto é,*

$$A_{ij} \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.89}$$

Assumindo que o determinante de uma matriz de ordem $(n-1)\times(n-1)$ *foi definido, definimos o determinante da matriz* A, *como:*

$$\det(A) \doteq \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,|A_{1j}| \tag{2.90}$$

$$\textit{onde} \quad |A_{1j}| \doteq (-1)^{1+j}\det(A_{1j}), \quad \textit{para cada} \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\}. \tag{2.91}$$

O número

$$|A_{ij}|,$$

definido em (2.91), *será denominado* **cofator do elemento** a_{ij} *da matriz* A.

A matriz

$$B = (|A_{ij}|) \in M_{(n-1)\,(n-1)},$$

será denominada **matriz cofatora da matriz** A *e denotada por* $\mathrm{cof}(A)$.

Com isto temos a:

Proposição 2.6.1

1. *Se*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

então

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22},$$

isto é,

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{22}. \tag{2.92}$$

2. *Se*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

então

$$\det(A) = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31}\,,$$

isto é,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31}\,. \qquad (2.93)$$

3. *Se* O_n *é a matriz nula, quadrada de ordem* $\underline{n}$*, então*

$$\det(O_n) = 0\,. \qquad (2.94)$$

4. *Se* I_n *é a matriz identidade de ordem* $\underline{n}$*, então*

$$\det(I_n) = 1\,. \qquad (2.95)$$

5. *Se* $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$ *é um matriz diagonal, então o determinante* A *é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal, ou seja,*

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}\,,. \qquad (2.96)$$

6. *Se* $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$ *é triangular superior, então o determinante* A *é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal, ou seja,*

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}\,. \qquad (2.97)$$

7. *Se* $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$ *é triangular inferior, então determinante* A *é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal, ou seja,*

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}\,. \qquad (2.98)$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

□

Observação 2.6.1 *Poderíamos definir o determinante de uma matriz quadrada, a partir dos cofatores de qualquer coluna ou qualquer linha fixada da matriz* $A = (a_{ij})_{nn}$*, que obteríamos o mesmo valor, isto é, fixado* $i_o \in \{1\,, 2 \cdots, n\}$ *, temos que*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_o j} |A_{i_o j}|\,, \qquad (2.99)$$

$$\textit{onde} \quad |A_{i_o j}| \doteq (-1)^{i_o+j} \det(A_{i_o j})\,, \quad \textit{para cada} \quad j \in \{1, \cdots, n\},$$

ou, fixado $j_o \in \{1, \cdots, n\}$*, temos que*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij_o} \, |A_{ij_o}| \,,$$

$$\textit{onde} \quad |A_{ij_o}| \doteq (-1)^{i+j_o} \det(A_{ij_o}) \,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}\,.$$

<u>**Conclusão:**</u> *para cada* $i_o\,, j_o \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$ *fixados, temos que*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_oj} \, |A_{i_oj}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij_o} \, |A_{ij_o}| \,.$$

A demonstração dos fatos acima serão deixada como exercício para o leitor.

A seguir dexibiremos algumas propriedades importantes do determinante de uma matriz quadrada.

Para isto precisaremos da:

Definição 2.6.2 *Dada uma matriz* $A \in M_n$ *podemos realizar as seguintes operações com suas colunas (ou linhas, respectivamente):*

i) trocar duas colunas (ou linhas, respectivamente);

ii) multiplicar uma coluna (ou linha, respectivamente) por $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), não nulo;*

iii) adicionar uma coluna (ou linha, respectivamente) multiplicada por $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), a outra coluna (ou linha, respectivamente).*

Tais operações serão denominadas <u>**operações elementares**</u> *sobre as colunas (ou linhas, respectivamente) da matriz* A*.*

Com isto temos a:

Proposição 2.6.2 *Sejam* $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$ *e* $k \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$ *fixado.*

Consideremos as matrizes $B\,, C \in M_n$*, dadas por:*

$$B_k \doteq (a_{*1} \;\cdots, a_{*(k-1)} \; b_{*k} \; a_{*(k+1)} \;\cdots\; a_{*n}) \tag{2.100}$$

$$\textit{e} \quad C_k \doteq (a_{*1} \;\cdots\; a_{*(k-1)} \; c_{*k} \; a_{*(k+1)} \;\cdots\; a_{*n}) \tag{2.101}$$

onde, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$*,* a_{*j}*,* b_{*j} *e* c_{*j}*, denotam as* j*-ésimas colunas das matrizes* A*,* B *e* C*, respectivamente.*

Para $k_o \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$ *fixado e* $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*),*

$$\textit{se} \quad a_{*k_o} = \beta\, b_{*k_o} + \gamma\, c_{*k_o}\,, \tag{2.102}$$

$$\textit{então} \quad \det(A) = \beta \det(B_{k_o}) + \gamma \det(C_{k_o})\,. \tag{2.103}$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

□

Observação 2.6.2

1. *Notemos que a matriz* B_k*, dada por* (2.100) *(analogamente, a matriz* C_k*, dada por* (2.101)*), é obtida trocando-se a* k*-ésima coluna da matriz* A *pela coluna*

$$b_{*k} \quad \textit{(analogamente, pela coluna } c_{*k}\textit{)}.$$

2. *Podemos reescrever* (2.103)*, da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} &\det\left(a_{*1} \ \cdots \ a_{*(k-1)} \ (\beta\, b_{*k} + \gamma\, c_{*k}) \ a_{*(k+1)} \ \cdots \ a_{*n}\right) \\ &= \beta \det\left(a_{*1} \ \cdots \ a_{*(k-1)} \ b_{*k} \ a_{*(k+1)} \ \cdots \ a_{*n}\right) \\ &\quad + \gamma \det\left(a_{*k} \ \cdots \ a_{*(k-1)} \ c_{*k} \ a_{*(k+1)} \ \cdots \ a_{*n}\right). \end{aligned} \tag{2.104}$$

3. *Vale um resultado análogo ao da Proposição 2.6.2 acima, para as correspondentes operações sobre as linhas da matriz, isto é, se* $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$*, considerando-se*

$$B_k \doteq \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \cdots \\ a_{(k-1)*} \\ b_{k*} \\ a_{(k+1)*} \\ \cdots \\ a_{n*}) \end{pmatrix} \tag{2.105}$$

$$\textit{e} \quad C_k \doteq \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \cdots \\ a_{(k-1)*} \\ c_{k*} \\ a_{(k+1)*} \\ \cdots \\ a_{n*}) \end{pmatrix} \tag{2.106}$$

onde, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$*, denotaremos por*

$$a_{k*}, \quad b_{j*} \quad \textit{e} \quad c_{j*},$$

as j*-ésimas linhas da matrizes* A*,* B *e* C*, respectivamente.*

Para $k_o \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *fixado e* $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*),*

$$\textit{se} \quad a_{k_o*} = \beta\, b_{k_o*} + \gamma\, c_{k_o*}, \tag{2.107}$$

$$\textit{então} \quad \det(A) = \beta \det(B_{k_o}) + \gamma \det(C_{k_o}). \tag{2.108}$$

4. *Notemos que a matriz B_k, dada por (2.105) (analogamente, a matriz C_k, dada por (2.106)), é obtida trocando-se a k-ésima linha da matriz A pela coluna*

$$b_{k*} \quad (\textit{analogamente, pela coluna } c_{k*}).$$

5. *Podemos reescrever (2.108), da seguinte forma:*

$$\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \cdots \\ a_{(k-1)*} \\ \beta\, b_{k*} + \gamma\, c_{k*} \\ a_{(k+1)*} \\ \cdots \\ a_{n*}) \end{pmatrix} = \beta \det\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \cdots \\ a_{(k-1)*} \\ b_{k*} \\ a_{(k+1)*} \\ \cdots \\ a_{n*}) \end{pmatrix} + \gamma \det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \cdots \\ a_{(k-1)*} \\ c_{k*} \\ a_{(k+1)*} \\ \cdots \\ a_{n*}) \end{pmatrix} \tag{2.109}$$

Como conseqüência da Proposição 2.6.2 acima, temos o:

Corolário 2.6.1

1. *Se $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$, então*

$$\det\left(a_{*1} \ \cdots \ a_{*(k-1)} \ \beta\, a_{*k} \ a_{*(k+1)} \ \cdots \ a_{*n}\right) = \beta \det\left(a_{*1} \ \cdots \ a_{*k} \ \cdots \ a_{*n}\right). \tag{2.110}$$

2. *Se $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$, então*

$$\begin{aligned} &\det\left(a_{*1} \ \cdots \ a_{*(k-1)} \ (b_{*k} + c_{*k}) \ a_{*(k+1)} \ \cdots \ a_{*n}\right) \\ &\quad = \det\left(a_{*1} \ \cdots \ a_{*(k-1)} \ b_{*k} \ a_{*(k+1)} \ \cdots \ a_{*n}\right) \\ &\qquad + \det\left(a_{*k} \ \cdots \ a_{*(k-1)} \ c_{*k} \ a_{*(k+1)} \ \cdots \ a_{*n}\right). \end{aligned} \tag{2.111}$$

Demonstração:

De 1. :

Basta tomar

$$\gamma = 0$$

na Proposição 2.6.2 acima.

De 2. :

Basta tomar

$$\beta = \gamma = 1$$

na Proposição 2.6.2 acima.

□

Observação 2.6.3

1. *O item 1. do Corolário 2.6.1 acima, nos diz que o determinante de uma matriz que tem* uma coluna *multiplicada por uma constante, pode ser obtido multiplicando-se o determinante da matriz em questão, pela tal constante.*

2. *O item 2. do Corolário 2.6.1 acima, nos diz que o determinante de uma matriz que tem* **uma coluna** *obtida da soma de duas colunas, pode ser obtido somando-se os determinante das matrizes que têm cada dela uma das colunas que estavam sendo somadas.*

3. *Vale um resultado análogo ao do Corolário 2.6.1. e dos itens 1. e 2 acima, para as correspondentes operações sobre as linhas da matriz A .*

   Deixaremos o enunciado e as demonstrações dos mesmos como exercício para o leitor.

Conseqüência do Corolário 2.6.1 acima, temos o:

Corolário 2.6.2 *Seja $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$, de modo que, para algum $k_o \in \{1, 2, \cdots, n\}$, tenhamos a k_o-ésima coluna da matriz A, ou seja,*

$$a_{*k_o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.112}$$

Então

$$\det(A) = 0. \tag{2.113}$$

Demonstração:

Basta tomar

$$\beta = 0$$

no item 1. do Corolário 2.6.1 acima.

□

Observação 2.6.4

1. *O Corolário 2.6.2 acima, nos diz que se uma coluna de uma matriz quadrada é nula, então o determinante da matriz será igual a zero.*

2. *Vale um resultado análogo ao do Corolário 2.6.2 acima, para uma linha da matriz A, mais precisamente, se uma linha de uma matriz quadrada é nula, então o determinante da matriz será igual a zero, como nos diz o:*

Corolário 2.6.3 *Seja $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$, de modo que, para algum $k_o \in \{1, 2, \cdots, n\}$, tenhamos a k_o-ésima linha da matriz A, ou seja,*

$$a_{k_o*} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{para algum} \quad k_o \in \{1, 2, \cdots, n\}. \tag{2.114}$$

Então

$$\det(A) = 0. \tag{2.115}$$

Demonstração:
Será deixada como exercício para o leitor.

□

Um outro resultado importante é dado pela:

Proposição 2.6.3 *Sejam* $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$*,* $j_o < k_o$*, com* $k_o, j_o \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *fixados.*
Então

$$\det\left(a_{*1} \ \cdots \ a_{*k_o} \ \cdots \ a_{*j_o} \ \cdots, a_{*n}\right) = -\det\left(a_{*1} \ \cdots \ a_{*j_o} \ \cdots \ a_{*k_o} \ \cdots \ a_{*n}\right). \tag{2.116}$$

Demonstração:
Será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 2.6.5

1. *A Proposição 2.6.3 acima nos diz que se trocarmos duas colunas de uma matriz quadrada (no caso, trocamos a* k_o*-ésima coluna coma a* j_o*-ésima coluna), o determinante da matriz obtida após a troca será igual a menos o determinante da matriz inicial.*

2. *Vale um resultado análogo trocando-se "coluna" por "linha", isto é, se trocarmos duas linhas de uma matriz quadrada, o determinante da matriz obtida após a troca, será igual a menos o determinante da matriz inicial, como afirma o:*

Proposição 2.6.4 *Seja* $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$*,* $j_o < k_o$*, com* $k_o, j_o \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *fixados.*
Então

$$\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{k_o*} \\ \cdots \\ a_{j_o*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{j_o*} \\ \vdots \\ a_{k_o*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix}. \tag{2.117}$$

Demonstração:
Será deixada como exercício para o leitor.

□

Como conseqüência da Proposição 2.6.3 acima, temos o:

Corolário 2.6.4 *Seja* $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$ *tal que*

$$a_{*k_o} = a_{*j_o}, \quad \textit{para algum} \quad k_o, j_o \in \{1, 2, \cdots, n\}, \tag{2.118}$$

isto é, se a matriz A *tem duas colunas iguais.*
Então

$$\det(A) = 0. \tag{2.119}$$

Demonstração:

Como consequência da Proposição 2.6.3 acima, segue que se trocarmos a k_o-ésima coluna com a j_o-ésima coluna da matriz A, o determinante da matriz obtida após a troca, será menos o determinante da matriz A.

Mas a matriz obtida quando efetuamos a troca da k_o-ésima coluna com a j_o-ésima coluna, é igual a própria matriz A.

Com isto teremos:

$$\begin{aligned} &\det(A) = -\det(A)\,, \\ \text{ou seja,}\quad &\det(A) = 0\,, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 2.6.6 *Vale um resultado análogo ao Corolário 2.6.4, trocando-se "coluna" por "linha", isto é, ou seja, se a matriz A tem duas linhas iguais, então seu determinate é nulo, mais precisamente, temos o:*

Corolário 2.6.5 *Seja $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$ tal que*

$$a_{k_o *} = a_{j_o *}\,, \quad \textit{para algum} \quad k_o\,, j_o \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}\,, \tag{2.120}$$

isto é, se a matriz A tem duas linhas iguais.

Então

$$\det(A) = 0\,. \tag{2.121}$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor.

□

Como consequência da Proposição 2.6.2, temos o:

Corolário 2.6.6 *Sejam $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e $j_o < k_o$, para $j_o\,, k_o \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}$.*

Então

$$\begin{aligned} &\det(a_{*1} \ \cdots \ a_{*j_o} \ \cdots \ a_{*(k_o-1)} \ (a_{*k_o} + \gamma\, a_{*j_o}) \ a_{*(k_o+1)} \ \cdots \ a_{*n}) \\ &\quad = \det(a_{*1} \ \cdots \ a_{*j_o} \ \cdots \ a_{*(k_o-1)} \ a_{*k_o} \ a_{*(k_o+1)} \ \cdots \ a_{*n}) \\ &\quad = \det(A)\,, \end{aligned} \tag{2.122}$$

ou seja, se trocarmos uma coluna de uma matriz, pela mesma somada com um múltiplo de uma outra coluna, o determinante da matriz obtida, será igual ao da matriz inicial.

Demonstração:

Da Proposição 2.6.2, segue que

$$\begin{aligned}
&\det(a_{*1} \ \cdots \ a_{*j_o} \ \cdots \ a_{*(k_o-1)} \ (a_{*k_o} + \gamma \, a_{*j_o}) \ a_{*(k_o+1)} \ \cdots \ a_{*n}) \\
&\overset{(2.103)}{=} \det(a_{*1} \ \cdots \ a_{*j_o} \ \cdots \ a_{*(k_o-1)} \ a_{*k_o} \ a_{*(k_o+1)} \ \cdots \ a_{*n}) \\
&\qquad + \gamma \underbrace{\det(a_{*1} \ \cdots \ a_{*j_o} \ \cdots \ a_{*(k_o-1)} \ a_{*j_o} \ a_{*(k_o+1)} \ \cdots \ a_{*n})}_{\overset{\text{Corolário } 2.6.4}{=} 0} \\
&= \det(a_{*1} \ \cdots \ a_{*j_o} \ \cdots \ a_{*(k_o-1)} \ a_{*k_o} \ a_{*(k_o+1)} \ \cdots , a_{*n}) \\
&= \det(A) ,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 2.6.7 *Valem um resultado análogo ao acima para a correspondente opera¸çao sobre as linhas da matriz A, ou seja, se trocarmos uma coluna de uma matriz, pela mesma somada com um múltiplo de uma outra coluna, o determinante da matriz obtida, será igual ao da matriz inicial. mais precisamente, temos o:*

Corolário 2.6.7 *Sejam $A = (a_{ij})_{nn} \in M_n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e $j_o < k_o$, para $j_o, k_o \in \{1, 2, \cdots, n\}$.*

Então

$$\det \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{j_o*} \\ \cdots \\ a_{k_o*} + \gamma \, a_{j_o*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{j_o*} \\ \vdots \\ a_{k_o*} \\ \vdots \\ a_{n*} = \det(A) \end{pmatrix} . \tag{2.123}$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor.

□

Observação 2.6.8

1. *Resumindo: se $A \in M_n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) então:*

   (i) trocar duas colunas (ou linhas) da matriz A, faz com que o determinante da matriz obtida, seja menos determinante da matriz A;

   (ii) adicionar λ vezes uma coluna (ou linha) da matriz A a uma outra coluna (ou linha), faz com que o determinante da matriz obtida seja igual ao determinante da matriz A;

(iii) multiplicar uma coluna (ou linha) da matriz A *por* λ*, faz com que o determinante da matriz obtida seja igual ao determinante da matriz* A *multiplicado por* λ*.*

23.08.2019 - 2.a

Além disso temos o seguinte resultado importante

Proposição 2.6.5 *Sejam* $A, B \in M_n$*.*
Então

$$\det(A \cdot B) = \det(A)\, \det(B)\,. \tag{2.124}$$

Demonstração:
Deixaremos como exercício para o leitor a demonstração da identidade acima.

□

Temos também as seguintes propriedades para a transposição de uma matriz:

Proposição 2.6.6 *Sejam* $A, B \in M_n$*.*
Então

$$\det(A^t) = \det(A)\,; \tag{2.125}$$

Demonstração:
Deixaremos como exercício para o leitor a demonstração.

□

Com isto podemos introduzir a seguinte definição:

Definição 2.6.3 *Seja* A *uma matriz quadrada de ordem* $\underline{n}$ *(isto é,* $A \in M_n$*).*
Diremos que a matriz A *é uma* **<u>matriz simétrica</u>** *se*

$$A^t = A\,. \tag{2.126}$$

Temos também a:

Definição 2.6.4 *Diremos que a matriz* A *é uma* **<u>matriz anti-simétrica</u>** *se*

$$A^t = -A\,. \tag{2.127}$$

Deixaremos para o leitor a resolução do

Exemplo 2.6.1 *A matriz*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

é uma matriz simétrica, pois

$$A^t = A\,.$$

e do

Exemplo 2.6.2 *A matriz*

$$B \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz anti-simétrica, pois

$$B^t = -B\,.$$

Temos as seguintes propriedades associadas as matrizes simétricas ou anti-simétricas:

Proposição 2.6.7 *Sejam* $A\,,B \in M_n$.

1. *Se as matrizes* A *e* B *são matrizes simétricas, então a matriz* $A+B$ *também será uma matriz simétrica, ou seja,*
$$(A+B)^t = A+B\,. \tag{2.128}$$

2. *Se as matrizes* A *e* B *são matrizes anti-simétricas, então a matriz* $A+B$ *também será uma matriz anti-simétrica, ou seja,*
$$(A+B)^t = -(A+B)\,. \tag{2.129}$$

3. *Se a matriz* A *é matriz simétrica e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), então a matriz* $\alpha \cdot A$ *também será uma matriz simétrica, ou seja,*
$$(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A\,. \tag{2.130}$$

4. *Se a matriz* A *é um matriz anti-simétrica e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), então a matriz* $\alpha \cdot A$ *também será uma matriz anti-simétrica, ou seja,*
$$(\alpha \cdot A)^t = -\alpha \cdot A\,. \tag{2.131}$$

5. *Se as matrizes* A *e* B *são matrizes simétricas, então a matriz* $A \cdot B$ *também será uma matriz simétrica se, e somente se,*
$$A \cdot B = B \cdot A\,, \tag{2.132}$$
ou seja, se elas comutam, segundo o produto de matrizes.

6. *Se as matrizes* A *e* B *são matrizes anti-simétricas, então a matriz* $A \cdot B$ *será uma matriz simétrica se, e somente se, vale (2.132), ou seja, se elas comutam, segundo o produto de matrizes.*

7. *Se a matriz* A *é uma matriz simétrica e a matriz* B *é uma matriz anti-simétrica, então a matriz* $A \cdot B$ *será uma matriz anti-simétrica se, e somente se, vale (2.132), ou seja, se elas comutam, segundo o produto de matrizes.*

Demonstração:

Do item 1. :

Se as matrizes A e B são matrizes simétricas, pela Definição 2.6.3, teremos:

$$A^t = A \quad \text{e} \quad B^t = B\,. \tag{2.133}$$

Como

$$\begin{aligned}(A+B)^t &\overset{(2.78)}{=} A^t + B^t \\ &\overset{(2.133)}{=} A + B\,,\end{aligned}$$

segue, pela Definição 2.6.3, que a matriz $A + B$ será uma matriz simétrica.

Do item 2. :

Se as matrizes A e B são matrizes anti-simétricas, pela Definição 2.6.4, teremos:

$$A^t = -A \quad \text{e} \quad B^t = -B\,. \tag{2.134}$$

Como

$$\begin{aligned}(A+B)^t &\overset{(2.78)}{=} A^t + B^t \\ &\overset{(2.134)}{=} -A + (-B) \\ &= -(A+B)\,,\end{aligned}$$

segue, pela Definição 2.6.4, que a matriz $A + B$ será uma matriz anti-simétrica.

Do item 3. :

Se a matriz A é uma matriz simétrica, pela Definição 2.6.3, teremos:

$$A^t = A\,. \tag{2.135}$$

Como

$$\begin{aligned}(\alpha \cdot A)^t &\overset{(2.80)}{=} \alpha \cdot A^t \\ &\overset{(2.135)}{=} \alpha \cdot A\end{aligned}$$

segue, pela Definição 2.6.3, que a matriz αA será uma matriz simétrica.

Do item 4. :

Se a matriz A é uma matriz anti-simétrica, pela Definição 2.6.4, teremos:

$$A^t = A\,. \tag{2.136}$$

Como

$$\begin{aligned}(\alpha \cdot A)^t &\overset{(2.80)}{=} \alpha \cdot A^t \\ &\overset{(2.136)}{=} \alpha \cdot (-A) \\ &= -(\alpha \cdot A)\,,\end{aligned}$$

segue, pela Definição 2.6.4, que a matriz αA será uma matriz anti-simétrica.

Do item 5. :

Se as matrizes A e B são matrizes simétricas, pela Definição 2.6.3, teremos:

$$A^t = A \quad \text{e} \quad B^t = B\,. \tag{2.137}$$

Como

$$\begin{aligned}(A \cdot B)^t &\overset{(2.79)}{=} B^t \cdot A^t\\ &\overset{(2.137)}{=} B \cdot A\\ &\overset{(2.132)}{=} A \cdot B\,,\end{aligned}$$

segue, pela Definição 2.6.3, que a matriz $A \cdot B$ será uma matriz simétrica.

Do item 6. :

Se as matrizes A e B são matrizes anti-simétricas, pela Definição 2.6.4, teremos:

$$A^t = -A \quad \text{e} \quad B^t = -B\,. \tag{2.138}$$

Como

$$\begin{aligned}(A \cdot B)^t &\overset{(2.79)}{=} B^t \cdot A^t\\ &\overset{(2.137)}{=} (-B) \cdot (-A)\\ &= B \cdot A\\ &\overset{(2.132)}{=} A \cdot B\,,\end{aligned}$$

segue, pela Definição 2.6.3, que a matriz $A \cdot B$ será uma matriz simétrica.

Do item 7. :

Se a matriz A é simétrica e a matriz B é anti-simétrica, pelas Definições 2.6.3 e 2.6.4, respectivamente, teremos:

$$A^t = A \quad \text{e} \quad B^t = -B\,. \tag{2.139}$$

Como

$$\begin{aligned}(A \cdot B)^t &\overset{(2.79)}{=} B^t \cdot A^t\\ &\overset{(2.139)}{=} (-B) \cdot A\\ &= -(B \cdot A)\\ &\overset{(2.132)}{=} -(A \cdot B)\,,\end{aligned}$$

segue, pela Definição 2.6.4, que a matriz $A \cdot B$ será uma matriz anti-simétrica, finalizando a demonstração.

$\square$

Temos também a:

Proposição 2.6.8 *Seja* $A \in M_n$*. Então podemos encontrar únicas matrizes* $B, C \in M_n$*, de modo que* B *é uma matriz simétrica,* C *é uma matriz anti-simétrica e*

$$A = B + C . \tag{2.140}$$

Demonstração:

Consideremos

$$B \doteq \frac{A + A^t}{2}, \tag{2.141}$$

$$\text{e} \qquad C \doteq \frac{A - A^t}{2}. \tag{2.142}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
B^t &\overset{(2.141)}{=} \left(\frac{A + A^t}{2}\right)^t \\
&= \left[\frac{1}{2}(A + A^t)\right]^t \\
&\overset{(2.80)}{=} \frac{1}{2}\,(A + A^t)^t \\
&\overset{(2.78)}{=} \frac{1}{2}\,[A^t + (A^t)^t] \\
&\overset{(2.77)}{=} \frac{1}{2}\,(A^t + A) \\
&\overset{(2.10)}{=} \frac{1}{2}\,(A + A^t) \\
&\overset{(2.141)}{=} B,
\end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.6.3, que a matriz B é uma matriz simétrica.

Temos também que

$$\begin{aligned}
C^t &\overset{(2.142)}{=} \left(\frac{A - A^t}{2}\right)^t \\
&= \left[\frac{1}{2}(A - A^t)\right]^t \\
&\overset{(2.80)}{=} \frac{1}{2}\,(A - A^t)^t \\
&\overset{(2.78)}{=} \frac{1}{2}\,[A^t + (-A^t)^t] \\
&= \frac{1}{2}\,\{A^t + [(-1)\,A^t]^t\} \\
&\overset{(2.80)}{=} \frac{1}{2}\,\{A^t + (-1)\,(A^t)^t\} \\
&\overset{(2.77)}{=} \frac{1}{2}\,(A^t - A) \\
&\overset{(2.10)}{=} -\frac{1}{2}\,(A - A^t) \\
&\overset{(2.142)}{=} C,
\end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.6.4, que a matriz C é uma matriz anti-simétrica.

Além disso,

$$\begin{aligned} B + C &\overset{(2.141)\text{ e }(2.142)}{=} \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2} \\ &= \frac{A + A^t + A - A^t}{2} \\ &= \frac{2A}{2} \\ &= A, \end{aligned}$$

completando a resolução.

□

Como uma aplicação de determinantes e de transposição de matrizes temos o seguinte resultado:

Proposição 2.6.9 *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz.*

A matriz A é uma matriz não singular se, e somente se,

$$\det(A) \neq 0. \tag{2.143}$$

Neste caso

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [\operatorname{cof}(A)]^t \tag{2.144}$$

onde $\operatorname{cof}(A)$ é a matriz cofatora associada à matriz A (veja (2.91)).

Demonstração:

Será deixada como exercício para o leitor.

□

Com isto podemos resolver o:

Exemplo 2.6.3 *Verifique se a matriz quadrada de ordem 3,*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

é um matriz não-singular.

Caso afirmativo encontre sua matriz inversa.

Resolução:

Observemos que:

$$\begin{aligned} |A_{11}| &\overset{(2.91),\ \text{com } j=1}{=} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^2(6-3) = 3\,, \end{aligned} \tag{2.145}$$

$$\begin{aligned} |A_{12}| &\overset{(2.91),\ \text{com } j=2}{=} (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^3(-3+9) = -6\,, \end{aligned} \tag{2.146}$$

$$\begin{aligned} |A_{13}| &\overset{(2.91),\ \text{com } j=3}{=} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^4(-1+6) = 5\,. \end{aligned} \tag{2.147}$$

Logo

$$\begin{aligned} \det(A) &\overset{(2.90),(2.145),(2.146)\text{ e }(2.147)}{=} a_{11}|A_{11}| + a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| \\ &= 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) + (-1) \cdot 5 \\ &= 9 - 12 - 5 \\ &= -8 \neq 0\,. \end{aligned} \tag{2.148}$$

Logo, pela Proposição 2.6.9 acima, segue que a matriz A é um matriz não singular, isto é, existe a matriz inversa A^{-1}.

Para encontrar a matriz A^{-1} calculemos:

$$\begin{aligned} |A_{21}| &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^3(6+1) \\ &= -7\,, \end{aligned} \tag{2.149}$$

$$\begin{aligned} |A_{22}| &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^4(9-3) \\ &= 6\,, \end{aligned} \tag{2.150}$$

$$\begin{aligned} |A_{23}| &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^5(3+6) \\ &= -9\,, \end{aligned} \tag{2.151}$$

$$\begin{aligned} |A_{31}| &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^4(6+2) \\ &= 8\,, \end{aligned} \tag{2.152}$$

$$\begin{aligned}
|A_{32}| &= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^5(9-1) \\
&= -8\,, \qquad (2.153)\\
|A_{33}| &= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^6(6+2) \\
&= 8\,. \qquad (2.154)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\operatorname{cof}(A) &= \begin{pmatrix} |A_{11}| & |A_{12}| & |A_{13}| \\ |A_{21}| & |A_{22}| & |A_{23}| \\ |A_{31}| & |A_{32}| & |A_{33}| \end{pmatrix} \\
&\overset{(2.145),(2.146),(2.147),(2.149),(2.150),(2.151),(2.152),(2.153),(2.154)}{=} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 5 \\ -7 & 6 & -9 \\ 8 & -8 & 8 \end{pmatrix}. \qquad (2.155)
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
A^{-1} &\overset{(2.144)}{=} \frac{1}{\det(A)}[\operatorname{cof}(A)]^t \\
&\overset{(2.148)\text{ e }(2.155)}{=} \frac{-1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 \\ -6 & 6 & -8 \\ 5 & -9 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-3}{8} & \frac{7}{8} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & 1 \\ \frac{5}{8} & \frac{9}{8} & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Uma outra aplicação de determinantes é para resolução de sistemas lineares de equações algébricas do 1.o grau, como veremos no Capítulo 3.

2.7 Exercícios

Exercício 2.7.1 *Mostre que:*

1. *Se a matriz* A *é uma matriz inversível, então a matriz* $x = O_{n1}$ *(matrix coluna* $n \times 1$*, identicamente nula) é a única solução da equação matricial* $A \cdot x = O$.

2. *Se a matriz* A *é uma matriz inversível, então a equação matricial* $A \cdot x = b$ *possui uma única solução.*

Exercício 2.7.2 *Encontre, se existir, a matriz inversa associada a matriz* $A \in M_n$*, em cada um dos casos abaixo:*

$$1)\ A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad 2)\ A \doteq \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \qquad 3)\ A \doteq \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4)\ A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad 5)\ A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 6)\ A \doteq \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Capítulo 3

Escalonamento de matrizes e sistemas lineares

3.1 Introdução

Neste capítulo introduziremos a noção de escalonamento de matrizes para resolução de sistemas lineares homogêneos ou não-homegoêneos associadas as respectivas equações matriciais.

3.2 Definições básicas

Observação 3.2.1 *Consideraremos a seguir questões relacionadas com o sistema linear de $\underline{m}$ equações a $\underline{n}$ incógnitas não-homogêneo, a saber,*

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

que na forma matricial pode ser escrito na seguinte forma:

$$A \cdot x = b\,, \tag{3.2}$$

onde

$$A \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}\,, \tag{3.3}$$

$$x \doteq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad e \quad b \doteq \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Notação 3.2.1 *Dada a matriz* $C = (c_{ij}) \in M_{kl}$, *para cada* $j \in \{1, 2, \cdots, l\}$, *denotaremos por*

$$c_{*j} \doteq \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{kj} \end{pmatrix},$$

a j*-ésima coluna da matriz* C.

Podemos agora introduzir a:

Definição 3.2.1 *Consideremos as matrizes* $A \in M_{mn}$ *e* $b \in M_m$, *como na Observação 3.2.1.*

A matriz

$$(a_{*1} \cdots a_{*n}\ b_*) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix},$$

será denominada **matriz aumentada** *associada ao sistema não homogêno* (3.1).

Uma **solução** *da equação matricial* (3.2) *(se existir) será uma matriz*

$$u \doteq \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in M_{n1},$$

tal que

$$A \cdot u = B.$$

O conjunto de todas as soluções da equação matricial (3.1) *será denominado* **conjunto solução** *da equação matricial* (3.2).

Observação 3.2.2 *Da identificação* (3.1) *com* (3.2), *segue que encontrar uma solução para o sistema linear* (3.1) *é equivalente a encontrar uma solução da equação matricial* (3.2).

Verifiquemos isto no:

Exemplo 3.2.1 *Coloque o sistema linear*

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & +x_2 & +x_3 & = & -1 \\ x_1 & +x_2 & & = & 1 \end{cases} \tag{3.5}$$

na forma matricial.

Resolução:

Notemos que o sistema liner (3.5) é equivalente a equação matricial

$$A \cdot x = b\,, \tag{3.6}$$

onde:

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \doteq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que a equação matricial (3.6) acima, tem como uma solução a matriz

$$u \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Logo uma solução do sistema linear (3.5), será:

$$x_1 = 1\,, \quad x_2 = 0 \quad \text{e} \quad x_3 = -1\,.$$

□

Observação 3.2.3 *A matriz aumentada associada ao sistema do Exemplo 3.2.1 acima, será a matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definição 3.2.2 *Diremos que as equações matriciais*

$$A \cdot x = b \quad e \quad C \cdot x = d$$

são **equivalentes** *se, e somente se:*

1. $A\,, C \in M_{mn}$;

2. $b\,, d \in M_{m1}$

3. *e as duas equações matriciais possuem o mesmo conjunto solução.*

Observação 3.2.4 *Observemos que as equações matriciais*

$$A \cdot x = b \quad e \quad C \cdot x = d$$

são equivalentes se, e somente se, os sistemas lineares associados às correspondentes equações matriciais são equivalentes (isto é, os sistemas associados possuem o mesmo conjunto solução).

Daremos a seguir alguns procedimentos para encontrar solução de sistemas lineares não homogêneos (e homogêneos).

O que faremos é resolver um sistema linear, fazendo operações básicas no mesmo (ou seja, multiplicando-se as equações do mesmo por constantes não nulas, somando-se equações do mesmo, etc.).

Observe que a cada equação do sistema linear corresponde uma linha da matriz aumentada associada ao sistema linear dado.

Logo a cada operação com as equações do sistema linear corresponderá a uma correspondente operação sobre as linhas da matriz aumentado associada ao mesmo e reciprocamente.

Para ilustrar consideraremos o sistema linear de equações do 1.o grau:

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +5\,x_3 & = & 11 \\ 2\,x_1 & +x_2 & +7\,x_3 & = & 15 \\ 2\,x_1 & & +4\,x_3 & = & 8 \end{array}\right. \longleftrightarrow A\cdot x = b\,, \tag{3.7}$$

$$\text{onde} \quad A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } b \doteq \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +5\,x_3 & = & 11 \\ 2\,x_1 & +x_2 & +7\,x_3 & = & 15 \\ 2\,x_1 & & +4\,x_3 & = & 8 \end{array}\right. \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \doteq S_o \text{ (matriz aumentada)}$$

$$\Updownarrow (2^a - 2\times 1^a)$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +5\,x_3 & = & 11 \\ & -x_2 & -3\,x_3 & = & -7 \\ 2\,x_1 & & +4\,x_3 & = & 8 \end{array}\right. \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \doteq S_1$$

$$\Updownarrow (3^a - 2\times 1^a)$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +5\,x_3 & = & 11 \\ & -x_2 & -3\,x_3 & = & -7 \\ & -2\,x_2 & -6\,x_3 & = & -14 \end{array}\right. \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -6 & -14 \end{pmatrix} \doteq S_2$$

$$\Updownarrow (1^a + 2^a)$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & & +2\,x_3 & = & 4 \\ & -x_2 & -3\,x_3 & = & -7 \\ & -2\,x_2 & -6\,x3 & = & -14 \end{array}\right. \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -6 & -14 \end{pmatrix} \doteq S_3$$

$$\Updownarrow (3^a - 2\times 2^a)$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & & +2\,x_3 & = & 4 \\ & -x_2 & -3\,x_3 & = & -7 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \doteq S_4$$

$$\Updownarrow (2^a \times (-1))$$

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad +2\,x_3 = 4 \\ \quad\quad x_2 \; +3\,x_3 = 7 \\ \quad\quad\quad\quad 0 = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \doteq S_5.$$

O sistema linear obtido acima é o mais simples (que pode ser obtido por meio da operações elementares sobre o sistema linear dado inicialmente) que é equivalente ao sistema original.

Para resolver o sistema linear acima bastará tomarmos, por exemplo:

$$x_3 \doteq \alpha \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})$$

assim, das duas primeiras equações do sistema linear acima e à esquerda, obteremos:

$$x_1 \doteq 4 - 2\,\alpha \quad \text{e} \quad x_2 \doteq 7 - 3\,\alpha\,.$$

Assim o conjunto solução do sistema linear dado incialmente será

$$\{(x_1\,, x_2\,, x_3) = (4 - 2\,\alpha\,, 7 - 3\,\alpha\,, \alpha), \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}\,(\text{ ou } \mathbb{C})\}\,.$$

Na seção a seguir, trataremos das operações elementares sobre a matriz aumentada associada ao sistema linear não homogêneo.

3.3 Matrizes elementares

Observemos que as operações que fizemos na matriz S_i para obter a matriz S_{i+1}, são operações elementares sobre as linhas (ver Definição 2.6.2).

Para facilitar o entendimento do que virá mais adiante introduziremos a:

Definição 3.3.1

1. *A operação de trocar duas linhas de uma matriz, daremos o nome de operação do* **tipo I**.

2. *A operação de multiplicar uma linha por um número não nulo, daremos o nome de operação do* **tipo II**.

3. *A operação de adicionar o múltiplo de uma linha a outra linha, daremos o nome de operação do* **tipo III**.

Tais operações são, como já dissemos, operações elementares sobre as linhas da matriz (ver Definição 2.6.2).

No Exemplo 3.2.1 acima, as operações elementares que realizamos são:

$$S_o \overset{(\text{tipo III})}{\longrightarrow} S_1 \overset{(\text{tipo III})}{\longrightarrow} S_2 \overset{(\text{tipo III})}{\longrightarrow} S_3 \overset{(\text{tipo III})}{\longrightarrow} S_4 \overset{(\text{tipo II})}{\longrightarrow} S_5.$$

Seja

$$I_m$$

a identidade de ordem $\underline{m}$.

Introduziremos também a:

Definição 3.3.2

1. *Fazendo uma operação do tipo I na matriz* I_m, *obtemos uma matriz quadrada de ordem* m, *que chamaremos de* <u>**matriz elementar do tipo I**</u> *e será denotada por* E_I.

2. *Uma* <u>**matriz elementar do tipo II**</u> *é uma matriz quadrada de ordem* $\underline{m}$, *obtida da matriz* I_m *por uma operação do tipo II e será denotada por* E_{II}.

3. *Uma* <u>**matriz elementar do tipo III**</u> *é uma matriz quadrada de ordem* $\underline{m}$, *obtida da matriz* I_m *por uma operação do tipo III e será denotada por* E_{III}.

Observação 3.3.1 *Dada uma matriz* $A \in M_{mn}$, *fazer uma operação do tipo I (ou do tipo II ou do tipo III, respectivamente) é equivalente a multiplicar a matriz* A *por uma matriz do tipo I (ou do tipo II ou do tipo III, respectivamente), isto é,*

$$A \overset{\text{(operação elementar do tipo I)}}{\longmapsto} E_I \cdot A$$

(ou

$$A \overset{\text{(operação elementar do tipo II)}}{\longmapsto} E_{II} \cdot A\,,$$

e

$$A \overset{\text{(operação elementar do tipo III)}}{\longmapsto} E_{III} \cdot A\,,$$

respectivamente).

A demonstração destes fatos será deixada como exercício para o leitor

Ilustraremos a propriedade acima com o seguinte exemplo:

Exemplo 3.3.1 *Seja*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Trocando-se a 2.a linha da matriz A, *pela 2.a linha, menos duas vezes a 1.a linha, obteremos:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \overset{2^a - 2\times 1^a}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \doteq B \tag{3.10}$$

A mesma operação acima na matriz identidade I_3, *nos fornece a seguinte matriz elementar do tipo III:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{2^a - 2\times 1^a}{\longrightarrow} \quad \mathbf{E}_{III} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Notemos que:

$$
\begin{aligned}
E_{III} \cdot A &\overset{(3.9)\ e\ (3.11)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
&\overset{(3.10)}{=} B,
\end{aligned}
$$

ou seja, as operações produzem a mesma matriz, como foi dito na Observação 3.3.1 acima.

□

Um resultado importante é dado pela:

Proposição 3.3.1 *Uma matriz elementar de qualquer tipo é uma matriz não singular (isto é, é uma matriz inversível) e sua matriz inversa é do mesmo tipo que ela, ou seja,* E_I *(respectivamente,* E_{II} *e* E_{III}*) é uma matriz não-singular e a matriz inversa* ${E_I}^{-1}$ *(respectivamente,* ${E_{II}}^{-1}$ *e* ${E_{III}}^{-1}$ *também é uma matriz elementar do tipo* I *(respectivamente, do tipo* I *e do tipo* II*).*

Demonstração:

Será deixado como exercício para o leitor.

□

Para ilustrar temos o:

Exemplo 3.3.2 *Mostre que a matriz elementar (veja o Exemplo 3.3.1).*

$$E_{III} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é do do tipo III*, admite uma matriz inversa e está é uma matriz elementar do tipo III.*

Resolução:

Observemos que a matriz E_{III} é uma matriz triangular inferior (veja a Definição 2.5.2). Logo

$$\det(E_{III}) \overset{\text{item 7. da Proposição 2.6.1}}{=} 1,$$

portanto, pela Proposição 3.3.1, a matriz E_{III} é uma matriz não singular, isto é, existe a matriz inversa ${E_{III}}^{-1}$.

Além disso, pela Proposição 2.6.9, temos:

$$E_{III}{}^{-1} \overset{(2.144) \text{ e exercício}}{=} \frac{1}{\det(E_{III})} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{2^a + 2 \times 1^a}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto a matriz inversa da matriz E_{III}, ou seja, a matriz $E_{III}{}^{-1}$, também é uma matriz elementar do tipo III.

□

Podemos agora introduzir a:

Definição 3.3.3 *Sejam* $A, B \in M_{mn}$.

Diremos que a matriz A *é* **l-equivalente** *(ou equivalente por linhas) à matriz* B*, se a matriz* A *pode ser obtida da matriz* B*, por meio de uma sequência finita de operações elementares sobre as linhas da matriz* B.

Neste caso escreveremos

$$A \sim B.$$

Observação 3.3.2

1. *Da Observação 3.3.1, segue que*

$$A \sim B \quad \text{se, e somente se,} \quad A = E_s \cdot E_{s-1} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot B,$$

onde $E_1, E_2, \ldots, E_s$ *são matrizes do tipo I, do tipo II, ou do tipo III.*

2. *Sejam* $A, B, C \in M_{mn}$.

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que:

(a) reflexiva:

$$A \sim B, \quad \text{para cada} \quad A \in M_{mn};$$

(b) simétrica:

$$\text{se} \quad A \sim B, \quad \text{então} \quad B \sim A;$$

(c) tTransitiva:

$$\text{Se} \quad A \sim B \quad \text{e} \quad B \sim C, \quad \text{então} \quad A \sim C.$$

isto é, $\sim$ *é uma* **relação de equivalência** *em* M_{mn}.

Um resultado importante sobre l-equivalênica é dado pela:

Proposição 3.3.2 *Sejam* $A, B \in M_{mn}$.

Se

$$A \sim B,$$

então podemos encontrar uma matriz quadrada $P \in M_{mn}$, *não singular, tal que*

$$\begin{aligned} & B = P \cdot A \\ \textit{ou, equivalentemente} \quad & A = P^{-1} \cdot B. \end{aligned} \tag{3.12}$$

A matriz P *é um produto de matrizes elementares (que, pela Proposição 3.3.1, são inversíveis).*

Demonstração:

Segue da Proposição 3.3.1 e do item 1. da Observação 3.3.2, que basta definir

$$P \doteq E_s \cdots E_2 \cdot E_1, \tag{3.13}$$

finalizando a demonstração do resultado.

□

Notação 3.3.1 *Se* $A \in M_{mn}$ *e* $b \in M_{m1}$, *denotaremos por*

$$D \doteq (A \;\; b)$$

a matriz de $M_{m\,(n+1)}$, *onde as* m *primeiras colunas da matriz* D, *são as colunas da matriz* A *e a* $m+1$ *coluna da matriz* D, *é a coluna da matriz* b, *ou seja, se* $A = (a_{ij})$ *e* $b = (b_{i1})$, *então*

$$(A \;\; b) = (a_{*1} \;\; a_{*2} \;\; \cdots \;\; a_{*n} \;\; b_{*1}).$$

A relação entre matrizes l-equivalentes e a equações matriciais equivalentes é dado pela:

Proposição 3.3.3 *Sejam* $A, C \in M_{mn}$ *e* $b, d \in M_{m1}$.

A matriz $(A \;\; b) \in M_{m(n+1)}$ *é l-equivalente a matriz* $(C \;\; d) \in M_{m(n+1)}$, *se, e somente se, a equação matricial*

$$A \cdot x = b$$

é equivalente a equação matricial

$$C \cdot x = d,$$

ou seja, têm o mesmo conjunto solução.

Demonstração:

Observemos que, da Proposição 3.3.2 acima, existe $P \in M_{mn}$ não singular, tal que

$$\begin{aligned} & (C \;\; d) = P \cdot (A \;\; b) \\ \text{e} \quad & (A \;\; b) = P^{-1} \cdot (C \;\; d). \end{aligned}$$

Como consequência da definição do produto de matrizes (veja a Definição 2.3.4), segue que

$$
\begin{aligned}
& C = P \cdot A\,, && (3.14)\\
\text{e} \quad & d = P \cdot b\,, && (3.15)\\
\text{ou seja,} \quad & A = P^{-1} \cdot C\\
\text{e} \quad & b = P^{-1} \cdot d\,.
\end{aligned}
$$

Deixaremos a verificação do fato acima como exerício para o leitor.

Logo, se $u \in M_{n1}$, é solução da equação matricial

$$
\begin{aligned}
& A \cdot x = b\\
\text{então, segue que} \quad & A \cdot u = b\,. && (3.16)
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
C \cdot u & \overset{(3.14)}{=} (P \cdot A) \cdot u\\
& \overset{(2.37)}{=} P \cdot (A \cdot u)\\
& \overset{(3.16)}{=} P \cdot b\\
& \overset{(3.15)}{=} d\,.
\end{aligned}
$$

Portanto a matriz $u \in M_{n1}$, será solução da equação matricial $C \cdot x = d$.

Além disso, vale a recíproca da afirmação, cuja verificação será deixada como exercício para o leitor, completando a demonstração.

□

Observação 3.3.3 *Vale observar que a Proposição 3.3.3 acima, pode ser aplicada para as matrizes aumentadas associadas a sistemas lineares, ou seja, as matrizes aumentadas são l-equivalentes se, e somente se, os sistemas lineares correspondentes são equivalentes.*

Como consequênica da Proposição 3.3.3, temos o:

Corolário 3.3.1 *Sejam* $A\,, B \in M_{mn}$.

Então

$$A \sim B \qquad \textit{em } M_{mn}$$

se, e somente se, para $x \in M_{n1}$*, as equações matriciais*

$$
\begin{aligned}
& A \cdot x = O_{m1}\\
e \quad & C \cdot x = O_{m1}
\end{aligned}
$$

são equivalentes, onde O_{m1}*, denota a matriz coluna nula de* M_{m1}.

Demonstração:

Basta tomar

$$b = d \doteq O_{m1}\,,$$

na Proposição 3.3.3 acima.

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

□

Observação 3.3.4 *No Exemplo 3.3.1, tratado anteriormente, obtivemos, após as operações de l-equivalência sobre a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuja **forma** *nos facilitou a resolver o sistema linear inicial associado (a saber (3.7)).*

Observemos que o sistema linear associado a esta última matriz é o mais simples de ser resolvido e, além disso, ele é equivalente ao sistema linear dado inicialmente, cuja matriz aumentada é a matriz A.

A seguir daremos um nome as matrizes que tem essa **forma especial**.

Antes, porém temos a:

Definição 3.3.4 *Dada uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_{nm}$, se $i_o \in \{1, 2, \cdots, n\}$, definimos o* **coeficiente líder da i_o-ésima linha***, não-nula, ou seja, de $a_{i_o *}$, da matriz A, como sendo o primeiro elemento não nulo dessa linha, escolhido da esquerda para a direita, mais precisamente,*

$$a_{i_o j_o} \neq 0\,, \qquad \text{onde} \quad j_o \in \{1, 2, \cdots, m\} \tag{3.17}$$

é o menor índice de modo que vale (3.18), ou seja,

$$a_{i_o j} = 0\,, \qquad \text{para} \quad j \in \{1, 2, \cdots, j_o - 1\}. \tag{3.18}$$

Agora estamos em condições de caracterizar a forma da matriz aumentada associada ao sistema linear mais simples obtido no Exemplo 3.3.1 (isto é, a matriz B):

Definição 3.3.5 *Uma matriz $A \in M_{mn}$ é dita estar na* **forma escalonada reduzida por linhas***, denotada por FERL, se ela tem as seguintes propriedades:*

1. *Todas as linhas nulas da matriz A, ocorrem nas linhas inferiores da mesma;*

2. *O coeficiente líder de uma linha não nula de A é igual a 1;*

3. *Em qualquer duas linhas não nulas da matriz A, o coeficiente líder pertencente a linha de baixo, ocorrerá à direita do coeficiente líder da linha de cima;*

4. *Uma coluna que contém um coeficiente líder, deverá ter zeros nas outras entradas.*

Temos os seguintes exemplos:

Exemplo 3.3.3 *As matrizes:*

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *estão na FERL.*

2. $\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$ <u>**não**</u> *estão na FERL.*

   Os elementos destacados não cumprem as propriedades requeridas, no caso, as propriedades 4. e 3. da Definição 3.3.5 acima, respectivamente.

Com isto temos a:

Proposição 3.3.4 *Toda matriz $A \in M_{mn}$ é l-equivalente a uma (única) matriz, que indicaremos por A_R, que está na FERL, isto é, existe $P \in M_{mn}$ não singular, tal que*

$$A_R = P \cdot A\,. \tag{3.19}$$

Demonstração:

Deixada como exercício para o leitor a demonstração deste resultado.

□

A seguir daremos o método que seria utilizado na demonstração da Proposição 3.3.4 acima, aplicado a um exemplo.

O método é denominado <u>**Eliminação de Gauss-Jordan**</u>:

Exemplo 3.3.4 *Encontre o conjunto solução do sistema linear*

$$\begin{cases} & & -2\,x_3 & & +7\,x_5 & = & 12 \\ 2\,x_1 & +4\,x_2 & -10\,x_3 & +6\,x_4 & +12\,x_5 & = & 28 \\ 2\,x_1 & +4\,x_2 & -\,x_3 & +6\,x_4 & -5\,x_5 & = & -1 \end{cases} \tag{3.20}$$

cuja matriz aumentada é dada por

$$(A\,b) \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

$$\textit{onde} \quad A \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

$$\textit{e} \quad b \doteq \begin{pmatrix} 12 \\ 28 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Resolução:

O que faremos é realizar operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada (3.21) acima, para obter a sua FERL (que existe, pela Proposição 3.3.4).

Primeiro passo:

Trocar as linhas nulas da matriz aumentada $(A\,b)$ com outras linhas, não nulas, de modo que as linhas nulas ocorram nas linhas inferiores da nova matriz.

No caso da matriz aumentada (3.20), não há linhas nulas, logo não faremos nenhuma mudança na matriz aumentada $(A\,b)$.

Localize a **coluna** mais à esquerda, que não seja totalmente nula .

No nosso exemplo:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \\ \begin{array}{l}\uparrow\end{array} \end{array} \tag{3.24}$$

Segundo passo:

Trocar a primeira linha com uma outra, caso necessário, para que o primeiro elemento da coluna localizada no primeiro passo seja não nulo.

No nosso exemplo:

Troquemos a 1.ª linha da matriz (3.24), com a 2.ª linha :

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \tag{3.25}$$

Terceiro passo:

Se o primeiro elemento da coluna do segundo passo for $a \neq 0$, multiplicar todos os elementos da primeira linha por $\frac{1}{a}$ (para que o coeficiente líder da primeira linha da matriz obtida seja igual a 1).

No nosso exemplo:

1.ª linha da matriz (3.25) multiplicada por $\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

Quarto passo:

Somar a primeira linha, multiplicada por constante, se for necessário, com as linhas de baixo, para obter zeros em todas as entradas abaixo do coeficiente líder da primeira linha.

No nosso exemplo:

1.ª linha da matriz (3.26) multiplicada por -2, somada com a 3.ª linha :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ \boxed{0} & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ \boxed{0} & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

Quinto passo:

Separar a 1.ª linha da matriz (3.27) acima e voltar ao Primeiro passo.

Aplicar os cinco passo acima às outras linhas, tantas vezes quanto for necessário, até a última linha não nula.

No nosso exemplo:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{-5} & \boxed{3} & \boxed{6} & \boxed{14} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

Primeiro passo:

No nosso exemplo:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix}; \tag{3.29}$$
$$\uparrow$$

Segundo passo:

Não há necessidade de aplicar o Segundo passo à matriz (3.29).

Terceiro passo:

No nosso exemplo:

2.ª linha da matriz (3.29) multiplicada por $\dfrac{-1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \dfrac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

Quarto passo:

No nosso exemplo:

2.ª linha da matriz (3.30), multiplicada por -5, somada com a 3.ª linha:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \dfrac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}; \tag{3.31}$$

Quinto passo:

Separar as 1.ª e 2.a linhas da matriz (3.31) acima e voltar ao Primeiro passo.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{\dfrac{-7}{2}} & \mathbf{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \tag{3.32}$$

Aplicar os cinco passo acima à outra linha restante.

Primeiro passo:

No nosso exemplo:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{\dfrac{-7}{2}} & \mathbf{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \tag{3.33}$$

$$\uparrow$$

Segundo passo:

Não há necessidade de se aplicar o Segundo passo à 3.a linha da matriz (3.33).

Terceiro passo:

Não há necessidade de se aplicar o Terceiro passo à 3.a linha da matriz (3.33).

Quarto passo:

Não há necessidade de se aplicar o Quarto passo à 3.a linha da matriz (3.33).

Com isto, no caso do nosso exemplo, chegamos à matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

Para finalizar, aplicaremos o:

Sexto passo:

Começando por uma linha não nula, somar cada linha multiplicada por constante, com as outras linhas, para zerar as outras entradas acima do coeficiente líder de cada linha.

No nosso exemplo:

2.ª linha da matriz (3.34), somada com $\frac{7}{2}$ da 3.ª linha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

1.ª linha da matriz (3.35), somada do -6 vezes a 3.ª linha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

1.ª linha da matriz (3.36), somada a 5 vezes a 2.ª linha:

$$(C\ d) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

Observemos que a matriz $(C\ d)$ está na FERL.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

O sistema linear cuja matriz aumentada é a matriz $(C\,d)$ será:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 7 \\ x_3 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases} \tag{3.38}$$

Portanto se, por exemplo, considerarmos para cada $t, s \in \mathbb{R}$,

$$x_1 \doteq t\,,$$
$$x_2 \doteq s\,,$$
$$x_3 = 1\,,$$
$$x_5 \doteq 2\,,$$
$$\text{deveremos ter} \quad x_4 = \frac{7-t-2s}{3}\,,$$
$$\text{ou seja,} \quad \left(t\,,s\,,1\,,\frac{7-t-2\,s}{3}\,,2\right)\,, \tag{3.39}$$

será uma solução do sistema linear dado incialmente, para cada $t, s \in \mathbb{R}$, ou seja: o conjunto solução associado ao sistema linear (3.20) será:

$$S \doteq \left\{(x_1\,,x_2\,,x_3\,,x_4\,,x_5) = \left(t\,,s\,,1\,,\frac{7-t-2\,s}{3}\,,2\right)\;;\;\; \text{para} \;\; s\,,t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ou ainda, o conjunto solução da equação matricial (3.21), será

$$S = \left\{u \in M_{51}\,;\, u = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 1 \\ \dfrac{7-t-2\,s}{3} \\ 2 \end{pmatrix}\,, \;\; \text{para cada} \;\; t, s \in \mathbb{R}\right\}.$$

□

Temos também a:

Definição 3.3.6 *Dada uma matriz* $A \in M_{mn}$*, definimos o* **posto da matriz** A*, denotado por* $\text{rank}(A)$*, como sendo o número de linhas não nulas de sua FERL associada.*

Temos agora a:

Proposição 3.3.5 *Se* $A \in M_{mn}$*, então*

$$\text{rank}(A) \le \min\{m\,,n\}\,. \tag{3.40}$$

Demonstração:

Deixada como exercício para o leitor a demonstração deste resultado.

□

Nas seções a seguir faremos algumas considerações sobre o **sistema linear não homogênio**

$$\text{(NH)} \quad A \cdot x = b\,, \tag{3.41}$$
$$\text{onde} \quad A \in M_{mn}\,,\; b \in M_{m1} \;\; \text{e} \;\; x \in M_{n1}\,.$$

Na próxima seção começaremos estudando o **sistema linear homogênio** associado:

$$\text{(H)} \quad A \cdot x = O_{m1} \tag{3.42}$$
$$\text{isto é, (NH) com} \quad b = O_{m1}\,.$$

3.4 O sistema linear homogêneo

Observação 3.4.1

1. *O sistema linear homogêneo (H) (ou seja, de* (3.42)*), tem sempre solução, a saber, a matriz identicamente nula,*

$$u = O_{n1} \in M_{n1}\,,$$

que será denominada **solução trivial**.

2. *Pode-se mostrar que se* A_R *é a matriz na FERL, associada a matriz* A*, então a equação matricial*

$$A \cdot x = O_{m1}$$

(ou seja, (H), ou ainda (3.42)*), será equivalente a equação matricial*

$$A_R \cdot x = O_{m1},$$

ou seja, resolver o sistema homogêneo é equivalente a resolver o sistema homogêneo associado a matriz na sua FERL.

3. *Observemos que se*

$$u\,, v \in M_{n1}$$

são soluções da equação matricial (H) (ou seja, de (3.42)*), então, para* $\alpha\,, \beta \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), a matriz*

$$(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) \in M_{n1}$$

também será solução de (H) (ou seja, de (3.42)*).*

De fato, pois como

$$A \cdot u = O_{m1} \tag{3.43}$$
$$e \quad A \cdot v = O_{m1}\,, \tag{3.44}$$

teremos:

$$\begin{aligned} A \cdot (\alpha \cdot u + \beta \cdot v) &\overset{(2.39)}{=} A \cdot (\alpha \cdot u) + A \cdot (\beta \cdot v) \\ &\overset{(2.40)}{=} \alpha \cdot (\underbrace{A \cdot u}_{\overset{(3.43)}{=} O_{m1}}) + \beta \cdot (\underbrace{A \cdot v}_{\overset{(3.43)}{=} O_{m1}}) \\ &= \underbrace{\alpha \cdot O_{m1}}_{\overset{(2.28)}{=} O_{m1}} + \underbrace{\beta \cdot O_{m1}}_{\overset{(2.28)}{=} O_{m1}} \\ &= O_{m1} + O_{m1} \\ &= O_{m1}\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade da afirmação.

4. *Mais geralmente, se*

$$u_1, \cdots, u_p \in M_{n1}$$

são soluções de (H) (ou seja, de (3.42)), então, para

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{)},$$

a matriz

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p \in M_{n1}$$

também será solução de (H) (ou seja, de (3.42)).

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Apliquemos essas idéias ao:

Exemplo 3.4.1 *Encontre o conjunto solução associado a equação matricial homogênea*

$$A \cdot x = O_{31}, \tag{3.45}$$

$$\text{onde} \quad A \doteq \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{35}. \tag{3.46}$$

Resolução:

Notemos que a matriz A está na FERL.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Com isto temos o sistema linear homogêneo associado à matriz A será dado por:

$$\begin{cases} x_1 & -2\,x_2 & & +3\,x_4 & & = & 0 \\ & & +x_3 & -x_4 & & = & 0 \\ & & & & +x_5 & = & 0 \end{cases},$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} x_1 = 2\,x_2 - 3\,x_4 \\ x_3 = x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}. \tag{3.47}$$

Portanto, se, para cada $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, considerarmos

$$x_2 = \alpha_1 \quad \text{e} \quad x_4 = \alpha_2,$$

teremos que

$$u \doteq \begin{pmatrix} 2\,\alpha_1 - 3\,\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

será uma solução da equação matricial homogênea (3.45) e reciprocamente.

Portanto, qualquer solução $u \in M_{n1}$ da equação matricial (H), dada por (3.45), será da forma:

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 \,, \tag{3.49}$$

$$\text{onde} \quad u_1 \doteq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u_2 \doteq \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.50}$$

□

Observação 3.4.2

1. *Se considerarmos*

$$W \doteq \{x \in M_{51}(\mathbb{R})\,;\, A \cdot x = O_{31}\}, \tag{3.51}$$

ou seja, o conjunto formado por todas as soluções da equação matricial (H) (dada por (3.45)), então teremos que toda solução da equação matricial (H) (dada por (3.45)) será dada por (3.49).

2. *Além disso, não podemos descartar nenhuma das duas soluções u_1 ou u_2, de modo a obter todas as soluções da equação matricial (H) (dada por (3.45)).*

   Como são em número de duas, denotaremos este número por $\dim(W)$, ou seja,

$$\dim(W) = 2\,.$$

3. *Observemos que o posto da matriz A, do Exemplo 3.4.1 (dada por (3.46)) é 3, isto é,*

$$\operatorname{rank}(A) = 3\,,$$

   e a equação matricial (H) (dada por (3.45)), possui duas soluções, que possuem a propriedade 2., isto é, qualquer solução da equação matricial (H) (dada por (3.45)), pode ser obtida na forma (3.49).

   Desta forma, teremos:

$$\begin{aligned} \dim(W) &= 2 \\ &= \underbrace{5}_{\text{número de variáveis}} - \underbrace{3}_{\text{posto de } A}. \end{aligned}$$

Baseado nisto temos o:

Teorema 3.4.1 *Sejam* $k \in \mathbb{N}$ *e* $A \in M_{mn}$ *de posto igual a* $\underline{k}$*.*

Então o conjunto das soluções da equação matricial homogênea

$$A \cdot x = O_{m1} \tag{3.52}$$

consiste dos

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_{n-k} \cdot u_{n-k} \in M_{n1}\,, \tag{3.53}$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), para* $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n-k\}$*, sendo os elementos*

$$u_i \in M_{n1} \setminus \{O_{n1}\}, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n-k\}\,,$$

podem ser obtidos resolvendo-se a equação matricial (H) (dada por (3.52)), associado a matriz na FERL, associada a matriz A *onde, nenhuma das soluções* u_i*, pode ser obtida das restantes, na forma de (3.53), ou seja, para cada* $i_o \in \{1\,2\,,\cdots\,,n-k\}$*, não existem*

$$\begin{aligned} &\alpha_1\,,\cdots\,\alpha_{i_o-1}\,,\alpha_{i_o+1}\,,\cdots\,,\alpha_{n-k} \in \mathbb{R} \quad \textit{(ou } \mathbb{C}\textit{)}, \\ \textit{de modo que} \qquad &u_{i_o} = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+-1} + \cdots + \alpha_{n-k} \cdot u_{n-l} \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\dim(W) = n - \operatorname{rank}(A)\,. \tag{3.54}$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a demonstração deste resultado.

□

Como consequência temos o:

Corolário 3.4.1 *Seja* $A \in M_{mn}$*.*

Se o posto da matriz A *igual a* $\underline{n}$*, ou seja,*

$$\operatorname{rank}(A) = n\,, \tag{3.55}$$

então a única solução da equação matricial (H) (dada por (3.52)), será a matriz nula, isto é,

$$u = O_{n1} \in M_{n1}\,.$$

Reciprocamente, se a única solução da equação matricial (H) (dada por (3.52)) é a matriz nula, então posto de A *será igual a* n*, ou seja,*

$$\operatorname{rank}(A) = n\,.$$

Demonstração:

Notemos que, do Teorema 3.4.1 acima, temos que

$$\begin{aligned} \dim(W) &= n - \underbrace{\operatorname{rank}(A)}_{\overset{(3.55)}{=} n} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Como $O_{n1} \in M_{n1}$ é sempre solução da equação matricial (H) (dada por (3.52)), segue que

$$W = \{O_{n1}\},$$

ou seja, a única solução da equação matricial (H) (dada por (3.52)) é a matriz nula, isto é,

$$u = O_{n1} \in M_{n1}.$$

Reciprocamente, se a única solução da equação matricial (H) (dada por (3.52)) é a matriz nula, então teremos que

$$\begin{aligned} W &= \{O_{n1}\}, \\ \text{isto é,} \quad \dim(W) &= 0. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Logo, do Teorema 3.4.1 acima, segue que

$$\begin{aligned} \underbrace{\dim(W)}_{\overset{(3.56)}{=} 0} &= n - \operatorname{rank}(A), \\ \text{ou seja,} \quad \operatorname{rank}(A) &= n, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

Com isto temos o:

Corolário 3.4.2 *Seja* $A \in M_{mn}$.

Se

$$m < n, \tag{3.57}$$

então o sistema linear homogêneo (H) (dada por (3.52)*) tem, pelo menos, uma solução não trivial.*

Demonstração:

Se

$$k \doteq \operatorname{rank}(A),$$

da Proposição 3.3.5, segue que

$$\begin{aligned} k &\overset{(3.40)}{\leq} \min\{m, n\} \\ &\overset{(3.59)}{=} m \\ &\overset{(3.59)}{<} n, \\ \text{ou seja,} \quad k &< n. \end{aligned}$$

Logo do Corolário 3.4.1 acima, segue que existe solução, não identicamente nula, da equação matricial (H) (dada por (3.52)) , como queríamos demonstrar.

□

Analisemos os seguinte exemplos a seguir:

Exemplo 3.4.2 *Seja*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{33}\,. \tag{3.58}$$

Encontre o conjunto solução da equação matricial

$$A \cdot x = O_{31}\,. \tag{3.59}$$

Resolução:

Neste caso temos que

$$m \doteq 3 \quad \text{e} \quad n \doteq 3\,. \tag{3.60}$$

Temos que

$$A \sim A_R\,,$$
$$\text{onde} \quad A_R \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{3.61}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.
Portanto posto da matriz A é igual a 2, ou seja,

$$\text{rank}(A) = 2\,. \tag{3.62}$$

Logo, pelo Teorema 3.4.1 acima, segue que

$$\begin{aligned} \dim(W) &\overset{(3.54)}{=} n - \text{rank}(A) \\ &\overset{(3.60) \text{ e } (3.62)}{=} 3 - 2 = 1\,, \end{aligned}$$

ou seja, existe uma solução, não nula, da equação matricial homogênea, dada por (3.59), que indicaremos por $u_1 \in M_{31}$ e qualquer outra solução u da equação matricial

$$A \cdot u = O_{31}\,,$$

será da forma

$$u = \alpha \cdot u_1\,,$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Para encontrar a solução $u_1 \in M_{31}$, basta resolver o sistema associado a matriz A_R, que deixaremos como exercício para o leitor.

□

Exemplo 3.4.3 *Seja*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \in M_{34}\,. \tag{3.63}$$

Encontre o conjunto solução da equação matricial

$$A \cdot x = O_{31}\,. \tag{3.64}$$

Resolução:

Neste caso temos

$$m \doteq 3 < n \doteq 4\,. \tag{3.65}$$

Logo, do Corolário 3.4.2 acima, podemos concluir que existe pelo menos uma solução não trivial da equação matricial homogênea (3.64).

Na verdade temos que $A \sim A_R$, onde

$$A_R \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dfrac{-25}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Portanto, posto da matriz A é igual a 2, ou seja,

$$\mathrm{rank}(A) = 2\,. \tag{3.66}$$

Logo, pelo Teorema 3.4.1 acima,

$$\begin{aligned} \dim(W) &\overset{(3.54)}{=} n - \mathrm{rank}(A) \\ &\overset{(3.65)\text{ e }(3.66)}{=} 4 - 2 \\ &= 2\,, \end{aligned}$$

ou seja, existem duas soluções $u_1\,, u_2 \in M_{41}(\mathbb{R})$ da equação matricial homogênea (3.64), tal que toda solução $u \in M_{31}(\mathbb{R})$ da equação matricial homogênea (3.64), será dada por

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2,$$

para algum $\alpha_1\,, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e, além disso, nenhuma delas poderá ser descartada.

Para encontrar as soluções $u_1\,, u_2 \in M_{31}(\mathbb{R})$, basta resolver o sistema associado a matriz A_R, que deixaremos como exercício para o leitor.

□

30.08.2019 - 3.a

3.5 O sistema linear não homogêneo

Trataremos nesta seção do sistema linear não homogêneo (NH)

$$A \cdot x = b\,.$$

Começaremos introduzindo a:

Definição 3.5.1 *A equação matricial*

$$A \cdot x = b$$

será dita <u>**consistente**</u> *se tem, pelo menos, uma solução.*

Se não tiver solução será dita <u>**inconsistente**</u> *.*

De modo semelhante, temos que um sistema linear, de m *equações a* n *incógnitas, será dito* <u>**consistente**</u>*, se ele adminte pelo menos uma solução, caso contrário, será dito* <u>**inconsistente**</u>*.*

A seguir exibiremos dois sistemas lineares, um consistente e o outro inconsistente.

Exemplo 3.5.1 *O sitema linear não homogêneo*

$$\begin{cases} x_1 & +2\,x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & = & -1 \\ x_1 & +x_2 & & = & 1 \end{cases} \tag{3.67}$$

é consistente, pois

$$x_1 \doteq 1\,, \quad x_2 \doteq 0 \quad e \quad x_3 \doteq -1$$

é uma solução do sistema linear não homogêneo (3.67)*.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Por outro lado, temos o:

Exemplo 3.5.2 *O sitema linear*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

é inconsistente.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Observação 3.5.1

1. *Lembremos que, das Proposições 3.3.3 e 3.3.4, resolver a equação matricial (NH)*

$$A \cdot x = b \tag{3.68}$$

é equivalente a resolver a equação matricial (NH):

$$\begin{aligned} & A_R \cdot x = b_R\,, \\ \textit{onde} \quad & A \sim A_R \\ \textit{e} \quad & b \sim b_R\,, \end{aligned}$$

onde as matrizes $A_R \in M_{mn}$ *e* $b_R \in M_{m1}$ *são as formas escalonadas reduzidas por linhas das matrizes* A *e* b*, respectivamente.*

2. *Notemos que, também da Proposição 3.3.4, podemos encontrar uma matriz* $P \in M_n$*, não singular, tal que*

$$\begin{aligned} & A_R = P \cdot A \\ \textit{e} \quad & b_R = P \cdot b\,, \\ \textit{ou ainda,} \quad & (A \;\; b) \sim (A_R \;\; b_R)\,. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Logo podemos assumir, sem perda de generalidade, que as matrizes $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ *e* $b \in M_{m1}(\mathbb{R})$ *estão na FERL, isto é,*

$$A = A_R \quad \textit{e} \quad b = b_R\,, \tag{3.70}$$

pois as equações matriciais associadas a cada uma das matrizes, são equivalentes, isto é, têm o mesmo conjunto solução.

3. *Suponhamos que a equação matricial (NH) (ou seja, a equação matricial (3.68)), seja consistente, ou seja, admita, pelo menos, uma solução.*

Seja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *o posto da matriz* A*, ou seja,*

$$\operatorname{rank}(A) = k\,. \tag{3.71}$$

Como a matriz A *está na FERL e temos (3.71), pela Definição* $m - k$ *linhas inferiores nulas.*

Portanto $m - k$ *equações do sistema linear associado a equação matricial (NH) (ou seja, a equação matricial (3.68)), tem a segunte forma:*

$$0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = b_i\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{k+1\,, \cdots, m\}\,.$$

Logo deveremos ter

$$b_i = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{k+1, \cdots, m\}\,.$$

Baseado nos argumentos desenvolvidos acima podemos enunciar o:

Teorema 3.5.1 *Se a matriz $A \in M_{mn}$ está na FERL e tem posto $\underline{k}$, então a equação matricial (NH) (ou seja, (3.68), ou ainda, o sistema linear associado a matriz aumentada $(A\ b)$) é consistente se, e somente se,*

$$b_{k+1} = \cdots = b_m = 0 . \tag{3.72}$$

Em particular, se o posto da matriz A for igual a $\underline{m}$, então a equação matricial (NH) (ou seja, (3.68), ou ainda, o sistema linear associado a matriz aumentada $(A\ b)$) será consistente.

Demonstração:

A necessidade segue da Observação 3.5.1.

A demonstração da suficiência será deixada como exercício para o leitor.

□

Se a matriz $A \in M_{mn}$ **não** está na FERL então temos o:

Teorema 3.5.2 *Seja $A \in M_{mn}$.*

A equação matricial (NH)(ou seja, a equação matricial (3.68), ou ainda, o sistema linear associado a matriz aumentada $(A\,b)$) é consistente se, e somente se, o posto da matriz aumentada $(A\ b)$ for igual ao posto da matriz A, isto é.

$$\operatorname{rank}(A\ b) = \operatorname{rank}(A) . \tag{3.73}$$

Demonstração:

Será deixada como exercício para o leitor.

□

Façamos uma aplicação desse resultado ao:

Exemplo 3.5.3 *O sistema linear*

$$\left\{ \begin{array}{rrcr} x_1 & -x_2 & = & 0 \\ -x_1 & & = & 1 \\ & x_2 & = & -1 \end{array} \right. \tag{3.74}$$

é consistente ou inconsistente?

Resolução:

Observemos que a matriz aumentada associada ao sistema linear não homogêneo (3.74) é dada por:

$$(A\ b) \doteq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \tag{3.75}$$

Notemos também que

$$(A\ b) \sim (A_R\ b_R) ,$$

$$\text{onde} \quad (A_R\ b_R) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.76}$$

Em particular

$$A \sim A_R,$$
$$\text{onde} \quad A_R \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.77}$$

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

Assim, da Definição 3.3.6, de (3.76) e (3.77), segue que

$$\text{rank}(A) = 2 = \text{rank}(A\ b).$$

Logo, do Teorema 3.5.2 acima, segue que o sistema linear não homogêneo (3.74), que está associado a matriz aumentada $(A\ b)$, será consistente.

□

Observação 3.5.2 *Notemos que o sistema linear (3.74), é consistente, pois ele admite como uma solução*

$$x_1 \doteq -1 \quad e \quad x_2 \doteq -1.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Um outro resultado interessante é dado pelo:

Teorema 3.5.3 *Seja $A \in M_{mn}$.*

Suponhamos que a equação matricial

$$A \cdot x = b, \tag{3.78}$$

(ou seja, o sistema linear não homogêneo associado a matriz aumentada $(A\ b)$), seja consistente e que

$$u_{NH} \in M_{n1} \tag{3.79}$$

seja uma solução particular do mesmo.

Então uma solução da equação matricial (3.78) será dada por:

$$w = u_{NH} + v_H \in M_{n1}, \tag{3.80}$$
$$\text{onde} \quad v_H \in M_{n1}$$

é uma solução da equação matricial homogênia associada, isto é, da equação matricial

$$A \cdot y = O_{m1}. \tag{3.81}$$

Demonstração:

De fato, se $w \in M_{n1}$ uma solução da equação matricial (NH) (ou seja,(3.80)), isto é:

$$A \cdot w = b, \tag{3.82}$$

e $u_{NH} \in M_{n1}$ é solução particular de (NH) (ou seja, (3.80)): $\quad A \cdot u_{NH} = b, \quad (3.83)$

segue que, $\quad v_H \doteq w - u_{NH}, \quad (3.84)$

será solução da equação matricial (H) associada a (NH): $\quad A \cdot y = O_{m1}. \quad (3.85)$

De fato, pois

$$
\begin{aligned}
A \cdot v_{_H} &\overset{(3.84)}{=} A \cdot (w - u_{_{NH}}) \\
&\overset{(2.38)}{=} \underbrace{A \cdot w}_{\overset{(3.83)}{=} b} - \underbrace{A \cdot u_{_{NH}}}_{\overset{(3.83)}{=} b} \\
&= b - b \\
&= O_{m1}\,,
\end{aligned}
$$

mostrando a validade da afirmação (3.84) acima.

Com isto podemos concluir que a matriz

$$w = u_{_{NH}} + v_{_H} \in M_{n1}$$

é igual a solução particular de (3.82) (equação matricial não homogênea (NH) (ou seja (3.82)), dada por $u_{_{NH}} \in M_{n1}$), somada como solução geral de (3.83) (equação matricial homogênea (H) associada (ou seja, (3.81)), dada por $v_{_H} \in M_{n1}$), completando a demonstração da necessidade.

Reciprocamente, se $u_{_{NH}} \in M_{n1}$ uma solução particular da equação não homôgenea (NH) (ou seja (3.78)) e $v_{_H} \in M_{n1}$ é solução da equação matricial homogênea associada (H) (ou seja, (3.81)), então a matriz

$$w \doteq u_{_{NH}} + v_{_H}\,, \tag{3.86}$$

será solução da equação matricial não homogênea (3.82)

De fato, pois

$$
\begin{aligned}
A \cdot w &\overset{(3.86)}{=} A \cdot (u_{_{NH}} + v_{_H}) \\
&\overset{(2.38)}{=} \underbrace{A \cdot u_{_{NH}}}_{\overset{(3.82)}{=} b} + \underbrace{A \cdot v_{_H}}_{\overset{(3.83)}{=} O} \\
&= b + O_{m1} \\
&= b\,,
\end{aligned}
$$

mostrando que a matriz $w \in M_{n1}$ será solução da equação matricial

$$A \cdot x = b\,,$$

completando a demonstração.

$\square$

Observação 3.5.3 *O Teorema 3.5.3 acima nos permite tirar a:*

<u>**Conclusão:**</u> *qualquer solução do sistema linear não homogêneo (3.78), associado a matriz aumentada $(A\ b)$, pode ser obtida de conhecendo-se um solução particular do mesmo, somada com a solução geral do sistema linear homogêneo associado, ou seja, de (3.81).*

Apliquemos o resultado acima ao:

Exemplo 3.5.4 *Encontre o conjunto solução da equação matricial não homgênea*

$$A \cdot x = b\,, \tag{3.87}$$

$$\text{onde} \quad A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \tag{3.88}$$

$$e \quad b \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{3.89}$$

Resolução:

Pode-se mostrar que

$$(A\ b) \sim (A_R\ b_R)\,,$$

$$\text{onde} \quad A_R \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.90}$$

$$\text{e} \quad b_R \doteq \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.91}$$

$$\text{ou seja,} \quad (A_R\, b_R) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.92}$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Notemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(A_R\ b_R) &\overset{(3.92)}{=} 3 \\ &\overset{(3.90)}{=} \operatorname{rank}(A_R)\,, \\ \text{logo} \qquad \operatorname{rank}(A\ b) &= \operatorname{rank}(A)\,. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 3.5.2, segue que a equação matricial (NH) (ou seja, (3.87)) é consistente.

Também pode-se mostrar que

$$u_{NH} \doteq \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.93}$$

é uma solução da equação matricial não homogêna

$$A_R \cdot x = b_R \,.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Portanto, da Proposição 3.3.3, será solução da equação matricial não homogênea (3.87).

Notemos também que,

$$\begin{aligned} v_H &\doteq \begin{pmatrix} -10\,\alpha \\ -3\,\alpha \\ 4\,\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \\ &\overset{(2.21)}{=} \alpha \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}), \end{aligned} \tag{3.94}$$

é a solução geral da equação matricial homogênea associada, ou seja,

$$A_R \cdot x = O_{41} \,. \tag{3.95}$$

Logo, do Teorema 3.5.3 acima, segue que qualquer solução da equação matricial (NH) (ou seja, de (3.87)), será da forma:

$$\begin{aligned} w &\overset{(3.80)}{=} u_{NH} + v_H \\ &\overset{(3.93)\text{ e }(3.94)}{=} \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -13 - 10\,\alpha \\ 3 - 3\,\alpha \\ 1 + 4\,\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}), \end{aligned}$$

isto é,

$$S \doteq \left\{ \begin{pmatrix} -13 - 10\,\alpha \\ 3 - 3\,\alpha \\ 1 + 4\,\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \right\}$$

é o conjunto solução da equação matricial (NH), ou seja, de (3.87), completando a resolução □

Para completar nosso estudo sobre da equação matricial (NH) (ou seja, (3.78), ou ainda do sistema linear associado a matriz aumentada $(A \; b)$), temos os seguintes resultados:

Teorema 3.5.4 *Sejam $A \in M_{mn}$ e $b \in M_{m1}$.*

Suponhamos que a equação matricial (NH)

$$A \cdot x = b\,, \tag{3.96}$$

é consistente.

A equação matricial (NH) (ou seja, (3.96)), admite uma única solução se, e somente se, posto da matriz A é igual a $\underline{n}$, ou seja,

$$\operatorname{rank}(A) = n\,. \tag{3.97}$$

Demonstração:

Suponhamos que a equação matricial (NH) (ou seja, (3.96)), admite uma única solução, ou seja, podemos encontrar um único $u_{NH} \in M_{n1}$, que satisfaz a equação matricial não homogêna (NH) (isto é (3.96)).

Então, do Teorema 3.5.3, segue que a equação matricial homogênea (H), associada a (3.96), isto é,

$$A \cdot y = O_{m1} \tag{3.98}$$

adimitirá uma única solução única, a saber, a solução trivial

$$u_H \doteq O_{n1} \in M_{n1}\,.$$

Logo, do Corolário 3.4.1, segue que o posto da matriz A deverá ser igual a $\underline{n}$ (veja (3.55)), mostrando a validade de (3.97) e completando a demonstração da necessidade.

Reciprocamente, se vale (3.97), ou seja, se posto da matriz A é igual a $\underline{n}$, ou seja, então, do Corolário 3.4.1, segue que a solução trivial

$$u_H \doteq O_{n1} \in M_{n1}\,,$$

deverá ser a única solução da equação matricial homogênea (H) associada (isto é, (3.98)) a equação matricial não homogênea (NH) (ou seja, (3.96)).

Portanto, do Teorema 3.5.3, teremos que a equação matricial não homogênea (NH) (ou seja, (3.96)) admitirá uma única solução, finalizando a demonstração.

□

Como consequência temos o:

Corolário 3.5.1 *Nas condições do Teorema 3.5.4 acima, suponhamos que*

$$m \leq n\,, \tag{3.99}$$

Podemos encontrar uma única solução da quação matricial (NH) (ou seja, de (3.96)) se, e somente se, posto da matriz A for igual a $\underline{n}$, isto é,

$$m = n\,. \tag{3.100}$$

Demonstração:

Suponhamos que exista única solução da equação matricial não homogênea (NH) (ou seja, de (3.96)).

Então, do Teorema 3.5.4 acima, segue que $\underline{n}$ será igual ao posto da matriz A, isto é,

$$\text{rank}(A) = n\,. \tag{3.101}$$

Mas

$$\begin{aligned} n &\overset{(3.101)}{=} \text{rank}(A) \\ &\overset{(3.40)}{\leq} \min\{m\,,n\} \\ &\leq m \\ &\overset{(3.99)}{\leq} n\,, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \quad m = n\,. \tag{3.102}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \text{rank}(A) &\overset{(3.101)}{=} n \\ \text{e} \quad m &\overset{(3.102)}{=} n\,, \end{aligned}$$

completando a demosntração da necessidade.

Reciprocamente, se

$$\text{rank}(A) = n\,,$$

do Teorema 3.5.4, temos que podemos encontrar uma única solução da equação matricial (NH) (ou seja, de (3.96)) completando a demonstração da suficiência e do resultado.

□

3.6 A inversa de matrizes não singulares

Para finalizar, exibiremos um método para encontrar a matriz inversa associada a uma matriz não singular, utilizando as matrizes elementares desenvolvidas na seção 3.3.

Para ilustrar consideremos o:

Exemplo 3.6.1 *Encontre o posto sa matriz quadrada de ordem* 4

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e verifique se ela é inversível.

Resolução:

Notemos que a matriz A é equivalente a matriz quadrada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que está na FERL.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo posto da matriz A será igual a 4, ou seja,

$$\operatorname{rank}(A) = 4 .$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \det(A) &\overset{(2.90)}{=} 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &\overset{(2.93)}{=} -2 - (1+1) \\ &= -4 \neq 0 . \end{aligned}$$

Portanto, da Proposição 2.6.9, segue que a matriz A é não singular, ou seja,

$$\operatorname{rank}(A) = 4$$

e A é uma matriz inversível, completando a resolução.

□

Logo, no Exemplo 3.6.1, ocorreu uma relação entre o posto da matriz e a sua inversibilidade.

O que ocorreu no Exemplo 3.6.1 acima é um fato geral, como afirma o:

Teorema 3.6.1 *Seja $A \in M_n$ são equivalentes:*

1. *A é uma matriz não singular (ou seja, inversível);*

2. *posto da matriz A é igual a $\underline{n}$, ou seja,*

$$\operatorname{rank}(A) = n ; \tag{3.103}$$

3. *$A \sim I_n$, isto é,*

$$A_R = I_n , \tag{3.104}$$

onde a matriz A_R é a FERL associada a matriz A.

Demonstração:

<u>**Mostremos que se 1. ocorre, então 2. ocorrerá:**</u>

Se a matriz $A \in M_n$ é uma matriz não singular e $u \in M_{n1}$ é uma solução de

$$A \cdot u = O_{n1}, \tag{3.105}$$

$$\text{então} \quad u \doteq A^{-1} \cdot O_{n1} = O_{n1},$$

isto é, a única solução da equação matricial (3.105) é a solução trivial $u \doteq= O_{n1}$.

Logo, do Corolário 3.4.1, segue que o posto da matriz A dever ser igual a $\underline{n}$ (veja (3.55)), mostrando a validade de 2. .

<u>**Mostremos que se 2. ocorre, então 3. ocorrerá:**</u>

Se vale (3.103), ou seja, se o posto da matriz A é igual a $\underline{n}$ então, pela Definição 3.3.6, não existem linhas nulas na matriz A_R (a FERL associada a matriz A).

Além disso, cada linha de $A_R \in M_n$, tem coeficiente líder 1 e zero nas outras posições da coluna, isto é,

$$A_R = I_n,$$

mostrando a validade de 3. .

<u>**Mostremos que se 3. ocorre, então 1. ocorrerá:**</u>

Se vale (3.104), ou seja,

$$A_R = I_n,$$

então, como $A \sim A_R$, podemos encontrar uma matriz quadrada $P \in M_n$, não singular, tal que

$$I_n = A_R = P \cdot A.$$

Portanto a matriz A é uma matriz não singular e

$$A^{-1} = P, \tag{3.106}$$

completando a demonstração do item 1. e do resultado.

□

Como consequência temos o:

Corolário 3.6.1 *Seja $A \in M_n$.*

A matriz A é uma matriz não singular (isto é, inversível) se, e somente se, ela é produto de matrizes elementares.

Demonstração:

Da demonstração do Teorema 3.6.1 (veja (3.106)), temos que

$$A = P^{-1}.$$

Mas, da Proposição 3.3.2, temos que a matriz P é o produto de matrizes elementares, que são inversíveis, completando a demonstração.

□

Observação 3.6.1 *O item 3. do Teorema 3.6.1, nos fornece um modo de encontrar a inversa de uma matriz quadrada, que é uma matriz não singular (ou seja, inversível).*

Ilustraremos o método com o:

Exemplo 3.6.2 *Encontrar a inversa da matriz*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.107}$$

Resolução:

Notemos que

$$\det(A) \neq 0\,.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Logo, da Proposição 2.6.9, temos que a matriz quadrada A é inversível.

Para encontrar a matriz inversa associada à matriz A, agiremos da seguinte forma: consideremos a matriz

$$(A : I_4) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.108}$$

Faremos um número finito operações elementares sobre as linhas da matriz A, para trasnformá-la na matriz identidade I_4.

Quem garante que podemos fazer isto é o item 3 do Teorema 3.6.1.

Além disso, todas as operações elementares que fizermos na matriz A, faremos na matriz I_4 (que está à direita em (3.108)).

Comecemos:

$$
(A : I_4) \underset{\sim}{\overset{4.^a \text{ linha } + 1.^a \text{ linha}}{}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & : & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\underset{\sim}{\overset{3.^a \text{ linha } - 2.^a \text{ linha}}{}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & : & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\underset{\sim}{\overset{\frac{-1}{2} \times 3.^a \text{ linha}}{}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & : & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\underset{\sim}{\overset{2.^a \text{ linha } - 3.^a \text{ linha}}{}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & : & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\underset{\sim}{\overset{\frac{1}{2} \times 4.^a \text{ linha}}{}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

$$
\underset{\sim}{\overset{1.^a \text{ linha } - 4.^a \text{ linha}}{}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

$$
= (I_4 : B)\,.
$$

Afirmação:

$$B = A^{-1},$$

$$\text{isto é,} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.109}$$

De fato, do item 3. do Teorema 3.6.1, temos que:

$$\begin{aligned} & A \sim I_n \,, \\ \text{então} \quad & I_n = P \cdot A \,, \text{ para alguma matriz não singular } P \in M_n \,. \end{aligned} \tag{3.110}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo} \quad & \\ P \cdot (A : I_n) &= (\underbrace{P \cdot A}_{\stackrel{(3.110)}{=} I_n} : \underbrace{P \cdot I_n}_{\stackrel{(2.43)}{=} P}) \\ &= (I_n : P) \,, \\ \text{ou seja,} \quad & (A : I_n) \sim (I_n : P) \,. \end{aligned} \tag{3.111}$$

Do Corolário 3.6.1 acima (na verdade de (3.106)),

$$P = A^{-1},$$

portanto

$$(A \, : \, I_n) \sim \left(I_n \, : \, A^{-1}\right),$$

completando a resolução.

□

3.7 Regra de Crammer

Para finalizar temos o:

Teorema 3.7.1 ***(Regra de Cramer)***
Seja $A \in M_n$, $b \in M_{n1}$.
Então

$$\det(A) \neq 0 \,, \tag{3.112}$$

se, e somente se, a equação matricial

$$A \cdot x = b \tag{3.113}$$

admite uma única solução, dada por

$$\begin{aligned} u_o &\doteq (u_i)_{n1} \\ &= A^{-1} \cdot b \,, \end{aligned} \tag{3.114}$$

cujas componentes são dadas por:

$$u_i \doteq \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\} \,, \tag{3.115}$$

onde a A_i*, é obtida da matriz* A*, trocando-se a i-ésima coluna* a_{*i}*, da matriz* A*, pela matriz coluna* b*.*

Demonstração:

Deixaremos a verificação deste como exercício para o leitor.

□

Apliquemos este resultado ao:

Exemplo 3.7.1 *Resolva o sistema linear*

$$\begin{cases} x_1 & +3\,x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & & -x_3 & = & -1 \end{cases} . \tag{3.116}$$

Resolução:

Observemos que o sistema linear dado pode ser escrito como a seguinte equação matricial não homgênea:

$$A \cdot x = b \,, \tag{3.117}$$

$$\text{onde} \quad A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.118}$$

$$\text{e} \quad b \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} . \tag{3.119}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \det(A) &\overset{(2.93)}{=} -1 + 6 + 1 \\ &= 8 \neq 0 \,. \end{aligned} \tag{3.120}$$

Logo, do Teorema 3.7.1, segue que a matriz quadrada A é não singular.

Além disso, da regra de Cramer (isto é, (3.115)), teremos:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \begin{pmatrix} \boxed{0} & 3 & -1 \\ \boxed{0} & 1 & 1 \\ \boxed{-1} & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= 3 + 1 \\
&= 4\,; \qquad\qquad \text{(3.121)} \\
A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & -1 \\ 1 & \boxed{0} & 1 \\ 1 & \boxed{-1} & -1 \end{pmatrix} \\
&= 1 + 1 \\
&= 2\,; \qquad\qquad \text{(3.122)} \\
A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & \boxed{0} \\ 1 & 1 & \boxed{0} \\ 1 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \\
&= -1 + 3 \\
&= 2\,. \qquad\qquad \text{(3.123)}
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}
&\overset{(3.115)}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{A_1}{A} \\[2ex] \dfrac{A_2}{A} \\[2ex] \dfrac{A_3}{A} \end{pmatrix} \\
&\overset{(3.120),(3.121),(3.122)\text{ e }(3.123)}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{4}{8} \\[2ex] \dfrac{2}{8} \\[2ex] \dfrac{2}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{4} \\[2ex] \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}. \qquad \text{(3.124)}
\end{aligned}
$$

Logo, solução da equação matricial (3.117) será:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

ou ainda, a solução do sistema linear (3.116), será:

$$x_1 \doteq \frac{1}{2}, \quad x_2 \doteq \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad x_3 \doteq \frac{1}{4},$$

completando a resolução.

□

Como cosequência temos o:

Corolário 3.7.1 *Seja* $A \in M_n$, $b \in M_{n1}$.
Então

$$\det(A) \neq 0, \tag{3.125}$$

se, e somente se, a equação matricial

$$A \cdot x = O_{n1} \tag{3.126}$$

admite uma única solução, dada por

$$u_o \doteq O_{n1}. \tag{3.127}$$

Demonstração:

As muitas das demonstrações deixadas como exercício ou omitidas, podem ser encontradas na bibliografia sugerida ao final das notas.

3.8 Exercícios

Exercício 3.8.1 *Considere o seguinte sistema linear:*

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = k \\ c\,x + d\,y = l \\ e\,x + f\,y = m \end{cases}, \tag{3.128}$$

onde $a, b, c, d, e, f, k, l, m \in \mathbb{R}$ *estão fixadas. Discutir a posição relativa das retas no plano cartesiano* xOy,

$$\begin{aligned} &a\,x + b\,y = k, \\ &c\,x + d\,y = l, \\ \text{e} \quad &e\,x + f\,y = m, \end{aligned}$$

quando:

1. *o sistema linear* (3.3.1) *acima não admite solução.*

2. *o sistema linear* (3.3.1) *admite uma única solução.*

3. *o sistema linear* (3.3.1) *admite inifinitas soluções.*

Exercício 3.8.2 *Escreva cada um dos sitemas lineares abaixo na forma matricial, isto é, na foram* $A \cdot x = b$*, descrevendo as matrizex* $A\,,x\,,b$*:*

$$1\ \begin{cases} x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 - 3\,x_3 = -1 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4\,x_4 = 2 \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ 4\,x_1 - 3\,x_2 = 8 \end{cases}$$

Exercício 3.8.3 *Encontre o conjunto solução de cada um dos sistemas lineares abaixo, utilizando inversão de matrizes, se for possível.*

$$1)\ \begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 = 0 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 = 0 \\ x_1 + 8\,x_3 = 0 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 = 1 \\ 4\,x_1 + x_2 + 8\,x_3 = 2 \\ 2\,x_2 + 3\,x_3 = -1 \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ 4\,x_1 - 3x_2 = 8 \end{cases}$$

Exercício 3.8.4 *A diferença entre dois números reais é 14 e o triplo do menor deles é o quádruplo do maior. Determine os dois números reais.*

Exercício 3.8.5 *Há um ano atrás, um homem era 5 vezes mais velho do que seu filho é hoje. Daqui a 7 anos, ele será 6 vezes mais velho do que seu filho é hoje. Determine as idades do homem e do seu filho.*

Exercício 3.8.6 *Um tratador de animais de um zoológico precisa dar 42 mg de vitamina A e 65 mg de vitamina D, por dia, a um determinado animal. Ele possui dois suplementos alimentares disponíveis: o primeiro contém* 10% *de vitamina A e* 25% *de vitamina D, enquanto que o outro contém* 20% *de vitamina A e* 25% *de vitamina D. Quanto de cada suplemento deve ser dado ao animal diariamente.*

Exercício 3.8.7 *Em cada um dos sistemas lineares abaixo encontre condições sobre os números reais* $a\,,b\,,c \in \mathbb{R}$*, de modo que o sistemas lineares correspondentes tenham respectivamente uma única solução, infinitas soluções, e nenhuma solução:*

$$a)\ \begin{cases} x - b\,y = -1 \\ x + a\,y = 3 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x + b\,y = -1 \\ a\,x + 2\,y = 5 \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} 2\,x + y - z = a \\ 2\,y + 3\,z = b \\ x - z = c \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} x + a\,y = 0 \\ y + b\,z = 0 \\ c\,x + z = 0 \end{cases} \qquad 5)\ \begin{cases} x + 2\,y - 4\,z = 4 \\ 3\,x - y + 13\,z = 2 \\ 4\,x + y + a^2\,z = a + 3 \end{cases} \qquad 6)\ \begin{cases} x + a\,y - z = 1 \\ -x + (a-2)\,y + z = -1 \\ 2\,x + 2\,y + (a-2)\,z = 1 \end{cases}$$

Exercício 3.8.8 *As entradas para um parque de diversões custam* R\$ 7,00 *para adultos,* R\$ 2,00 *para jovens e* R\$ 0,50 *para crianças. Se* 150 *pessoas entrarem no parque e a arrecadação final for* R\$ 100,00*, determinar o número de adultos, de jovens e de crianças que entraram*

Sugestão: os números procurados deverão ser inteiros não negativos.

Capítulo 4

Espaços vetoriais

Neste capítulo introduziremos o conceito de espaço vetorial real ou complexo, bem como propriedades e exemplos, que serão utilizados em todo o decorrer destas notas.

4.1 Introdução

Antes de apresentarmos a definição de espaço vetorial real ou complexo, passaremos a analisar em paralelo dois objetos, a saber, o conjunto formado pelas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que será denotado por $\mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, ou seja,

$$\mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) \doteq \{f\,;\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ é uma função}\}. \tag{4.1}$$

e o conjunto das matrizes quadradas de ordem $\underline{n}$, com coeficientes reais, que denotaremos por $M_n(\mathbb{R})$, ou simplesmente, por M_n.

A soma de duas funções f e g de $\mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ é definida como sendo a função

$$\begin{aligned} & f + g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}), \\ \text{dada por} \quad & (f+g)(x) \doteq f(x) + g(x), \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Note também que se $\lambda \in \mathbb{R}$, que chamaremos de escalar, podemos multiplicar a função f pelo escalar λ, da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \lambda \cdot f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}), \\ \text{dada por} \quad & (\lambda \cdot f)(x) \doteq \lambda\, f(x), \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Com relação a $M_n(\mathbb{R})$, podemos definir a soma de duas matrizes quadradas de ordem $\underline{n}$, $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$, como

$$A + B \doteq (a_{ij} + b_{ij})_{n\times n}, \tag{4.4}$$

ou seja, somando-se as correspondentes entradas das matizes, e esta soma resultará em um elemento de $M_n(\mathbb{R})$.

Com a relação à multiplicação de uma matriz quadrada de ordem $\underline{n}$, $A = (a_{ij})_{n\times n}$, por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos

$$\lambda \cdot A \doteq (\lambda\, a_{ij})_{n\times n}, \tag{4.5}$$

ou seja, multiplicando-se por λ cada entrada da matriz,o qual também resultará em um elemento de $M_n(\mathbb{R})$.

O que estes dois conjuntos acima, munidos dessas operações de adição de seus elementos dos correspondentes conjuntos e multiplicação de seus elementos por escalares, têm comum? Vejamos:

Verifica-se facilmente a partir das propriedades dos números reais que, para quaisquer funções $f, g, h \in \mathscr{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, são válidas as seguintes propriedades:

1. $f + g = g + f$;
2. $f + (g + h) = (f + g) + h$;
3. se $\mathscr{O}$ representa o função nula, isto é,
$$\mathscr{O}(x) \doteq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$
$$\text{então teremos:} \quad \mathscr{O} + f = f;$$
4. a função $-f$, definida por
$$(-f)(x) \doteq -[f(x)], \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$
$$\text{satisfaz} \quad f + (-f) = \mathscr{O};$$
5. $\lambda \cdot (\mu \cdot f) = (\lambda\,\mu) \cdot f$;
6. $(\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$;
7. $\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$;
8. $1 \cdot f = f$.

Por outro lado, para quaisquer matrizes A, B, C em $M_n(\mathbb{R})$ e para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, também são válidas as seguintes propriedades:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. se O representa a matriz nula, isto é,
$$O_n \doteq (0)_{n\times n},$$
$$\text{então teremos:} \quad O_n + A = A;$$
4. se $A = (a_{ij})_{n\times n}$,então a matriz $-A$, definida por
$$-A \doteq (-a_{ij})_{n\times n},$$
$$\text{satisfaz:} \quad A + (-A) = O_n;$$

5. $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\, \mu) \cdot A$;

6. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$;

7. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$;

8. $1 \cdot A = A$.

Podemos ver que tanto o conjuntos das funções definidas na reta a valores reais, como o conjunto das matrizes quadradas de ordem n, quando munidos de somas e multiplicação por escalares correspondentes, apresentam *propriedades algébricas* comuns.

Na verdade muitos outros conjuntos, quando munidos de operações apropriadas, apresentam propriedades semelhantes às acima.

É por isso que, ao invés de estudarmos cada um desses modelos separadamente, estudaremos um conjunto arbitrário e não vazio, V, sobre o qual supomos estar definidas uma operação de adição, isto é, para cada u, $v \in V$, associamos um único elemento de V, chamado a *soma de u com v* e denotado por $u + v$, e uma multiplicação por escalar, isto é, para cada $u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, associamos um único elemento de V, chamado de *produto de u pelo escalar λ* e denotado por $\lambda \cdot u$.

4.2 Definições e exemplos

Mais precsimante, temos a:

Definição 4.2.1 *Um conjunto V, não vazio, munido de uma operação de adição, isto é,*

$$+ : V \times V \to V$$

e de uma operação de multiplicação por escalar real, ou seja,

$$\cdot\ : \mathbb{R} \times V \to V$$

será denominado **espaço vetorial real (ou sobre $\mathbb{R}$)** *se são válidas as seguintes propriedades:*

(EV1) *(comutativa da adição)*

$$u + v = v + u\,, \tag{4.6}$$

para cada $u, v \in V$;

(EV2) *(associativa da adição)*

$$u + (v + w) = (u + v) + w\,, \tag{4.7}$$

para cada $u, v, w \in V$;

(EV3) *(existência de um elemento neutro da adição) existe um elemento* $O \in V$*, tal que*

$$O + u = u\,, \tag{4.8}$$

para cada $u \in V$*;*

(EV4) *(existência do elemento oposto) para cada* $u \in V$*, podemos encontrar* $v \in V$*, de modo que*

$$u + v = O\,; \tag{4.9}$$

(EV5) *(associativa da multiplicação)*

$$\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\,\mu) \cdot u\,, \tag{4.10}$$

para cada $u \in V$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*;*

(EV6) *(distribuitiva da multiplicação)*

$$(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u\,, \tag{4.11}$$

para cada $u \in V$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*;*

(EV7) *(distribuitiva da multiplicação pela adição)*

$$\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v\,, \tag{4.12}$$

para cada $u, v \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*

(EV8) *(existência de elemento unitário da multiplicação)*

$$1 \cdot u = u\,, \tag{4.13}$$

para cada $u \in V$*.*

De modo semelhante temos a:

Definição 4.2.2 *Um conjunto* V*, não vazio, munido de uma operação de adição, isto é,*

$$+ : V \times V \to V$$

e de uma operação de multiplicação por escalar complexo, ou seja,

$$\cdot\ : \mathbb{C} \times V \to V$$

será denominado <u>**espaço vetorial complexo (ou sobre** $\mathbb{C}$**)**</u> *se são válidas as seguintes propriedades:*

(EV1-C) *(comutativa da adição)*

$$u + v = v + u\,, \tag{4.14}$$

para cada $u, v \in V$*;*

(EV2-C) *(associativa da adição)*

$$u + (v + w) = (u + v) + w, \tag{4.15}$$

para cada $u, v, w \in V$*;*

(EV3-C) *(existência do elemento neutro da adição) existe um elemento* $O \in V$*, tal que*

$$O + u = u, \tag{4.16}$$

para cada $u \in V$*;*

(EV4-C) *(existência do elemento oposto) para cada* $u \in V$*, podemos encontrar* $v \in V$*, de modo que*

$$u + v = O; \tag{4.17}$$

(EV5-C) *(associativa da multiplicação)*

$$\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \, \mu) \cdot u, \tag{4.18}$$

para cada $u \in V$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$*;*

(EV6-C) *(distribuitiva da multiplicação)*

$$(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u, \tag{4.19}$$

para cada $u \in V$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$*;*

(EV7-C) *(Distribuitiva da multiplicação pela adição)*

$$\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v, \tag{4.20}$$

para cada $u, v \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$*;*

(EV8-C) *(existência de elemento unitário da multiplicação)*

$$1 \cdot u = u, \tag{4.21}$$

para cada $u \in V$*.*

Notação 4.2.1

1. *No caso da Definição 4.2.1, a terna*

$$(V, +, \cdot),$$

será dita **espaço vetorial real (ou sobre** $\mathbb{R}$**)***, e quando as operações envolvidas forem as naturais de* V*, diremos apenas que* V *é um espaço vetorial real (ou sobre* $\mathbb{R}$*).*

2. *No caso da Definição 4.2.2, a terna*

$$(V, +, \cdot),$$

será dita <u>espaço vetorial complexo (ou sobre $\mathbb{C}$)</u>, *e quando as operações envolvidas forem as naturais de V diremos, apenas, que V é um espaço vetorial complexo (ou sobre $\mathbb{C}$).*

Observação 4.2.1 *É comum chamarmos os elementos de um espaço vetorial real ou complexo, de* <u>**vetores**</u>, *independentemente da natureza dos mesmos.*

Também chamaremos de <u>**escalar**</u> *o número real ou complexo, quando este desempenha o seu papel na ação de multiplicar um vetor por esse número real ou complexo.*

Proposição 4.2.1 *Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real (respectivamente, complexo). O elemento $O \in V$, que satisfaz (4.8) (respectivamente, (4.16)) é único.*

Demonstração:

De fato, seja $O' \in V$ satisfazendo(4.8) (respectivamente, (4.16)).

Temos:

$$\begin{aligned} O' &\overset{(4.8)}{=} \underbrace{O}_{\text{elemento neutro de } +} + O' \\ &\overset{(4.6)}{=} \underbrace{O'}_{\text{elemento neutro de } +} + O \\ &\overset{(4.8)}{=} O, \\ \text{isto é,} \quad O &= O', \end{aligned}$$

completando a demonstração.

□

Observação 4.2.2 *Devido a Proposição 4.2.1 acima, chamaremos o vetor O de* <u>**o elemento neutro**</u> *da adição do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.*

Temos também a:

Proposição 4.2.2 *Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real (respectivamente, complexo). O elemento neutro $v \in V$, que satisfaz (4.9) (respectivamente, (4.17)) é único.*

Demonstração:

Dado $u \in V$, suponhamos que existem $v, v' \in V$ são tais que

$$u + v = O \tag{4.22}$$

$$\text{e} \quad u + v' = O. \tag{4.23}$$

Então teremos:

$$
\begin{aligned}
v &\overset{(4.8)}{=} v + O \\
&\overset{(4.23)}{=} v + (u + v') \\
&\overset{(4.7)}{=} (v + u) + v' \\
&\overset{(4.6)}{=} (u + v) + v' \\
&\overset{(4.22)}{=} O + v' \\
&\overset{(4.8)}{=} v', \\
\text{ou seja,} \quad v &= v',
\end{aligned}
$$

completando a demonstração.

□

Observação 4.2.3 *Devido a Proposição 4.2.2 acima, denotaremos o vetor v por* $\underline{-u}$ *e chamaremo-lo de* **vetor oposto** *do vetor u em $(V, +, \cdot)$.*

Podemos agora introduzir a:

Notação 4.2.2 *Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real (respectivamente, complexo). Denotaremos por* $\underline{u - v}$*, o vetor $u + (-v)$, isto é,*

$$u - v \doteq u + (-v). \tag{4.24}$$

Observação 4.2.4

1. *Notemos que se $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), as quatro primeiras propriedades referem-se apenas à operação de adição e são (isto é, (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9)) conhecidas, respectivamente, por propriedade comutativa, associativa, existência do elemento neutro (da adição) e existência do elemento oposto (da adição).*

   A quinta e a oitava propriedades (isto é, (4.10) e (4.13)) são exclusivas da multiplicação por escalar e também podem ser chamadas de associativa (da multiplicação) e elemento unidade (da multiplicação), respectivamente.

   A sexta e a sétima propriedades (isto é, (4.11) e (4.12)) relacionam as duas operações e são ambas conhecidas por distributivas.

2. *O adjetivo "vetorial", utilizado nas Definições 4.2.1 e 4.2.2, deverá ser entendido de uma forma mais ampla, sendo uma referência aos elementos de um espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, independentemente de serem ou não vetores estudados em Geometria Analítica.*

O exemplo mais simples de espaço vetorial real é dado pelo:

Exemplo 4.2.1 *O conjunto dos números reais, a saber $\mathbb{R}$, munido da adição, indicada pr $+$, e da multiplicação, indicada por $\cdot$, usuais de $\mathbb{R}$, é um espaço vetorial real, ou seja, $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$ é um espaço vetorial real.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

□

Temos também o:

Exemplo 4.2.2 *O conjunto dos números complexos, a saber $\mathbb{C}$, munido da adição, indicada pr $+$, e da multiplicação usual de número real por número complexo, indicada por $\cdot$, é um espaço vetorial real, ou seja, $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot)$ é um espaço vetorial real.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

□

Temos também os seguintes exemplos são espaços vetoriais reais:

Exemplo 4.2.3 *Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado. Consideremos o conjunto formado por todas as n-uplas ordenadas de números reais, que indicaremos por $\mathbb{R}^n$, isto é,*

$$\mathbb{R}^n \doteq \{(x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n)\,;\,x_i \in \mathbb{R}\,,\ \textit{para cada}\ i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\}\,, \tag{4.25}$$

munido das operações de adição de duas n-uplas ordenadas, indicada por $+_n$, como sendo:

$$\begin{aligned} \textit{para} \quad & x \doteq (x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n)\,,y \doteq (y_1\,,y_2\,,\cdots\,,y_n) \in \mathbb{R}^n\,,\\ \textit{definimos:} \quad & x +_n y \doteq (x_1+y_1\,,x_2+y_2\,,\cdots\,,x_n+y_n) \in \mathbb{R}^n\,, \end{aligned} \tag{4.26}$$

ou seja,

$$+_n \ :\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,,$$

e o produto de uma n-upla por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, indicada por $\cdot_n$, como sendo:

$$\begin{aligned} \textit{para} \quad & x \doteq (x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n) \in \mathbb{R}^n\,,\\ \textit{definimos:} \quad & \lambda \cdot_n x \doteq (\lambda\,x_1\,,\lambda\,x_2\,,\cdots\,,\lambda\,x_n) \in \mathbb{R}^n\,, \end{aligned} \tag{4.27}$$

ou seja,

$$\cdot_n \ :\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Então $(\mathbb{R}^n\,,+_n\,,\cdot_n)$ é um espaço vetorial real.

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 4.2.5 *Observemos que no Exemplo 4.2.3 acima:*

1. *o vetor nulo do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +_n, \cdot_n)$ *será a* n*-upla nula, isto é,*
$$O \doteq (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n \text{ posições}}) . \tag{4.28}$$
Notemos que
$$O \in \mathbb{R}^n .$$
2. *além disso, se*
$$x \doteq (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n ,$$
então o vetor oposto, associado ao vetor $\underline{x}$*, será* n*-upla*
$$-x \doteq (-x_1, x_2, \cdots, -x_n) . \tag{4.29}$$
Notemos que
$$-x \in \mathbb{R}^n .$$
3. *Para facilitar a notação, da qui em diante, indicaremos as operações* $+_n$ *e* $\cdot_n$*, por* $+$ *e* $\cdot$*, deixando-se subentendedido tratar-se das introduzidas no Exemplo 4.2.3.*

A verificação destes fato será deixada como exercício para o leitor.

Podemos tratar também do:

Exemplo 4.2.4 *Seja* $n \in \mathbb{N}$ *fixado. Consideremos o conjunto formado por todas as* n*-uplas ordenadas de números complexos, que indicaremos por* $\mathbb{C}^n$*, isto é,*
$$\mathbb{C}^n \doteq \{(z_1, z_2, \cdots, z_n) ; z_i \in \mathbb{C}, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \cdots, n\}\} , \tag{4.30}$$
munido das operações de adição de duas n*-uplas ordenadas, indicada por* $+_n$*, como sendo:*
$$\begin{aligned} \text{para} \quad & z \doteq (z_1, z_2, \cdots, z_n), w \doteq (w_1, w_2, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n , \\ \text{definimos:} \quad & z +_n w \doteq (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \cdots, z_n + w_n) \in \mathbb{C}^n , \end{aligned} \tag{4.31}$$
ou seja,
$$+_n \; : \; \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n ,$$
e o produto de uma n*-upla por um escalar real*
$$\lambda \in \mathbb{R} , \tag{4.32}$$
indicada por $\cdot_n$*, como sendo:*
$$\begin{aligned} \text{para} \quad & z \doteq (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n , \\ \text{definimos:} \quad & \lambda \cdot_n z \doteq (\lambda z_1, \lambda z_2, \cdots, \lambda z_n) \in \mathbb{C}^n , \end{aligned} \tag{4.33}$$
ou seja,
$$\cdot_n \; : \; \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n .$$
Então $(\mathbb{C}^n, +_n, \cdot_n)$ *é um espaço vetorial real.*

Observação 4.2.6 *Observemos que no Exemplo 4.2.4 acima:*

1. *o vetor nulo do espaço vetorial real* $(\mathbb{C}^n, +_n, \cdot_n)$ *será a* n*-upla nula, isto é,*
$$O \doteq (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n \text{ posições}}). \tag{4.34}$$
Notemos que
$$O \in \mathbb{C}^n.$$
2. *além disso, se*
$$z \doteq (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n,$$
então o vetor oposto, associado ao vetor $\underline{z}$*, será* n*-upla*
$$-z \doteq (-z_1, z_2, \cdots, -z_n). \tag{4.35}$$
Notemos que
$$-z \in \mathbb{C}^n.$$
3. *Para facilitar a notação, da qui em diante, indicaremos as operações* $+_n$ *e* $\cdot_n$*, por* $+$ *e* $\cdot$*, deixando-se subentendedido tratar-se das introduzidas no Exemplo 4.2.4.*

A verificação destes fato será deixada como exercício para o leitor.

13.09.2019 - 4.a

Outro exemplo importante é dado pelo

Exemplo 4.2.5 *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$ *fixados.*

Denotemos por
$$V \doteq M_{m\times n}(\mathbb{R}),$$
o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ *com todas as entradas reais, munido de operações de adição de matrizes, indicada por* $+$ *(introduzida na Definição 2.3.1) e de multiplicação de número real por matriz, indicada por* $\cdot$ *(introduzida na Definição 2.3.3).*

Então $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real.*

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 4.2.7 *Observemos que no Exemplo 4.2.5 acima:*

1. *o vetor nulo do espaço vetorial real* $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$*, será a matriz nula, isto é,*
$$\begin{aligned} &O_{mn} \doteq (a_{ij})_{m\times n}, \\ \textit{onde} \quad &a_{ij} \doteq 0, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, m\} \textit{ e } j \in \{1, 2, \cdots n\}. \end{aligned} \tag{4.36}$$
Notemos que
$$O_{mn} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

2. *além disso, se*

$$A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R}),$$

então o vetor oposto, associado ao vetor A, será a matriz

$$-A \doteq (-a_{ij})_{m \times n}. \tag{4.37}$$

Notemos que

$$-A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}).$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Uma versão diferente do Exemplo 4.2.5 acima, é dado pelo:

Exemplo 4.2.6 *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ fixados.*

Denotemos por

$$V \doteq M_{m \times n}(\mathbb{C}),$$

o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ com todas as entradas são números complexos, munido de operações de adição de matrizes, indicada por $+$ (introduzida na Definição 2.3.1) e de multiplicação de número real por uma matriz, indicada por $\cdot$ (introduzida na Definição 2.3.3).

Então $(M_{m \times n}(\mathbb{C}), +, \cdot)$ é um espaço vetorial real.

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Outro exemplo importante é dado pelo:

Exemplo 4.2.7 *Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado.*

Denotemos por

$$V \doteq \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$$

o conjunto formado pelos polinômios de grau menor ou igual a $\underline{n}$, com coeficientes reais.

Notemos que

$$\begin{aligned} & p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \\ \textit{se, e somente se,} \quad & p(x) = a_o + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}, \\ \textit{onde} \quad & a_o, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Definimos a adição de elementos de $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ e a multiplicação de elementos de $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ por escalar da seguinte maneira:

Se $p, q \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, de (4.38), podemos encontrar

$$\begin{aligned} & a_o, b_o, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n \in \mathbb{R}, \\ \textit{de modo que,} \quad & p(x) = a_o + a_1 x + \cdots + a_n x^n \\ \textit{e} \quad & q(x) = b_o + b_1 x + \cdots + b_n x^n, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.39}$$

Deste modo, definiremos $p+q$*, como a soma das funções* p *e* q*, ou seja, a função* $(p+q):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, dada por:*

$$\begin{aligned}(p+q)(x) &\doteq p(x)+q(x)\\ &= (a_o+b_o)+(a_1+b_1)\,x+\cdots+(a_n+b_n)\,x^n\,, \quad \textit{para} \quad x\in\mathbb{R}\,, \end{aligned} \tag{4.40}$$

ou seja,

$$+\ :\ \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\times\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\to\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,.$$

Se $p\in\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ *podemos encontrar*

$$\begin{aligned} & a_o\,,b_o\,,a_1\,,b_1\,,\cdots\,,a_n\,,b_n\in\mathbb{R}\,,\\ \textit{de modo que,}\qquad & p(x)=a_o+a_1\,x+\cdots+a_n\,x^n\,,\quad \textit{para}\quad x\in\mathbb{R}\,, \end{aligned} \tag{4.41}$$

Logo, para $\lambda\in\mathbb{R}$*, definimos a função* $\lambda\cdot p$ *como sendo, a multiplicação do número real* λ *pela função* p*, ou seja, a função* $\lambda\cdot p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, dada por:*

$$(\lambda\cdot p)(x)\doteq(\lambda\,a_o)+(\lambda\,a_1)\,x+\cdots+(\lambda\,a_n)\,x^n\,,\quad \textit{para}\quad x\in\mathbb{R}\,, \tag{4.42}$$

ou seja,

$$\cdot\ :\ \mathbb{R}\times\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\to\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,.$$

Então $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *é um espaço vetorial real.*

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 4.2.8 *Observemos que no Exemplo 4.2.7 acima:*

1. *se*

$$\begin{aligned} & p\,,q\in\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,,\\ \textit{então}\qquad & (p+q)\in\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,, \end{aligned}$$

ou seja, adição de polinômios de grau menor ou igual a $\underline{n}$*, com coeficientes reais, terá como resultado um polinômio de grau menor ou igual a* $\underline{n}$*, com coeficientes reais, ou ainda:*

$$+\ :\ \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\times\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\to\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,.$$

2. *se*

$$\begin{aligned} & p\in\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,,\\ \textit{então}\qquad & (\lambda\cdot p)\in\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,, \end{aligned}$$

ou seja, a multiplicação de um número real por polinômio de grau menor ou igual a $\underline{n}$*, com coeficientes reais, terá como resultado um polinômio de grau menor ou igual a* $\underline{n}$*, com coeficientes reais, ou ainda:*

$$\cdot\ :\ \mathbb{R}\times\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\to\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,.$$

3. *o vetor nulo do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$*, será o polinômio identicamente nulo, isto é,*

$$\begin{aligned} &\mathscr{O}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ \textit{dada por} \quad &\mathscr{O}_n(x) \doteq 0, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Notemos que

$$\mathscr{O}_n \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}),$$

ou seja, $\mathscr{O}$ *é um polinômio de grau menor ou igual a* n*, pois*

$$\mathscr{O}_n(x) = 0 + 0\,x + \cdots + 0\,x^n \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. *se* $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$*, então o vetor oposto, associado ao vetor* $\underline{p}$*, será o polinômio*

$$\begin{aligned} &-p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ \textit{dada por} \quad &(-p)(x) \doteq -p(x), \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Notemos que

$$-p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}),$$

pois podemos encontrar

$$\begin{aligned} &a_o, b_o, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n \in \mathbb{R}, \\ \textit{de modo que,} \quad &p(x) = a_o + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}, \\ \textit{assim} \quad &-p(x) = -a_o - a_1\,x + \cdots - a_n\,x^n \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ou seja, $-p$ *é um polinômio de grau menor ou igual a* n*.*

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Uma variação do Exemplo 4.2.7 acima, é dado pelo:

Exemplo 4.2.8 *Seja* $n \in \mathbb{N}$ *fixado.*

Denotemos por

$$V \doteq \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$$

o conjunto formado pelos polinômios de grau menor ou igual a $\underline{n}$*, com coeficientes complexos.*

Notemos que

$$\begin{aligned} &p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{C}) \\ \textit{se, e somente se,} \quad &p(z) = a_o + a_1\,z + \cdots + a_n\,z^n, \quad \textit{para} \quad z \in \mathbb{C}, \\ \textit{onde} \quad &a_o, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Definimos a adição de elementos de $\mathscr{P}_n(\mathbb{C})$ *e a multiplicação de elementos de* $\mathscr{P}_n(\mathbb{C})$ *por escalar da seguinte maneira:*

Se $p, q \in \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$*, de* (4.45)*, podemos encontrar*

$$\begin{aligned} & a_o, b_o, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n \in \mathbb{C}, \\ \textit{de modo que,} \quad & p(z) = a_o + a_1 z + \cdots + a_n z^n \\ \textit{e} \quad & q(z) = b_o + b_1 z + \cdots + b_n z^n, \quad \textit{para} \quad z \in \mathbb{C}, \end{aligned} \tag{4.46}$$

Deste modo, definiremos $p + q$*, como a soma das funções* p *e* q*, ou seja, a função* $p + q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, dada por:*

$$\begin{aligned} (p+q)(z) &\doteq p(x) + q(z) \\ &= (a_o + b_o) + (a_1 + b_1) z + \cdots + (a_n + b_n) z^n, \quad \textit{para} \quad z \in \mathbb{C}, \end{aligned} \tag{4.47}$$

ou seja,

$$+ \; : \; \mathscr{P}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{P}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{C}) .$$

Se $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$ *podemos encontrar*

$$\begin{aligned} & a_o, b_o, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n \in \mathbb{C}, \\ \textit{de modo que,} \quad & p(z) = a_o + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad \textit{para} \quad z \in \mathbb{C}, \end{aligned} \tag{4.48}$$

Logo, para

$$\lambda \in \mathbb{R}, \tag{4.49}$$

definimos a função $\lambda \cdot p$ *como sendo, a multiplicação do número real* λ *pela função* p*, ou seja, a função* $\lambda \cdot p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, dada por:*

$$(\lambda \cdot p)(z) \doteq (\lambda a_o) + (\lambda a_1) z + \cdots + (\lambda a_n) z^n, \quad \textit{para} \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4.50}$$

ou seja,

$$\cdot \; : \; \mathbb{R} \times \mathscr{P}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{C}) .$$

Então $(\mathscr{P}_n(\mathbb{C}), +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real.*

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

O próximo exemplo também é importante:

Exemplo 4.2.9 *Sejam* $I \subseteq \mathbb{R}$ *um intervalo de* $\mathbb{R}$ *e*

$$V \doteq \mathscr{F}(I; \mathbb{R}),$$

o conjunto formado por todas as funções $f : I \to \mathbb{R}$*, ou seja,*

$$\mathscr{F}(I; \mathbb{R}) \doteq \{f \,;\, f : I \to \mathbb{R} \textit{ é uma função}\} . \tag{4.51}$$

Para $f, g \in \mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *definamos as funções*

$$f+g\,,\lambda\cdot f : I \to \mathbb{R}\,,$$

$$\textit{dadas por} \quad (f+g)(x) \doteq f(x)+g(x) \tag{4.52}$$

$$\textit{e} \quad (\lambda\cdot f)(x) = \lambda\, f(x)\,, \quad \textit{para} \quad x \in I\,. \tag{4.53}$$

Com isto temos definidas duas operações, uma operação de adição de elementos de $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ *e uma de multiplicação de números reais por elementos de* $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ *e, além disso, teremos:*

$$+ \;:\; \mathscr{F}(I;\mathbb{R}) \times \mathscr{F}(I;\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(I;\mathbb{R})$$

$$\textit{e} \quad \cdot \;:\; \mathbb{R} \times \mathscr{F}(I;\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(I;\mathbb{R})\,.$$

Então $(\mathscr{F}(I;\mathbb{R}), +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real.*

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 4.2.9 *Observemos que no Exemplo 4.2.9 acima:*

1. *o vetor nulo do espaço vetorial real* $(\mathscr{F}(I;\mathbb{R}), +, \cdot)$ *será a função identicamente nulo, isto é,*

$$\mathscr{O} : I \to \mathbb{R}\,,$$

$$\textit{dada por:} \quad \mathscr{O}(x) \doteq 0\,, \quad \textit{para} \quad x \in I\,. \tag{4.54}$$

   Notemos que

$$\mathscr{O} \in \mathscr{F}(I;\mathbb{R})\,.$$

2. *se* $f \in \mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ *então o vetor oposto, associado ao vetor* $\underline{f}$, *será a função*

$$-f : I \to \mathbb{R}\,,$$

$$\textit{dada por:} \quad (-f)(x) \doteq -f(x)\,, \quad \textit{para} \quad x \in I\,. \tag{4.55}$$

   Notemos que

$$-f \in \mathscr{F}(I;\mathbb{R})\,.$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Um análogo do Exemplo 4.2.9, para funções a valores complexos é dado pelo:

Exemplo 4.2.10 *Sejam* $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ *um intervalo de* $\mathbb{R}$ *e*

$$\mathrm{V} \doteq \mathscr{F}(\mathrm{I};\mathbb{C}),$$

o conjunto formado por todas as funções $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$, *ou seja,*

$$\mathscr{F}(\mathrm{I};\mathbb{C}) \doteq \{f;\ f : \mathrm{I} \to \mathbb{C} \text{ é uma função}\}. \tag{4.56}$$

Para $f, g \in \mathscr{F}(\mathrm{I};\mathbb{C})$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *definamos as funções*

$$f + g, \lambda \cdot f : \mathrm{I} \to \mathbb{C},$$

$$\text{dadas por} \quad (f+g)(x) \doteq f(x) + g(x) \tag{4.57}$$

$$\text{e} \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda\, f(x), \quad \text{para} \quad x \in \mathrm{I}. \tag{4.58}$$

Com isto temos definidas duas operações, uma operação de adição de elementos de $\mathscr{F}(\mathrm{I};\mathbb{C})$ *e uma de multiplicação de números reais por elementos de* $\mathscr{F}(\mathrm{I};\mathbb{C})$ *e, além disso, teremos:*

$$+ \ : \ \mathscr{F}(\mathrm{I};\mathbb{C}) \times \mathscr{F}(\mathrm{I};\mathbb{C}) \to \mathscr{F}(\mathrm{I};\mathbb{C})$$

$$\text{e} \quad \cdot \ : \ \mathbb{R} \times \mathscr{F}(\mathrm{I};\mathbb{C}) \to \mathscr{F}(\mathrm{I};\mathbb{C}).$$

Então $(\mathscr{F}(\mathrm{I};\mathbb{C}), +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real.*

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Um outro caso importante é dado pelo:

Exemplo 4.2.11 *Indiquemos por*

$$\mathscr{C}(\mathrm{I};\mathbb{R}),$$

o conjunto formado por todas as funções contínuas definidas num intervalo $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$, *munido das operações de adição de funções e multiplicação de número reais por funções, introduzidas no Exemplo 4.2.9 acima.*

Então $(\mathscr{C}(\mathrm{I};\mathbb{R}), +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real.*

Resolução:

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 4.2.10 *Observemos que no Exemplo 4.2.11 acima:*

1. *se*

$$f, g \in \mathscr{C}(\mathrm{I};\mathbb{R}),$$

$$\text{então} \quad (f+g) \in \mathscr{C}(\mathrm{I};\mathbb{R}),$$

ou seja, adição de funções contínuas no intervalo I, *terá como resultado uma função contínua no intervalo* I, *ou ainda:*

$$+ \ : \ \mathscr{C}(\mathrm{I};\mathbb{R}) \times \mathscr{C}(\mathrm{I};\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathrm{I};\mathbb{R}).$$

2. *se*

$$\begin{aligned} & f \in \mathscr{C}(I\,;\mathbb{R})\,, \\ \textit{então} \qquad & (\lambda \cdot f) \in \mathscr{C}(I\,;\mathbb{R})\,, \end{aligned}$$

ou seja, a multiplicação de um número real por uma função contínua no intervalo I*, terá como resultado uma função contínua no intervalo* I*, ou ainda:*

$$\cdot\ :\ \mathbb{R} \times \mathscr{C}(I\,;\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(I\,;\mathbb{R})\,.$$

3. *o vetor nulo do espaço vetorial real* $(C(I\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *será a função identicamente nulo, isto é,*

$$\begin{aligned} & \mathscr{O} : I \to \mathbb{R},\,, \\ \textit{dada por:} \qquad & \mathscr{O}(x) \doteq 0\,, \quad \textit{para} \quad x \in I\,. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Notemos que a função

$$\mathscr{O} \in \mathscr{C}(I\,;\mathbb{R})\,,$$

ou seja, é um função contínua no intervalo I.

4. *se* $f \in \mathscr{C}(I\,;\mathbb{R})$*, então o vetor oposto associado ao vetor* f *será a função*

$$\begin{aligned} & -f : I \to \mathbb{R}\,, \\ \textit{dada por:} \qquad & (-f)(x) \doteq -f(x)\,, \quad \textit{para} \quad x \in I\,. \end{aligned}$$

Notemos que a função

$$-f \in \mathscr{C}(I\,;\mathbb{R})\,,$$

ou seja, é um função contínua no intervalo I.

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Um análogo ao Exemplo 4.2.11, para funções a valores complexos, é dado pelo:

Exemplo 4.2.12 *Indiquemos por*

$$\mathscr{C}(I\,;\mathbb{C})\,,$$

o conjunto formado por todas as funções contínuas definidas num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$*, munido das operações de adição de funções e multiplicação de número reais por funções, introduzidas no Exemplo 4.2.9 acima.*

Então $(\mathscr{C}(I\,;\mathbb{C})\,,+\,,\cdot)$ *é um espaço vetorial real.*

Resolução:

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

□

Podemos estender o Exemplo 4.2.11 acima, como mostra o:

Exemplo 4.2.13 *Seja* $k \in \mathbb{N}$ *fixado. Denotemos por*

$$\mathscr{C}^k(I;\mathbb{R}),$$

o conjunto das funções contínuas, com derivadas contínuas até ordem $k \in \mathbb{N}$, *emum intervalo aberto* $I \subseteq \mathbb{R}$, *ou seja*

$$\mathscr{C}^k(I;\mathbb{R}) \doteq \{f : I \to \mathbb{R}\,;\, f^{(j)} \text{ é contínua em } I, \text{ para cada } j \in \{1,2,\cdots,n\}\}, \quad (4.60)$$

onde, $f^{(j)}$ *denota a derivada de ordem* j, *da função* f.

munido das operações de adição de funções e multiplicação de número reais por funções, definidas em no Exemplo 4.2.9 acima.

Então $\left(\mathscr{C}^k(I;\mathbb{R}),+,\cdot\right)$ *é um espaço vetorial real.*

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 4.2.11 *Observemos que no Exemplo 4.2.13 acima:*

1. *se*

$$f, g \in \mathscr{C}^k(I;\mathbb{R}),$$
$$\text{então} \qquad (f+g) \in \mathscr{C}^k(I;\mathbb{R}),$$

ou seja, adição de funções contínuas, com derivada contínua até a ordem k, *no intervalo* I, *terá como resultado uma função contínua, com derivada contínua até a ordem* k, *no intervalo* I, *ou ainda:*

$$+ \; : \; \mathscr{C}^k(I;\mathbb{R}) \times \mathscr{C}^k(I;\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^k(I;\mathbb{R}).$$

Isto é consequência do fato que derivada da soma de duas funções que tem derivada é a soma das respectivas derivadas, ou seja,

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad \text{para } x \in I,$$

e que a soma de funções contínuas é uma função contínua.

2. *se*

$$f \in \mathscr{C}^k(I;\mathbb{R}),$$
$$\text{então} \qquad (\lambda \cdot f) \in \mathscr{C}^k(I;\mathbb{R}),$$

ou seja, a multiplicação de um número real por uma função contínua, com derivada contínua até a ordem k, *no intervalo* I, *terá como resultado uma função contínua, com derivada contínua até a ordem* k, *no intervalo* I, *ou ainda:*

$$\cdot \; : \; \mathbb{R} \times \mathscr{C}^k(I;\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^k(I;\mathbb{R}).$$

Isto é consequência do fato que derivada da multiplicação de um número real por uma função que tem derivada é a igual a multiplicação do número real pela derivada da função, ou seja,

$$(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda\, f'(x)\,, \quad \textit{para } x \in I\,,$$

e que a multiplicação de um número real por uma função, é uma função contínua.

3. *o vetor nulo do espaço vetorial real* $(C^k(I;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *será a função identicamente nulo, isto é,*

$$\begin{aligned} &\mathscr{O} : I \to \mathbb{R},, \\ \textit{dada por:} \qquad &\mathscr{O}(x) \doteq 0\,, \quad \textit{para} \quad x \in I\,. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Notemos que a função

$$\mathscr{O} \in \mathscr{C}^k(I;\mathbb{R})\,,$$

ou seja, é um função contínua, com derivada contínua até a ordem k, *no intervalo* I.

4. *se* $f \in \mathscr{C}^k(I;\mathbb{R})$, *então o vetor oposto associado ao vetor* f *será a função*

$$\begin{aligned} &-f : I \to \mathbb{R}\,, \\ \textit{dada por:} \qquad &(-f)(x) \doteq -f(x)\,, \quad \textit{para} \quad x \in I\,. \end{aligned}$$

Notemos que a função

$$-f \in \mathscr{C}^k(I;\mathbb{R})\,,$$

ou seja, é um função contínua, com derivada contínua até a ordem k, *no intervalo* I.

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Um análogo ao Exemplo 4.2.13 acima, para o caso de funções a valores complexos, é dado pelo:

Exemplo 4.2.14 *Seja* $k \in \mathbb{N}$ *fixado. Denotemos por*

$$\mathscr{C}^k(I;\mathbb{C})\,,$$

o conjunto das funções contínuas, com derivadas contínuas até ordem $k \in \mathbb{N}$, *emum intervalo aberto* $I \subseteq \mathbb{R}$, *ou seja*

$$\mathscr{C}^k(I;\mathbb{C}) \doteq \{f : I \to \mathbb{R}\,;\, f^{(j)} \textit{ é contínua em } I, \textit{ para cada } j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,\}\,, \tag{4.62}$$

onde, $f^{(j)}$ *denota a derivada de ordem* j, *da função* f.

munido das operações de adição de funções e multiplicação de número reais por funções, definidas em no Exemplo 4.2.9 acima.

Então $\left(\mathscr{C}^k(I;\mathbb{C})\,,+\,,\cdot\right)$ *é um espaço vetorial real.*

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Temos também o:

Exemplo 4.2.15 *Seja* $(a\,,b)$ *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$. *Indiquemos por*

$$\mathscr{C}^\infty((a\,,b)\,;\mathbb{R})\,,$$

o conjunto das funções definidas em $(a\,,b)$, *a valores reais, que possuem todas as derivadas contínuas em* $(a\,,b)$, *ou seja,*

$$\mathscr{C}^\infty((a\,,b)\,;\mathbb{R}) \doteq \{f:(a\,,b)\to\mathbb{R}\,;\ f^{(j)}\ \textit{é contínua em}\ (a\,,b),\ \textit{para cada}\ j\in\mathbb{N}\}\,, \tag{4.63}$$

onde, $f^{(j)}$ *denota a derivada de ordem* j, *da função* f.

munido das operações de adição de funções e multiplicação de funções por número reais, definidas em no Exemplo 4.2.9 acima.

Então $(\mathscr{C}^\infty((a\,,b)\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *é um espaço vetorial real.*

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 4.2.12 *Observemos que no Exemplo 4.2.15 acima:*

1. *se*

$$\begin{aligned} & f\,,g\in\mathscr{C}^\infty((a\,,b)\,;\mathbb{R})\,,\\ \textit{então}\quad & (f+g)\in\mathscr{C}^\infty((a\,,b)\,;\mathbb{R})\,,\end{aligned}$$

ou seja, adição de funções contínuas, com derivada de qualquer ordem, contínua no intervalo $(a\,,b)$, *terá como resultado uma função contínua, com derivada de qualquer ordem, contínua no intervalo* $(a\,,b)$, *ou ainda:*

$$+\ :\ \mathscr{C}^\infty((a\,,b)\,;\mathbb{R})\times\mathscr{C}^\infty((a\,,b)\,;\mathbb{R})\to\mathscr{C}^\infty((a\,,b)\,;\mathbb{R})\,.$$

Isto é consequência do fato que derivada da soma de duas funções que tem derivada é a soma das respectivas derivadas, ou seja,

$$(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)\,,\quad \textit{para}\ x\in(a\,,b)\,,$$

e que a soma de funções contínuas é uma função contínua.

2. *se*

$$\begin{aligned} & f \in \mathscr{C}^\infty((a\,,b)\,;\mathbb{R})\,, \\ \textit{então} \qquad & (\lambda \cdot f) \in \mathscr{C}^\infty((a\,,b)\,;\mathbb{R})\,, \end{aligned}$$

ou seja, a multiplicação de um número real por uma função que tem derivada de qualquer ordem, contínua no intervalo $(a\,,b)$*, terá como resultado uma função que tem derivada de qualquer ordem, contínua no intervalo* $(a\,,b)$*, ou ainda:*

$$\cdot\ :\ \mathbb{R} \times \mathscr{C}^\infty((a\,,b)\,;\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty((a\,,b)\,;\mathbb{R})\,.$$

Isto é consequência do fato que derivada da multiplicação de um número real por uma função que tem derivada é a igual a multiplicação do número real pela derivada da função, ou seja,

$$(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda\, f'(x)\,, \quad \textit{para}\ x \in (a\,,b)\,,$$

e que a multiplicação de um número real por uma função, é uma função contínua.

3. *o vetor nulo do espaço vetorial real* $(\mathscr{C}^\infty((a\,,b)\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *será a função identicamente nulo, isto é,*

$$\begin{aligned} & \mathscr{O} : (a\,,b) \to \mathbb{R},\,, \\ \textit{dada por:} \qquad & \mathscr{O}(x) \doteq 0\,, \quad \textit{para} \quad x \in (a\,,b)\,. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Notemos que a função

$$\mathscr{O} \in \mathscr{C}^\infty((a\,,b)\,;\mathbb{R})\,,$$

ou seja, é um função que tem derivada de qualquer ordem, contínua no intervalo $(a\,,b)$*.*

4. *se* $f \in \mathscr{C}^\infty((a\,,b)\,;\mathbb{R})$*, então o vetor oposto associado ao vetor* f *será a função*

$$\begin{aligned} & -f : (a\,,b) \to \mathbb{R}\,, \\ \textit{dada por:} \qquad & (-f)(x) \doteq -f(x)\,, \quad \textit{para} \quad x \in (a\,,b)\,. \end{aligned}$$

Notemos que a função

$$-f \in \mathscr{C}^\infty((a\,,b)\,;\mathbb{R})\,,$$

ou seja, é um função que tem derivada de qualquer ordem, contínua no intervalo I*.*

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Um análogo ao Exemplo 4.2.15, para o caso de funções a valores complexos, é dado pelo:

Exemplo 4.2.16 *Seja* $(a\,,b)$ *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$. *Indiquemos por*

$$\mathscr{C}^{\infty}((a\,,b)\,;\mathbb{C})\,,$$

o conjunto das funções definidas em $(a\,,b)$, *a valores reais, que possuem todas as derivadas contínuas em* $(a\,,b)$, *ou seja,*

$$\mathscr{C}^{\infty}((a\,,b)\,;\mathbb{C}) \doteq \{f:(a\,,b)\to\mathbb{R};\, f^{(j)} \text{ é contínua em } (a\,,b), \text{ para cada } j\in\mathbb{N}\}, \tag{4.65}$$

onde, $f^{(j)}$ *denota a derivada de ordem* j, *da função* f.

munido das operações de adição de funções e multiplicação de número reais por funções, definidas em no Exemplo 4.2.9 acima.

Então $(\mathscr{C}^{\infty}((a\,,b)\,;\mathbb{C})\,,+\,,\cdot)$ *é um espaço vetorial real.*

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

$\square$

Os espaços vetoriais reais acima envolvem operações com as quais estamos familiarizados.

O próximo exemplo é um pouco mais sofisticado do que os anteriores e por isso verificaremos que as oito propriedades da Definição 4.2.1 ocorrem.

Exemplo 4.2.17 *Consideremos o conjunto*

$$V \doteq (0,\infty)\,,$$

ou seja, o subconjunto formado pelos números reais positivos.

Para

$$x\,,y\in V \quad e \quad \lambda\in\mathbb{R}\,,$$

definiremos a <u>*adição de* x *com* y</u>, *que será indicada por* $x \boxplus y$, *como sendo*

$$x\boxplus y \doteq x\,y\,, \tag{4.66}$$

(ou seja, o produto usual entre os números reais x *e* y*) e o* <u>*produto de* x *pelo escalar* λ</u>, *que será denotada por* $\lambda \boxdot x$, *como*

$$\lambda\boxdot x \doteq x^{\lambda}\,, \tag{4.67}$$

(ou seja, a potenciação usual de números reais).

Então $(V\,,\boxplus\,,\boxdot)$ *é um espaço vetorial real.*

Resolução:

De fato, observemos que

$$\begin{aligned} &\boxplus \;:\; (0\,,\infty)\times(0\,,\infty)\to(0\,,\infty) \\ \text{e} \quad &\boxdot \;:\; \mathbb{R}\times(0\,,\infty)\to(0\,,\infty)\,, \end{aligned}$$

mostrando a propriedade do fechamento em V, para as operações $\boxplus$ e $\boxdot$.

Verifiquemos as oito propriedades da Definição 4.2.1 de espaço vetorial real:

1. se $x\,, y \in V$, temos que

$$\begin{aligned} x \boxplus y &\overset{(4.66)}{=} x\, y \\ &\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} y\, x \\ &\overset{(4.66)}{=} y \boxplus x\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade da propriedade (EV1) (isto é, (4.6));

2. para cada $x, y, z \in V$, terermos:

$$\begin{aligned} x \boxplus (y \boxplus z) &\overset{(4.66)}{=} x \boxplus (y\, z) \\ &\overset{(4.66)}{=} x\,(y\, z) \\ &\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} (x\, y)\, z \\ &\overset{(4.66)}{=} (x \boxplus y)\, z \\ &\overset{(4.66)}{=} (x \boxplus y) \boxplus z\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade da propriedade (EV2) (isto é, (4.7));

3. se $x \in V$ então, como $1 \in V$, teremos:

$$\begin{aligned} 1 \boxplus x &\overset{(4.66)}{=} 1\, x \\ &\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} x\,, \end{aligned}$$

ou seja, $1 \in V$ é o <u>elemento neutro da adição $\boxplus$</u>, o qual denotaremos por O, ou seja,

$$O \doteq 1\,, \tag{4.68}$$

mostrando a validade da propriedade (EV3) (isto é, (4.8));

4. se $x \in V$, temos que

$$\begin{aligned} & x > 0\,, \\ \text{logo, das propriedades de } \mathbb{R}, \text{ teremos:} \quad & x^{-1} > 0\,, \\ \text{ou seja,} \quad & x^{-1} \in V\,. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} x \boxplus x^{-1} &\overset{(4.66)}{=} x\, x^{-1} \\ &\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} 1 \\ &\overset{(4.68)}{=} O\,, \end{aligned}$$

ou seja, o <u>elemento oposto de $x \in V$</u>, relativamente a adição $\boxplus$, será $x^{-1} \in V$, ou seja

$$-\, x \doteq x^{-1}\,, \tag{4.69}$$

mostrando a validade da propriedade (EV4) (isto é, (4.9));

5. se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $x \in V$, temos:

$$\begin{aligned} \lambda \boxdot (\mu \boxdot x) &\overset{(4.67)}{=} \lambda \boxdot x^{\mu} \\ &\overset{(4.67)}{=} (x^{\mu})^{\lambda} \\ &\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} x^{\mu\lambda} \\ &\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} x^{\lambda\mu} \\ &\overset{(4.67)}{=} (\lambda\mu) \boxdot x\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade da propriedade ($\text{EV}5$) (isto é, (4.10));

6. se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $x \in V$, temos:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \boxdot x &\overset{(4.67)}{=} x^{\lambda+\mu} \\ &\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} x^{\lambda}\, x^{\mu} \\ &\overset{(4.66)}{=} x^{\lambda} \boxplus x^{\mu} \\ &\overset{(4.67)}{=} (\lambda \boxdot x) \boxplus (\mu \boxdot x)\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade da propriedade ($\text{EV}6$) (isto é, (4.11));

7. se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x, y \in V$, temos:

$$\begin{aligned} \lambda \boxdot (x \boxplus y) &\overset{(4.66)}{=} \lambda \boxdot (x\,y) \\ &\overset{(4.67)}{=} (x\,y)^{\lambda} \\ &\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} x^{\lambda}\, y^{\lambda} \\ &\overset{(4.67)}{=} (\lambda \boxdot x)\,(\lambda \boxdot y) \\ &\overset{(4.66)}{=} (\lambda \boxdot x) \boxplus (\lambda \boxdot y)\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade da propriedade ($\text{EV}7$) (isto é, (4.12));

8. se $x \in V$, teremos:

$$\begin{aligned} 1 \boxdot x &\overset{(4.67)}{=} x^{1} \\ &\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} x\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade da propriedade ($\text{EV}8$) (isto é, (4.13)).

Com isto, pela Definição 4.2.1, podemos concluir que $(V, \boxplus, \boxdot)$ é um espaço vetorial real.

$\square$

Observação 4.2.13 *Notemos que o conjunto V do Exemplo 4.2.17, se munido das operações usuais de soma e multiplicação de números reais* <u>não</u> *será um espaço vetorial real, pois não satisfaz, entre outras, a propriedade da existência de um* <u>elemento neutro</u> *para a adição (pois o número real $0 \notin V$).*

Podemos obter exemplos semelhantes aos citados acima para obter espaços vetoriais complexos.

Abaixo citaremos alguns destes, cujas demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor.

Um análogo ao Exercício 4.2.2, para o caso complexo, é dado pelo:

Exemplo 4.2.18 *O conjunto dos números complexos, a saber $\mathbb{C}$, munido da adição, indicada por $+$, e da multiplicação, indicada por $\cdot$, usuais de $\mathbb{C}$, é um espaço vetorial real, ou seja, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um espaço vetorial complexo.*

Um análogo ao Exemplo 4.2.4, para o caso complexo, é dado pelo:

Exemplo 4.2.19 *Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado. Consideremos o conjunto formado por todas as n-uplas ordenadas de números complexos, que indicaremos por $\mathbb{C}^n$, isto é,*

$$\mathbb{C}^n \doteq \{(z_1, z_2, \cdots, z_n) ; z_i \in \mathbb{C}, \ \textit{para cada } i \in \{1, 2, \cdots, n\}\}, \tag{4.70}$$

munido das operações de adição de duas n-uplas ordenadas, indicada por $+_n$, como sendo:

$$\begin{aligned} \textit{para} \quad & z \doteq (z_1, z_2, \cdots, z_n), w \doteq (w_1, w_2, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n, \\ \textit{definimos:} \quad & z +_n w \doteq (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \cdots, z_n + w_n) \in \mathbb{C}^n, \end{aligned} \tag{4.71}$$

ou seja,

$$+_n \ : \ \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,$$

e o produto de uma n-upla por um escalar complexo

$$\lambda \in \mathbb{C} \quad \textit{(compare com 4.32)}, \tag{4.72}$$

indicada por $\cdot_n$, como sendo:

$$\begin{aligned} \textit{para} \quad & z \doteq (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \\ \textit{definimos:} \quad & \lambda \cdot_n z \doteq (\lambda z_1, \lambda z_2, \cdots, \lambda z_n) \in \mathbb{C}^n, \end{aligned} \tag{4.73}$$

ou seja,

$$\cdot_n \ : \ \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n.$$

Então $(\mathbb{C}^n, +_n, \cdot_n)$ é um espaço vetorial complexo.

Um análogo ao Exemplo 4.2.6, para o caso complexo, é dado pelo:

Exemplo 4.2.20 *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ fixados.*

Denotemos por

$$V \doteq M_{m\times n}(\mathbb{C}),$$

o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ com todas as entradas são números complexos, munido de operações de adição de matrizes, indicada por $+$ (introduzida na Definição 2.3.1) e de multiplicação de número complexo por uma matriz, indicada por $\cdot$ (introduzida na Definição 2.3.3).

Então $(M_{m\times n}(\mathbb{C}), +, \cdot)$ é um espaço vetorial complexo.

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

$\square$

Um análogo ao Exemplo 4.2.8, para o caso complexo, é dado pelo:

Exemplo 4.2.21 *Seja* $n \in \mathbb{N}$ *fixado.*

Denotemos por

$$V \doteq \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$$

o conjunto formado pelos polinômios de grau menor ou igual a $\underline{n}$, *com coeficientes complexos.*

Notemos que

$$\begin{aligned} & p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{C}) \\ \textit{se, e somente se,} \quad & p(z) = a_o + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad \textit{para} \quad z \in \mathbb{C}, \\ \textit{onde} \quad & a_o, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{4.74}$$

Definimos a adição de elementos de $\mathscr{P}_n(\mathbb{C})$ *e a multiplicação de elementos de* $\mathscr{P}_n(\mathbb{C})$ *por escalar da seguinte maneira:*

Se $p, q \in \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$, *de* (4.74), *podemos encontrar*

$$\begin{aligned} & a_o, b_o, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n \in \mathbb{C}, \\ \textit{de modo que,} \quad & p(z) = a_o + a_1 z + \cdots + a_n z^n \\ \textit{e} \quad & q(z) = b_o + b_1 z + \cdots + b_n z^n, \quad \textit{para} \quad z \in \mathbb{C}, \end{aligned} \tag{4.75}$$

Deste modo, definiremos $p + q$, *como a soma das funções* p *e* q, *ou seja, a função* $p + q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *dada por:*

$$\begin{aligned} (p+q)(z) &\doteq p(x) + q(z) \\ &= (a_o + b_o) + (a_1 + b_1) z + \cdots + (a_n + b_n) z^n, \quad \textit{para} \quad z \in \mathbb{C}, \end{aligned} \tag{4.76}$$

ou seja,

$$+ \ : \ \mathscr{P}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{P}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{C}).$$

Se $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$ *podemos encontrar*

$$\begin{aligned} & a_o, b_o, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n \in \mathbb{C}, \\ \textit{de modo que,} \quad & p(z) = a_o + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad \textit{para} \quad z \in \mathbb{C}, \end{aligned} \tag{4.77}$$

Logo, para

$$\lambda \in \mathbb{C} \quad \textit{(compare com (4.49))}, \tag{4.78}$$

definimos a função $\lambda \cdot p$ *como sendo, a multiplicação do número real* λ *pela função* p, *ou seja, a função* $\lambda \cdot p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *dada por:*

$$(\lambda \cdot p)(z) \doteq (\lambda a_o) + (\lambda a_1) z + \cdots + (\lambda a_n) z^n, \quad \textit{para} \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4.79}$$

ou seja,

$$\cdot \ : \ \mathbb{R} \times \mathscr{P}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{C}).$$

Então $(\mathscr{P}_n(\mathbb{C}), +, \cdot)$ *é um espaço vetorial complexo.*

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 4.2.14 *De modo semelhante podemos obter os análogos dos Exemplos 4.2.10, 4.2.12, 4.2.14 e 4.2.16, para os casos complexos e mostrar que*

$$\begin{aligned} &(\mathscr{F}(I;\mathbb{C}),+,\cdot)\,, \\ &(\mathscr{C}(I;\mathbb{C}),+,\cdot)\,, \\ &(\mathscr{C}^k(I;\mathbb{C}),+,\cdot) \\ e \quad &(\mathscr{C}^\infty(I;\mathbb{C}),+,\cdot) \end{aligned} \tag{4.80}$$

são espaços vetoriais complexos.

4.3 Propriedades gerais de espaços vetoriais reais ou complexos

Das oito propriedades que definem um espaço vetorial real (ou complexo) podemos concluir várias outras.

Listaremos algumas destas propriedades no seguinte resultado:

Proposição 4.3.1 *Seja* $(V\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real ou complexo.*

Então:

1. *para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$, *temos que*
$$\lambda \cdot O = O\,, \tag{4.81}$$
onde O *é o elemento neutro da adição do espaço vetorial real ou complexo* $(V\,,+\,,\cdot)$.

2. *para cada* $u \in V$,
$$0 \cdot u = O\,, \tag{4.82}$$
onde $0 \in \mathbb{R}$ *e* O *é o elemento neutro da adição do espaço vetorial real ou complexo* $(V\,,+\,,\cdot)$.

3. *se*
$$\lambda \cdot O = O\,, \tag{4.83}$$
$$\text{então deveremos ter: } \quad \lambda = 0$$
$$\text{ou} \quad u = O\,, \tag{4.84}$$
onde $0 \in \mathbb{R}$ *e* O *é o elemento neutro da adição do espaço vetorial real ou complexo* $(V\,,+\,,\cdot)$.

4. *para* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $u \in V$, *temos que*

$$\begin{aligned}(-\lambda) \cdot u &= \lambda \cdot (-u) \\ &= -(\lambda \cdot u)\,. \end{aligned} \tag{4.85}$$

5. *se* $u \in V$, *temos que*

$$(-1) \cdot u - u\,. \tag{4.86}$$

6. *para* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *e* $u \in V$, *temos que*

$$(\lambda - \mu) \cdot u = \lambda \cdot u - (\mu \cdot u)\,. \tag{4.87}$$

$$\lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot u - (\lambda \cdot v)\,. \tag{4.88}$$

7. *para* $\lambda, \mu_1, \cdots, \mu_n \in \mathbb{R}$ *e* $u_1, \cdots, u_n \in V$, *temos que*

$$\lambda \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j \cdot u_j \right) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda\, \mu_j) \cdot u_j\,. \tag{4.89}$$

8. *para* $u \in V$, *temos que*

$$-(-u) = u\,. \tag{4.90}$$

9. *se*

$$\begin{aligned} & u + w = v + w\,, \\ \textit{então deveremos ter:}\quad & u = v\,. \end{aligned} \tag{4.91}$$

10. *se* $u, v \in V$, *então existe um único* $w \in V$ *tal que*

$$u + w = v\,. \tag{4.92}$$

Demonstração:

De 1. :

Pelas propriedades (EV3) e (EV7) (isto é, (4.8) e (4.12)) temos que

$$\begin{aligned}\lambda \cdot O &\overset{(4.8)}{=} \lambda \cdot (O + O) \\ &\overset{(4.12)}{=} \lambda \cdot O + \lambda \cdot O\,. \end{aligned} \tag{4.93}$$

Utilizando as propriedades (EV1) a (EV4) (isto é, (4.6) e (4.9)) e a notação da Observação 4.2.3, obtemos

$$\begin{aligned} O &\overset{(4.9) \text{ e Proposição } 4.2.2}{=} \lambda \cdot O + [-(\lambda \cdot O)] \\ &\overset{(4.93)}{=} (\lambda \cdot O + \lambda \cdot O) + [-(\lambda \cdot O)] \\ &\overset{(4.7)}{=} \lambda \cdot O + \{\lambda \cdot O + [-(\lambda \cdot O)]\} \\ &\overset{(4.9)}{=} \lambda \cdot O + O \\ &\overset{(4.8)}{=} \lambda \cdot O\,, \\ \text{isto é,} \qquad \lambda \cdot O = O\,, \end{aligned}$$

completando a demonstração do item 1. .

De 2. :

Pela propriedades (EV6) (isto é, (4.11)) temos que

$$\begin{aligned} 0 \cdot u &\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} (0+0) \cdot u \\ &\overset{(4.11)}{=} 0 \cdot u + 0 \cdot u\,. \end{aligned} \tag{4.94}$$

Utilizando a identidade acima, as propriedades (EV2) e (EV4) (isto é, (4.7) e (4.9)) e da Proposição 4.2.2, obtemos

$$\begin{aligned} O &\overset{(4.9) \text{ e Proposição } 4.2.2}{=} 0 \cdot u + [(-(0 \cdot u)] \\ &\overset{(4.94)}{=} (0 \cdot u + 0 \cdot u) + [-(0 \cdot u)] \\ &\overset{(4.7)}{=} 0 \cdot u + \{0 \cdot u + [-(0 \cdot u)]\} \\ &\overset{(4.9)}{=} 0 \cdot u + O \\ &\overset{(4.8)}{=} 0 \cdot u\,, \\ \text{isto é,} \qquad 0 \cdot u = O\,, \end{aligned}$$

completando a demonstração do item 2. .

De 3. :

Se

$$\lambda \cdot u = O \tag{4.95}$$

$$\text{e} \qquad \lambda \neq 0\,, \tag{4.96}$$

pelas propriedades (EV8) e (EV5) (isto é, (4.13) e (4.10)) e pelo item 1. desta Proposição, segue que

$$\begin{aligned}
u &\overset{(4.13)}{=} 1 \cdot u \\
&\overset{\lambda \overset{(4.96)}{\neq} 0 \text{ e propriedade de números reais}}{=} \left(\lambda^{-1}\lambda\right) \cdot u \\
&\overset{(4.10)}{=} \lambda^{-1}(\underbrace{\lambda \cdot u}_{\overset{(4.95)}{=} O}) \\
&= \lambda^{-1} \cdot O \\
&\overset{\text{item 1.}}{=} O
\end{aligned}$$

ou seja, $\quad u = O\,,$

completando a demonstração do item 3. .

<u>**De 4. :**</u>

Utilizando a propriedade (EV6) (isto é, (4.11)) e o item 2. desta Proposição, obtemos:

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot u + (-\lambda) \cdot u &\overset{(4.11)}{=} [\lambda + (-\lambda)] \cdot u \\
&\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} 0 \cdot u \\
&\overset{\text{item 2.}}{=} O\,.
\end{aligned} \tag{4.97}$$

Logo, de (4.97) e da Proposição 4.2.2, segue que

$$(-\lambda) \cdot u = -(\lambda \cdot u)\,.$$

Analogamente, notemos que:

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot u + \lambda \cdot (-u) &\overset{(4.12)}{=} \lambda \cdot [u + (-u)] \\
&\overset{(4.9)}{=} \lambda \cdot O \\
&\overset{(4.81) \text{ e a Proposição 4.2.2}}{=} O\,.
\end{aligned} \tag{4.98}$$

Logo, de (4.98) e da Proposição 4.2.2, segue que

$$\lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u)\,,$$

completando a demonstração do item 4. .

<u>**De 6. :**</u>

Notemos que

$$\begin{aligned}
(\lambda - \mu) \cdot u &\overset{\text{propriedades de números reais}}{=} [\lambda + (-\mu)] \cdot u \\
&\overset{(4.11)}{=} \lambda \cdot u + (-\mu) \cdot u \\
&\overset{(4.85)}{=} \lambda \cdot u - (\mu \cdot u)\,,
\end{aligned}$$

completando a demonstração do item 6. .

De 7. :

A prova da identidade (4.89) é feita por indução sobre $n \in \{2, 3, \cdots\}$ e será deixada como exercício para o leitor

Notemos que o caso $n = 2$ é obtido de (4.11) juntamente com (4.10).

De 8. :

Notemos que,

$$\begin{aligned} -(-u) &\overset{(4.85) \text{ com } \lambda \doteq -1 \text{ e } u \doteq -u}{=} (-1) \cdot (-u) \\ &\overset{(4.85) \text{ com } \lambda \doteq 1}{=} (-1) \cdot [(-1) \cdot u] \\ &\overset{(4.10)}{=} [(-1)(-1)] \cdot u \\ &\overset{\text{propriedades de números reais}}{=} 1 \cdot u \\ &\overset{(4.13)}{=} u , \end{aligned}$$

completando a demonstração do item 8. .

De 9. :

Seja

$$w \doteq (-u) + v \in V . \tag{4.99}$$

Logo

$$\begin{aligned} u + w &\overset{(4.99)}{=} u + [(-u) + v] \\ &\overset{(4.7)}{=} [u + (-u)] + v \\ &\overset{(4.81) \text{ e a Proposição 4.2.2}}{=} O + v \\ &\overset{(4.8)}{=} v , \end{aligned}$$

completando a demonstração do item 9. .

□

Para finalizar temos a

Proposição 4.3.2 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real ou complexo.*

Então, se

$$V \neq \{O\} , \tag{4.100}$$

segue que o conjunto V *terá infinitos elementos distintos.*

Demonstração:

Notemos que se encontrarmos uma função

$$f : \mathbb{R} \to V$$

que seja injetora, então o conjunto V terá infinitos elementos distintos.

De fato, se , para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, corresponder um elemento distinto

$$f(\lambda) \in V\,,$$

como $\mathbb{R}$ tem infinitos elementos distintos, teremos que o conjunto V também terá infinitos elementos distintos.

Mostremos que existe função

$$f : \mathbb{R} \to V\,,$$

injetora.

Para isto, seja $v_o \in V$, de modo que

$$v_o \neq O\,, \tag{4.101}$$

que existe por (4.100).

Definamos a função $f : \mathbb{R} \to V$, por

$$f(\lambda) = \lambda \cdot v_o\,, \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{4.102}$$

A função f está bem definida e, além disso é injetora.

De fato, suponhamos que $\lambda\,,\mu \in \mathbb{R}$, são tais que

$$f(\lambda) = f(\mu)\,. \tag{4.103}$$

Como

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot v &\overset{(4.102)}{=} f(\lambda)\\
&\overset{(4.103)}{=} f(\mu)\\
&\overset{(4.102)}{=} \mu \cdot v_o\,,\\
\text{ou seja,} \qquad \lambda \cdot v_o &= \mu \cdot v_o\,,\\
\text{que, de (4.91), é equivalente a:} \qquad \lambda \cdot v_o - (\mu \cdot v_o) &= \underbrace{\mu \cdot v_o - (\mu \cdot v_o)}_{\overset{(4.9)}{=} O}\,,\\
\text{ou seja,} \qquad \lambda \cdot v_o - (\mu \cdot v_o) &= O\,.
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Pelo item 4. da Proposição 4.3.1 e (4.11), deveremos ter

$$\begin{aligned}
O &\overset{(4.104)}{=} \lambda \cdot v_o - (\mu \cdot v_o)\\
&\overset{(4.85)}{=} \lambda \cdot v_o + (-\mu) \cdot v_o\\
&\overset{(4.11)}{=} (\lambda - \mu) \cdot v_o\,.
\end{aligned}$$

Como $v_o \neq O$ (veja (4.101)), pelo item 3. da Proposição 4.3.1, segue que

$$\begin{aligned}
\lambda - \mu &= 0\,,\\
\text{isto é,} \qquad \lambda &= \mu\,,
\end{aligned}$$

mostrando que a função f é injetora e completando a demonstração do resultado.

□

4.4 Exercícios

Exercício 4.4.1 *Em cada um dos intesn abaixo, verifique se em cada um dos itens se* $(U, +\cdot)$ *é um espaço vetorial real ou complexo, munido das operações* $+$ *e* $\cdot$ *indicadas:*

1. $U \doteq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})\,;\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, *munido das operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz.*

2. $U \doteq \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})\,;\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, *munido das operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz.*

3. $U \doteq \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 3x - 2y = 0 \right\}$, *munido das operações usuais de soma de pares ordenados e multiplicação de número real por par ordenado.*

4. $U \doteq \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, f(-x) = f(x), \text{ para } x \in \mathbb{R}\}$, *munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função.*

5. $U \doteq \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, f(-x) = -f(x), \text{ para } x \in \mathbb{R}\}$, *munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função.*

6. $U \doteq \{p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,;\, p(0) = p(1)\}$, *munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função.*

7. $U \doteq \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4\,;\, y = x \text{ e } z = w^2 \right\}$, *munido das operações usuais de soma de quádruplas ordenadas e multiplicação de número real por quádrupla ordenada.*

8. $U \doteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, *munido das seguintes operações*

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) \doteq (x_1 + x_2, y_1 y_2) \quad e \quad \alpha \odot (x, y) \doteq (\alpha x, y^\alpha),$$

onde $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ *e* $\mathbb{R}^* \doteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercício 4.4.2 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$. *Considere o produto cartesiano*

$$U \times V \doteq \{(u, v)\,;\, u \in U \text{ e } v \in V\}.$$

Dados $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in U \times V$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *defina as seguintes operações em* $U \times V$*:*

$$(u_1, v_1) \oplus (u_2, v_2) \doteq (u_1 + u_2, v_1 + v_2) \qquad e \qquad \lambda \odot (u_1, v_1) \doteq (\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot v_1).$$

Mostre que $(U \times V, \oplus, \odot)$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.4.1 *Consideremos uma mola (que supomos sem massa) suspensa verticalmente, tendo sua extremidade superior presa num suporte rígido (veja a figura abaixo). Fixamos um corpo de massa* $\underline{m}$ *na outra extremidade da mola. Suponha que este corpo seja deslocado verticalmente, a partir da sua posição de equilíbrio e, em seguida, liberado.*

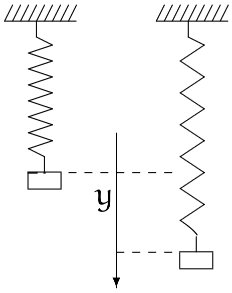
O deslocamente $\underline{y}$ deste corpo, a partir da posição de equilíbrio, é dado por uma função da forma:

$$y(t) \doteq \lambda_1 \cos(\omega\, t) + \lambda_2 \operatorname{sen}(\omega\, t)\,, \quad \textit{para} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{4.105}$$

onde $\omega \in \mathbb{R}$ é uma constante fixada, que depende do material da mola e da massa do corpo. Mostre que para $\omega \in \mathbb{R}$ fixado, o conjunto de todas as funções descritas por (4.105), ou seja,

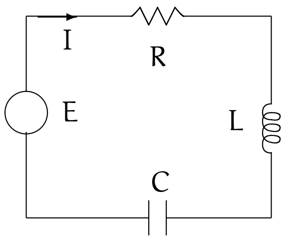
$$U \doteq \{y \in \mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})\,;\, y \text{ satisfazendo } (4.105)\}\,,$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, quando munido das operações usuais de adição de funções e multiplicação de número real por funções.



Exemplo 4.4.2 *Dado o circuito abaixo, onde R é a resistência, I é a corrente, L é a indutância, E é a força eletromotriz e C é a capacitância, sabe-se que a queda de potencial através da capacitância C é dada por $\dfrac{Q}{C}$, onde Q é a carga no capacitor. Aplicando a Lei de Kirchhoff (a queda total de potencial no circuito deve ser contrabalanceada pela força eletromotriz aplicada) e sabendo que $I(t) = \dfrac{dQ}{dt}(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$, pode ser demonstrado que a corrente num instante $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $I = I(t)$, é dada pela equação diferencial ordinária:*

$$L\,\frac{d^2Q}{dt^2}(t) + R\,\frac{dQ}{dt}(t) + \frac{1}{C}\,Q(t) = E\,, \quad \textit{para} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{4.106}$$



1. *Pergunta-se: se*

   $$E \neq 0\,,$$

   conjunto formado por todoas as funções que satisfazem a equação diferencial ordinária (4.106) é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, ou seja,

   $$U \doteq \{y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})\,;\, y \text{ satisfazendo } (4.106)\}\,,$$

   quando munido das operações usuais de adução de funções e multiplicação de número real por funções ?

2. *Mostre que, se*

$$E = 0\,,$$

o conjunto U, *dado por* (4.106), *é um espaço vetorial real, quando munido das operações usuais de adução de funções e multiplicação de número real por funções*

Capítulo 5

Subespaços vetoriais

5.1 Introdução

Muitas vezes nos depararemos com certos subconjuntos de um espaço vetorial real ou complexo, que possuem a propriedade de que a soma de dois de seus elemento é um elemento do próprio subconjunto, bem como quando multiplicamos um elemento do subconjunto por um escalar, o resultado continua pertencendo ao subconjunto. A estes subconjuntos daremos um nome, como veremos na:

5.2 Definições e exemplos

Definição 5.2.1 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo).*

Dizemos que um subconjunto

$$W \subseteq V, \quad W \neq \emptyset,$$

é um <u>**subespaço vetorial**</u> *do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$*, se forem satisfeitas as seguintes condições:*

(sv1) *Deveremos ter*

$$O \in W, \tag{5.1}$$

onde O *é o elemento neutro da adição o espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$*;*

(sv2) *Se* $u, v \in W$*, deveremos ter*

$$(u + v) \in W; \tag{5.2}$$

(sv3) *Se* $u \in W$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ou* $\lambda \in \mathbb{C}$*), deveremos ter*

$$(\lambda \cdot u) \in W. \tag{5.3}$$

Observação 5.2.1

1. *Notemos que todo subespaço vetorial* W *de um espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +_V, \cdot_V)$, *é, ele próprio, um espaço vetorial real (ou complexo), quando munido das operações induzidas do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$, *ou seja,*

$$(W, +_V, \cdot_V)$$

é um espaço vetorial real (ou complexo.

Na situação acima, estamos indicando a operação de adição de elementos do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +_V, \cdot_V)$, *por* $+_V$ *e operação de multiplicação de escalar por* $\cdot_V$, *para destacar que estas operações são as operações do espaço vetorial real (ou complexo) que contém o conjunto* W.

De fato, pois as propriedades comutativa, isto é (4.6), *associativa, isto é,* (4.7), *distributivas, isto é* (4.11), (4.12) *e* (4.13) *são herdadas do próprio espaço vetorial real* $(V, +_V, \cdot_V)$ *(ou, no caso complexo,* (4.14), (4.15), (4.19), (4.20) *e* (4.21)*).*

Pela propriedade (sv1) *acima, isto é,* (5.1)*,garante que o elemento neutro da adição de* $(V, +, \cdot)$ *será um elemento de* W, *ou seja, vale a propriedade (ev3) da Definição 4.2.1, isto é* (4.8) *(ou, no caso complexo,* (4.16) *da Definição 4.2.2).*

Finalmente, pelo item 4. da Proposição 4.3.1 e por (sv3), *isto é,* (5.3) *(ou da Definição 4.2.2, no caso complexo) , se* $u \in W$ *deveremos ter*

$$-u \overset{(4.85)}{=} (-1) \cdot u \in W,$$

ou seja, vale a propriedade (ev4) da Definição 4.2.1, isto é, (4.9) *(ou, no caso complexo,* (4.17) *da Definição 4.2.2), mostrando com isso que, realmente,*

$$(W, +_V, \cdot_V)$$

é um espaço vetorial real (ou complexo).

2. *Observemos também que a propriedade (sv1) (isto é,* (5.1)*) pode ser obtida da propriedade (sv3) (isto é, de* (5.3)*) e do item item 2. da Proposição 4.3.1 .*

De fato, pois se $w \in W$, *teremos que*

$$O \overset{\text{do item 2. da Proposição 4.3.1}}{=} 0 \cdot w \in W.$$

3. *Notemos que*

$$W \doteq \{O\} \tag{5.4}$$

$$\text{ou} \quad W \doteq V \tag{5.5}$$

são subespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.

A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

Definição 5.2.2 *Os subespaços vetoriais do item 3, da Observação 5.2.1 acima, serão denominados de* **subespaços vetoriais triviais** *do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Proposição 5.2.1 *Seja* $W \subseteq V$, *com* $W \neq \emptyset$.

O conjunto W *será um subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$ *se, e somente se, são válidas as seguintes condições:*

(sv1') *Deveremos ter*

$$O \in W, \tag{5.6}$$

onde O *é o elemento neutro da adição do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$;

(sv2') *Para* $u, v \in W$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ou* $\lambda \in \mathbb{C}$*), deveremos ter*

$$(u + \lambda \cdot v) \in W. \tag{5.7}$$

Demonstração:

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

□

Vejamos alguns exemplos de subespaços vetoriais de um espaço vetorial real. Começaremos pelo:

Exemplo 5.2.1 *Mostre que*

$$W \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \ x + y + z = 0\} \tag{5.8}$$

é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, *onde* $+$ *e* $\cdot$, *são as operações* (4.26) *e* (4.27), *introduzidas no Exemplo 4.2.3, para* $n \doteq 3$.

Resolução:

De fato:

1. Notemos que o vetor nulo do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, pertence ao conjunto W, isto é, (veja o item 1. da Observação 4.2.5, para $n = 3$))

   $$O \overset{(4.28), \text{ com } n=3}{=} (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3,$$

   pertence ao conjunto W.

   De fato, pois

   $$0 + 0 + 0 = 0.$$

   Logo, de (5.8), teremos que

   $$O = (0, 0, 0) \in W.$$

2. Se $(x\,,y\,,z)\,,(u\,,v\,,w) \in W$, de (5.8), deveremos ter

$$x + y + z = 0 \tag{5.9}$$

$$\text{e} \qquad u + v + w = 0\,. \tag{5.10}$$

Notemos que

$$(x\,,y\,,z) + (u\,,v\,,w) \overset{(4.26),\ \text{com}\ n=3}{=} (x+u\,,y+v\,,z+w)\,.$$

Mas

$$\begin{aligned}(x+u) + (y+v) + (z+w) &= \underbrace{(x+y+z)}_{\overset{(5.9)}{=}0} + \underbrace{(u+v+w)}_{\overset{(5.10)}{=}0}\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Portanto, de (5.8), segue que

$$(x\,,y\,,z) + (u\,,v\,,w) \overset{(4.26),\ \text{com}\ n=3}{=} (x+u\,,y+v\,,z+w) \in W\,.$$

3. Se $(x\,,y\,,z) \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, de (5.8), deveremos ter

$$x + y + z = 0\,. \tag{5.11}$$

Notemos que

$$\lambda \cdot (x\,,y\,,z) \overset{(4.27),\ \text{com}\ n=3}{=} (\lambda x\,,\lambda y\,,\lambda z)\,.$$

Mas

$$\begin{aligned}\lambda\, x + \lambda\, y + \lambda\, z &= \lambda\,\underbrace{(x+y+z)}_{\overset{(5.11)}{=}0}\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Portanto, de (5.8), segue que

$$\lambda \cdot (x\,,y\,,z) \overset{(4.27),\ \text{com}\ n=3}{=} (\lambda\, x\,,\lambda\, y\,,\lambda\, z) \in W\,.$$

Logo, dos itens 1., 2. e 3. acima e da Definição 5.2.1, seque que o conjunto W, dado (5.8), é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$.

□

Uma extensão do Exemplo 5.2.1 acima, é dado pelo:

Exemplo 5.2.2 *Sejam* $a_1\,,a_2\,,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$ *fixados e consideremos o conjunto*

$$W \doteq \{(x_1\,,x_2\,,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n\,;\;\; a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_n\,x_n = 0\}\,. \tag{5.12}$$

Mostre que o conjunto W *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$*, onde* $+$ *e* $\cdot$*, são as operações* (4.26) *e* (4.27)*, introduzidas no Exemplo 4.2.3.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor.

□

Deixaremos como exercício para o leitor o:

Exemplo 5.2.3 *Mostre que os conjuntos*

$$U \doteq \{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3;\ \ x = 0\} \tag{5.13}$$

$$e \qquad W \doteq \{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3;\ \ y = 0\} \tag{5.14}$$

são subsespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$.

e o

Exemplo 5.2.4 *Mostre que os conjuntos*

$$U \doteq \{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3;\ \ x = y = 0\} \tag{5.15}$$

$$e \qquad W \doteq \{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3;\ \ x + y + z = 0\} \tag{5.16}$$

são subsespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$.

Um outro caso importante, é dado pelo:

Exemplo 5.2.5 *Considere o conjunto* W_s *formado por todas as* **matrizes simétricas** *de ordem* $\underline{n}$*, com coeficientes reais, isto é,*

$$\begin{aligned} & A \in W_s \\ \text{se, e somente se,} \qquad & A^t = A\,, \end{aligned} \tag{5.17}$$

(veja a Definição 2.6.3), ou seja,

$$W_s \doteq \{A \in M_n(\mathbb{R})\,;\, A^t = A\}\,. \tag{5.18}$$

Mostre que o conjunto W_s *um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(M_n(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$*, onde* $+$ *e* $\cdot$*, são as operações usuais em* $M_n(\mathbb{R})$ *(veja o Exemplo 4.2.5, ou ainda, as Definições 2.3.1 e 2.3.3).*

Resolução:

De fato:

1. O elemento neutro do espaço vetorial real $(M_n(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ é a matriz identicamente nula (veja o item 1. da Observação 4.2.7)

$$\begin{aligned} & O_n \overset{(4.36)}{=} (0)_n \in M_n(\mathbb{R})\,, \\ \text{e assim:} \qquad & {O_n}^t = O_n, \\ \text{ou seja, de (5.17), temos:} \qquad & O_n \in W_s; \end{aligned} \tag{5.19}$$

2. Se $A_1, A_2 \in W_s$, de (5.17), teremos teremos

$$A_1{}^t = A_1 \tag{5.20}$$
$$\text{e} \qquad A_2{}^t = A_2 \cdot \tag{5.21}$$

Com isto, teremos

$$\begin{aligned}(A_1 + A_2)^t &\overset{(2.78)}{=} \underbrace{A_1{}^t}_{\overset{(5.20)}{=} A_1} + \underbrace{A_2{}^t}_{\overset{(5.21)}{=} A_2} \\ &= A_1 + A_2\,,\end{aligned}$$

que de (5.17), implicará que $\quad (A_1 + A_2) \in W_s$.

3. Se $A \in W_s$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então , de (5.17), teremos

$$A^t = A\,. \tag{5.22}$$

Mas

$$\begin{aligned}(\lambda \cdot A)^t &\overset{(2.80)}{=} \lambda \cdot \underbrace{A^t}_{\overset{(5.22)}{=} A} \\ &= \lambda \cdot A,\end{aligned}$$

que de (5.17), implicará que $\quad (\lambda \cdot A) \in W_s$.

Portanto, dos itens 1., 2. e 3. acima e da Definição 5.2.1, o conjunto W_s, dado por (5.18), é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

□

Temos também o:

Exemplo 5.2.6 *Considere o conjunto W_a formado por todas as* **matrizes anti-simétricas** *ordem n com coeficientes reais, isto é,*

$$A \in W_a$$
$$\textit{se, e somente se,} \qquad A^t = -A\,, \tag{5.23}$$

(veja a Definição 2.6.4), ou seja,

$$W_a \doteq \{A \in M_n(\mathbb{R})\,;\, A^t = -A\}. \tag{5.24}$$

Mostre que o conjunto W_a é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$, onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais em $M_n(\mathbb{R})$ (veja o Exemplo 4.2.5, ou ainda, as Definições 2.3.1 e 2.3.3).

Observação 5.2.2

1. *Veremos, mais adiante, que toda matriz* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *pode ser escrita, de modo único, como*

$$\begin{aligned} & A = A_s + A_a\,, && (5.25)\\ \textit{com} \quad & A_s \in W_s \\ \textit{e} \quad & A_a \in W_a\,, \end{aligned}$$

onde W_s *e* W_a *são dados por* (5.18) *e* (5.24), *respectivamente.*

2. *Além disso, também mostraremos que*

$$W_s \cap W_a = \{O\}\,. \tag{5.26}$$

As propriedades (5.25) *e* (5.26) *acima, serão de grande importância no estudo de vários espaços vetoriais reais (ou complexos), como veremos mais adiante.*

Um outro caso, é dado pelo:

Exemplo 5.2.7 *Consideremos o conjunto* $\mathscr{P}_n^*(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, *dado por*

$$\mathscr{P}_n^*(\mathbb{R}) \doteq \{p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,;\;\; p(0) = 0\}\,. \tag{5.27}$$

Mostre que o conjunto $\mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})$ *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$, *onde* $+$ *e* $\cdot$, *são dadas por* (4.40) *e* (4.50), *em* $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, *introduzidas no Exemplo 4.2.7.*

Resolução:

De fato:

1. O polinômio nulo (veja o item 3. da Observação 4.2.8),

$$\mathscr{O}_n \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,,$$

pertence a $\mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})$.

De fato, pois ele se anula em $x = 0$, já que

$$\mathscr{O}_n(0) \overset{(4.43)}{=} 0\,.$$

Logo, de (5.27), segue que

$$\mathscr{O}_n \in \mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})\,.$$

2. Se $p\,, q \in \mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})$, de (5.27), teremos

$$\begin{aligned} & p(0) = 0 && (5.28)\\ \text{e} \quad & q(0) = 0\,. && (5.29) \end{aligned}$$

Desta forma teremos:

$$(p+q)(0) = \underbrace{p(0)}_{\stackrel{(5.28)}{=}0} + \underbrace{q(0)}_{\stackrel{(5.29)}{=}0}$$
$$= 0\,.$$

Portanto, de (5.27), teremos

$$(p+q) \in \mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})\,.$$

3. Se $p \in \mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então, de (5.27), teremos

$$\lambda\, p(0) = 0\,. \tag{5.30}$$

Logo

$$(\lambda \cdot p)(0) = \lambda\, \underbrace{p(0)}_{\stackrel{(5.28)}{=}0}$$
$$= 0\,.$$

Portanto, de (5.27), teremos

$$(\lambda \cdot p) \in \mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})\,.$$

Logo, dos itens 1., 2. e 3. acima e da Definição 5.2.1, o conjunto $\mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$.

□

Um outro caso importante é dado pelo:

Exemplo 5.2.8 *Considere o seguinte conjunto*

$$W \doteq \left\{y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})\,;\, y\,''(x) - y(x) = 0\,,\ \textit{para}\ x \in \mathbb{R}\right\} \tag{5.31}$$

onde $y'' = y''(x)$, representa a derivada de segunda ordem da função $y = y(x)$, no ponto $x \in \mathbb{R}$.

Mostre que W é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\left(\mathscr{C}^2(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})\,, +\,, \cdot\right)$, onde $+$ e $\cdot$ são as operações (4.52) e (4.53), em usuais em $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$ (veja o Exemplo 4.2.14, com $I \doteq \mathbb{R}$ e $k \doteq 2$).

Resolução:

De fato:

1. O elemento neutro de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$ é a função identicamente nula $\mathscr{O} \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e esta satisfaz

$$\mathscr{O}''(x) - \mathscr{O}(x) = 0\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{5.32}$$

Logo, de (5.32) e (5.31), segue que

$$\mathscr{O} \in W\,.$$

2. Se $y_1, y_2 \in W$ então, de (5.31), teremos que $y_1, y_2 \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e além disso, satisfazem

$$y_1''(x) - y_1(x) = 0 \tag{5.33}$$

$$\text{e} \qquad y_2''(x) - y_2(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.34}$$

Logo, como $(\mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R}),+,\cdot)$ é um espaço vetorial real (veja o Exemplo 4.2.14, com $I \doteq \mathbb{R}$ e $k \doteq 2$), segue que $y_1 + y_2 \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Além disso, temos

$$(y_1+y_2)''(x) - (y_1+y_2)(x) = \underbrace{[y_1''(x) - y_1(x)]}_{\overset{(5.33)}{=}0} + \underbrace{[y_2''(x) - y_2(x)]}_{\overset{(5.34)}{=}0}$$
$$= 0,$$
$$\text{ou seja,} \qquad (y_1+y_2) \in W.$$

3. Se $y \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então, de (5.31), temos que $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e além disso satisfaz

$$y''(x) - y(x) = 0, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \tag{5.35}$$

Logo, como $(\mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R}),+,\cdot)$ é um espaço vetorial real (veja o Exemplo 4.2.14, com $I \doteq \mathbb{R}$ e $k \doteq 2$), segue que $\lambda \cdot y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e

$$(\lambda \cdot y)''(x) - \lambda \cdot y(x) = \lambda \cdot \underbrace{[y''(x) - y(x)]}_{\overset{(5.35)}{=}0}$$
$$= 0,$$
$$\text{mostrando que} \qquad (\lambda \cdot y) \in W.$$

Portanto, dos itens 1., 2. e 3. e da Definição da Definição 5.2.1, segue que $W \subseteq \mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R}),+,\cdot)$.

□

Para finalizar temos o:

Exemplo 5.2.9 *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ fixados, com $m \leq n$.*
Então o conjunto

$$W \doteq \mathscr{P}_m(\mathbb{R})$$

é um subespaço do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$, onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais em $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 5.2.10 *Consideremos os conjuntos*

$$P(\mathbb{R};\mathbb{R}) \doteq \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});\, f(-x) = f(x), \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\} \tag{5.36}$$

$$\text{e} \qquad I(\mathbb{R};\mathbb{R}) \doteq \{g \in \mathscr{F}(\mathbb{R});\, g(-x) = g(x), \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\}, \tag{5.37}$$

do espaço vetorial real $(\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}),+,\cdot)$, introduzido no Exemplo 4.2.9.
Mostre que os conjuntos $P(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e $I(\mathbb{R};\mathbb{R})$, são subespações vetoriais do espaço vetorial real $(\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}),+,\cdot)$.

Exemplo 5.2.11 *O conjunto*

$$W \doteq \left\{ f \in \mathscr{C}([a,b]\,;\mathbb{R})\,;\ \int_a^b f(x)\,dx = 0 \right\}$$

é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathscr{C}([a,b]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais em* $\mathscr{C}([a,b]\,;\mathbb{R})$*) (veja o Exemplo 4.2.11).*

5.3 Interseção e soma de subespaços vetoriais

Temos a:

Proposição 5.3.1 (interseção de subespaços) *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Então o conjunto

$$U \cap W$$

é um subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$.

Demonstração:

De fato:

1. Como U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$, de (5.1), temos que

$$\begin{array}{rl} & O \in U \\ \text{e} & O \in W\,. \\ \text{Logo} & O \in U \cap W\,; \end{array}$$

2. Se $x\,,y \in U \cap W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), como U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, da Proposição 5.2.1, teremos:

$$\begin{array}{rl} & (x + \lambda \cdot y) \in U \\ \text{e} & (x + \lambda \cdot y) \in W\,. \\ \text{ou seja,} & (x + \lambda \cdot y) \in U \cap W\,. \end{array}$$

Portanto, dos itens 1., 2. acima e da Proposição 5.2.1, segue que o conjunto $U \cap W$ é subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, completando a demonstração do resultado.

□

Podemos resolver o Exercício 5.2.4, utilizando a Proposição 5.3.1 acima e o Exercício 5.2.3, mais precisamente:

Exemplo 5.3.1 *Mostre que o conjunto*

$$A \doteq \{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ \ x = y = 0\} \tag{5.38}$$

é um subsespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$.

Resolução:

Notemos que

$$A \overset{(5.38)}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y = 0\}$$
$$\overset{\text{exercício}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 0\}$$
$$\overset{(5.15)\ \text{e}\ (5.18)}{=} U \cap W,$$

ou seja, $$A = U \cap W. \tag{5.39}$$

Do Exercício 5.2.3, segue que os conjuntos U e W são subsespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Logo, de (5.39) e da Proposição 5.3.1, segue que o conjunto A é um subsespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

□

Observação 5.3.1

1. **Questão:** *Com a notação da Proposição 5.3.1 acima, podemos afirmar que o conjunto*

$$U \cup W$$

é subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$?

Resposta : *Não.*

Basta considerar o seguinte contra-exemplo: sejam

$$V \doteq \mathbb{R}^2,$$
$$U \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0\}$$
$$\text{e} \qquad W \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\}.$$

Como visto no Exercício 5.2.3, os conjuntos U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathbb{R}^2$).

Notemos que U e W, geometricamente, correspondem aos eixos Oy e Ox, respectivamente, do plano xOy.

Notemos que

$$u_o \doteq (0,1) \in U \subseteq U \cup W$$
$$\text{e} \qquad w_o \doteq (1,0) \in W \subseteq U \cup W,$$

mas

$$u_o + w_o = (1,0) + (0,1)$$
$$= (1,1) \notin U \cup W,$$

ou seja, $$u, w \in U \cup W,$$

porém: $$u + w \notin U \cup W.$$

*Portanto o conjunto $U \cup W$ **não** é subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.*

2. *Pode-se mostrar que se* U *e* W *são subespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$, *então o conjunto* $U \cup W$ *será um subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$ *se, e somente se,*

$$\begin{aligned} & U \subseteq W \\ \textit{ou} \quad & W \subseteq U . \end{aligned} \tag{5.40}$$

3. *Se* U *e* W *são subespaços vetoriais de um espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$ *e* V' *também é um subespaço de* $(V, +, \cdot)$, *que contém* U *e* W, *isto é,*

$$U \cup W \subseteq V' .$$

Então o conjunto V' *terá que conter todos os vetores da forma:*

$$\begin{aligned} & u + w , \\ \textit{para cada} \quad & u \in U \\ \textit{e} \quad & w \in W . \end{aligned}$$

Isto motivamos a introduzir a:

Definição 5.3.1 *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais de um espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Definimos a <u>**soma de U e W**</u>, *indicada por* $U + W$, *como o conjunto*

$$U + W \doteq \{u + w ; \ u \in U \ \ e \ \ w \in W\} . \tag{5.41}$$

Com isto temos a:

Proposição 5.3.2 (soma de subespaços) *Sejam* U, W *e* V *como na Definição 5.3.1 acima.*

Então o conjunto $U + W$ *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Além disso,

$$U \cup W \subseteq U + W . \tag{5.42}$$

Demonstração:

Verifiquemos que o conjunto $U + W$ é subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.

1. Como os conjuntos U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, temos que

$$O \in U \tag{5.43}$$

$$\text{e} \quad O \in W , \tag{5.44}$$

e, de (4.8) e (5.41)

$$O \overset{(4.8)}{=} \underbrace{O}_{\overset{(5.43)}{\in} U} + \underbrace{O}_{\overset{(5.44)}{\in} W} ,$$

mostrando que o elemento neutro da adição do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$ (ou seja, $O \in V$) pertence ao conjunto $U+W$, isto é,

$$O \in U+W\,.$$

2. Notemos que, se

$$\begin{aligned} & x_1\,,x_2 \in U+W\,, \\ \text{então} \quad & x_j = u_j + w_j\,, \qquad (5.45) \\ \text{para} \quad & u_j \in U \qquad (5.46) \\ \text{e} \quad & w_j \in W \quad \text{com} \quad j \in \{1\,,2\}. \qquad (5.47) \end{aligned}$$

Por outro lado, se

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})\,,$$

então, das propriedades comutativa e associativa da operação $+$ e do fato que U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, teremos:

$$\begin{aligned} x_1 + \lambda\cdot x_2 &\overset{(5.45)}{=} [u_1+w_1] + \lambda\cdot[u_2+w_2] \\ &\overset{(4.12),(4.7) \text{ e } (4.6)}{=} \underbrace{(u_1+\lambda\cdot u_2)}_{\in U} + \underbrace{(w_1+\lambda\cdot w_2)}_{\in W} \overset{(5.41)}{\in} U+W\,. \end{aligned}$$

Logo, dos itens 1. , 2. acima e da Proposição 5.2.1, segue que o conjunto $U+W$ é subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$.

Mostremos agora que

$$U \cup W \subseteq U+W\,.$$

Para isto, seja

$$v \in U \cup W\,.$$

Logo, como W é subespaço vetorial, temos

$$\begin{aligned} & O \in W \\ \text{e} \quad & v \in U\,, \\ \text{teremos} \quad & v \overset{(4.8)}{=} \underbrace{v}_{\in U} + \underbrace{O}_{\in W} \overset{(5.41)}{\in} U+W\,. \end{aligned}$$

De modo semelhante, se

$$v \in W\,,$$

como U é subespaço vetorial, temos

$$\begin{aligned} & O \in U \\ \text{e} \quad & v \in W\,, \\ \text{teremos} \quad & v \overset{(4.8)}{=} \underbrace{O}_{\in U} + \underbrace{v}_{\in W} \overset{(5.41)}{\in} U+W\,. \end{aligned}$$

ou seja, em qualquer um desses dois casos teremos

$$U \cup W \subseteq U + W,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 5.3.2 *Ainda usando a noção acima, suponha que* V' *seja um subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$, *que contenha os subconjuntos, não vazios,* U *e* W, *ou seja,*

$$U, W \subseteq V'.$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} \textit{para cada} \quad & u \in U \subseteq V' \\ \textit{e cada} \quad & w \in W \subseteq V', \\ \textit{deveremos ter} \quad & u + w \in V', \\ \textit{ou seja,} \quad & U + W \subseteq V'. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Esta observação nos fornece a demonstração da:

Proposição 5.3.3 *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Então o conjunto $U + W$ *é o menor subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$ *que contém o conjunto* $U \cup W$.

Em outras palavras, se V' *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$, *que contém o conjunto* $U \cup W$ *então*

$$U \cup W \subseteq U + W \subseteq V'. \tag{5.49}$$

Demonstração:

Veja a Observação (5.3.2) acima.

□

Podemos agora introduzir outra importante noção, dada pela:

Definição 5.3.2 *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais de um espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Diremos que a soma $U + W$ *é a* **soma direta de U e W** *se*

$$U \cap W = \{O\}. \tag{5.50}$$

Neste caso, usaremos a notação

$$U \oplus W$$

para representar o subespaço vetorial soma (que será direta) $U + W$.

Observação 5.3.3 *Notemos que sempre temos*

$$\{O\} \subseteq U \cap W,$$

pois os conjuntos U *e* W *são subespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Logo $U \oplus V$*, nos diz que o conjunto* $U \cap W$ *é formado* **somente** *pelo vetor nulo* O.

A seguir daremos uma caraterização, equivalente a fornecida pela Definição 5.3.2 acima, a saber:

Proposição 5.3.4 (soma direta de subespaços vetoriais) *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Temos que

$$V = U \oplus W \tag{5.51}$$

se, e somente se, para cada $v \in V$*, podemos encontrar um único* $u \in U$ *e um único* $w \in W$ *de modo que*

$$v = u + w, \tag{5.52}$$

ou seja, cada elemento do conjunto $U + W$ *se escreve,* **de modo único***, como soma de um vetor de* U*, com um vetor de* W.

Demonstração:

Suponhamos que

$$\begin{aligned} & V = U \oplus W, \\ \text{isto é,} \quad & V = U + W & (5.53) \\ \text{e} \quad & U \cap W = \{O\}. & (5.54) \end{aligned}$$

Então, dado $v \in V$, de (5.53), podemos encontrar $u \in U$ e $w \in W$, de modo que

$$v = u + w. \tag{5.55}$$

Queremos mostrar que tal decomposição é **única**.

Para tanto, suponhamos que existam $u' \in U$ e $w' \in W$, tais que

$$v = u' + w'. \tag{5.56}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} u + w & \overset{(5.55)}{=} v \\ & \overset{(5.56)}{=} u' + w'. \end{aligned}$$

Logo, de (4.6),(4.7), (4.9) e (4.10), segue que: $\underbrace{u - u'}_{\in U} = \underbrace{w' - w}_{\in W}$, (5.57)

pois U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.

Logo

$$
\begin{aligned}
& (u - u') \in U \quad \text{e} \quad (w' - w) \in W \\
\text{e assim} \quad & u - u' \overset{(5.57)}{=} w' - w \in U \cap W \overset{(5.54)}{=} \{O\}, \\
\text{ou seja,} \quad & u - u' = O = w' - w \\
\text{ou, equivalentemente,} \quad & u = u' \quad \text{e} \quad w = w',
\end{aligned}
$$

mostrando que $u \in U$ e $w \in W$ são os únicos vetores, que satisfazem (5.55).

Reciprocamente, suponhamos agora que, para cada $v \in V$, podemos encontrar um único $u \in U$ e um único $w \in W$, satisfazendo:

$$
v = u + w. \tag{5.58}
$$

Em particular, teremos

$$
V = U + W.
$$

Resta mostrar que

$$
U \cap W = \{O\}.
$$

Como os conjuntos U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, segue que

$$
\begin{aligned}
& O \in U \\
\text{e} \quad & O \in W, \\
\text{logo} \quad & O \in U \cap W.
\end{aligned} \tag{5.59}
$$

Mostremos que O é o único elemento em $U \cap W$.

Para isto seja

$$
\begin{aligned}
& v \in U \cap W, \\
\text{isto é,} \quad & v \in U \quad \text{e} \quad v \in W.
\end{aligned} \tag{5.60}
$$

Por hipótese, existem um único $u \in U$ e um único $w \in W$, de modo que

$$
v = u + w. \tag{5.61}
$$

Observemos que:

$$
\begin{aligned}
v & \overset{(5.61)}{=} u + w \\
& \overset{(4.8)}{=} (u + w) + O \\
& \overset{(4.9)}{=} (u + w) + (v - v) \\
& \overset{(4.8) \text{ e } (4.7)}{=} (u + v) + (w - v) \\
& \overset{v \in U \cap W}{=} \underbrace{(u + v)}_{\in U} + \underbrace{(w - v)}_{\in W},
\end{aligned}
$$

pois U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.

Portanto.

$$(u+v) \in U \quad \text{e} \quad (w-v) \in W.$$

Da hipótese da unicidade da decomposição (5.61), deveremos ter

$$u = u + v \quad \text{e} \quad w = w - v,$$

o que, da unicidade da existência do elemento neutro O, implicará que

$$v = O\,.$$

Portanto,

$$U \cap W = \{O\}\,,$$
$$\text{ou seja,} \qquad V = U \oplus W\,,$$

como queríamos mostrar.

□

Observação 5.3.4 *Uma prova alternativa da recíproca da Proposição 5.3.4, para mostrar que*

$$U \cap W = \{O\} \tag{5.62}$$

seria supor, por absurdo, a existência de um vetor

$$v \neq O$$
$$\textit{com} \qquad v \in U \cap W\,. \tag{5.63}$$

Como

$$v \in U \cap W\,,$$
$$\textit{teremos} \qquad v \in U \quad \textit{e} \quad v \in W\,. \tag{5.64}$$

Com isto poderíamos obter as seguinte identidades:

$$\begin{aligned} v &= \underbrace{2 \cdot v}_{\in U} \underbrace{-v}_{\in W} \\ &= \underbrace{4 \cdot v}_{\stackrel{(5.64)}{\in} U} \underbrace{-3 \cdot v}_{\stackrel{(5.64)}{\in} W}, \end{aligned} \tag{5.65}$$

pois U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.

Deste modo, de (5.65), obteríamos duas decomposições distintas (pois $v \neq O$) para o vetor $\underline{v}$, já que

$$2 \cdot v, 4 \cdot v \in U\,,$$
$$2 \cdot v \stackrel{v \neq O}{\neq} 4 \cdot v$$
$$\textit{e} \qquad -v, -3 \cdot v \in W\,,$$

o que contraria a hipótese da decomposição única, ou seja, um absurdo.

Portanto, devemos ter (5.62).

Tratemos agora do:

Exemplo 5.3.2 *Mostre que o espaço vetorial real* $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais em* $\mathbb{R}^3$*) é a soma direta dos seguintes subespaços vetoriais*

$$U \doteq \left\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3;\;\; x = y = 0\right\} \tag{5.66}$$

$$e \qquad W \doteq \left\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3;\;\; x + y + z = 0\right\} \tag{5.67}$$

do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$.

Resolução:

Do Exercício 5.2.4 temos que os conjunto U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $\left(\mathbb{R}^3,+,\cdot\right)$.

Uma outra verificação alternativa para mostrar que U é de fato um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\left(\mathbb{R}^3,+,\cdot\right)$ seria:

1. Obviamente temos que
$$O \doteq (0,0,0) \in U\,;$$

2. Se
$$u_1 = (x_1\,,y_1\,,z_1)\,,\;\; u_2 = (x_2\,,y_2\,,z_2) \in U$$
então, de (5.66), segue que
$$x_1 = y_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = y_2 = 0\,.$$
Logo,
$$u_1 = (0\,,0\,,z_1) \;\;\text{e}\;\; u_2 = (0\,,0\,,z_2),$$
assim teremos
$$u_1 + u_2 \overset{+ \text{ em } \mathbb{R}^3}{=} (0\,,0\,,z_1) + (0\,,0\,,z_2) = (0\,,0\,,z_1 + z_2)$$
que, claramente, é um elemento de U;

3. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u = (x\,,y\,,z) \in U$ então, de (5.66), segue que
$$x = y = 0\,,$$
ou seja,
$$u = (0\,,0\,,z)\,.$$
Portanto
$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot (0\,,0\,,z) \overset{\cdot \text{ em } \mathbb{R}^3}{=} (\lambda 0\,,\lambda 0\,,\lambda z) = (0\,,0\,,\lambda z_1)$$
que, é um elemento de U.

Logo, dos itens 1., 2. e 3. acima, segue que U é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que W é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Observemos que

$$\begin{aligned} W &\overset{(5.67)}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \ x+y+z=0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = -x-y\} \,. \end{aligned} \tag{5.68}$$

Logo, dado $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos:

$$\begin{aligned} v &= (x, y, z) \\ &= \underbrace{(0, 0, z+x+y)}_{\doteq u \overset{(5.66)}{\in} U} + \underbrace{(x, y, -x-y)}_{\doteq w \overset{(5.68)}{\in} W} \\ &= u + w \,. \end{aligned} \tag{5.69}$$

Portanto,

$$v \overset{(5.69)}{=} u + w \,,$$

com $\quad u = (0, 0, z+x+y) \in U$

e $\quad w = (x, y, -x-y) \in W$.

Logo, pela Definição 5.3.1, temos que: $\quad \mathbb{R}^3 = U + W \,. \qquad (5.70)$

Resta agora mostrar que

$$U \cap W = \{O\} \,.$$

Para isto,

seja $\quad v = (x, y, z) \in U \cap W$.

Como $\quad (x, y, z) \in U$,

de (5.66), deveremos ter: $\quad x = y = 0 \,. \qquad (5.71)$

Por outro lado, como $\quad (x, y, z) \in W$,

de (5.67), deveremos ter: $\quad x + y + z = 0 \,. \qquad (5.72)$

Logo, de (5.71) e (5.72), devemos encontrar todas as soluções do sistema linear:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \,,$$

e este possui uma única solução, a saber: $\quad (x, y, z) = (0, 0, 0) = O \,.$

Portanto $\quad U \cap W = \{O\} \,,$

que juntamente com (5.70), mostram que

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus W\,,$$

completando a resolução.

Consideremos agora o:

Exercício 5.3.1 *Considere os conjuntos* U *e* W*, dados por*

$$U \doteq \left\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\;\; x = 0\right\} \tag{5.73}$$

$$e \qquad W \doteq \left\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\;\; y = 0\right\}\,. \tag{5.74}$$

Mostre que os conjuntos U *e* W *são subespaços do espaço vetorial real* $\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot\right)$ *e que*

$$\mathbb{R}^3 = U + W\,,$$

mas a soma ***não*** *é direta.*

Resolução:

O Exercício 5.2.3 mostra que os conjuntos U e W, dados por (5.73) e (5.74), respectivamente, são subespaços do espaço vetorial real $\left(\mathbb{R}^3\,, +\,, \cdot\right)$.

Notemoas que, se

$$u = (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$$

temos que

$$(x\,,y\,,z) = \underbrace{(0\,,y\,,z)}_{\doteq u \overset{(5.73)}{\in} U} + \underbrace{(x\,,0\,,0)}_{\doteq w \overset{(5.74)}{\in} W} \in U + W,$$

$$\begin{aligned} \text{pois} \qquad & u = (0\,,y\,,z) \in U \\ \text{e} \qquad & w = (x\,,0\,,0) \in W\,. \\ \text{Portanto} \qquad & \mathbb{R}^3 = U + W\,. \end{aligned}$$

No entanto, a soma **não** é direta, isto é,,

$$U \cap V \neq \{(0\,,0\,,0)\}\,.$$

De fato, pois, por exemplo, temos que o vetor

$$\begin{aligned} & (0\,,0\,,1) \overset{(5.73)}{\in} U \\ \text{e} \quad & (0\,,0\,,1) \overset{(5.74)}{\in} W\,, \\ \text{ou seja,} \quad & (0\,,0\,,1) \in U \cap V\,, \end{aligned}$$

completando a resolução.

□

Deixaremos a cargo do leitor os:

Exemplo 5.3.3 *Vimos no Exemplo 5.2.5 e no Exercício 5.2.6 que os conjuntos*

$$W_s \doteq \{A \in M_n(\mathbb{R})\,;\, A^t = A\} \tag{5.75}$$
$$e \qquad W_a \doteq \{B \in M_n(\mathbb{R})\,;\, B^t = -B\} \tag{5.76}$$

são subespações vetoriais do espaço vetorial real $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_n(\mathbb{R})$*).*

Mostre que

$$M_n(\mathbb{R}) = W_s \oplus W_a\,.$$

Resolução:

<u>**Sugestão:**</u> mostre que se $C \in M_n(\mathbb{R})$, teremos:

$$C = \underbrace{\frac{C + C^t}{2}}_{\doteq A} + \underbrace{\frac{C - C^t}{2}}_{\doteq B}\,.$$

A seguir, mostre que

$$A \in W_s$$
$$\text{e} \qquad B \in W_a\,.$$

□

Observação 5.3.5 *Como consequência do Exercício 5.3.3 acima e da Proposição 5.3.4, temos que toda matriz* $C \in M_n(\mathbb{R})$*, pode ser escrita,* <u>**de modo único**</u>*, como soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.*

Temos também o:

Exemplo 5.3.4 *Consideremos os conjuntos*

$$P(\mathbb{R};\mathbb{R}) \doteq \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})\,;\, f(-x) = f(x)\,, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}\} \tag{5.77}$$
$$e \qquad I(\mathbb{R};\mathbb{R}) \doteq \{g \in \mathscr{F}(\mathbb{R})\,;\, g(-x) = g(x)\,, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}\}, \tag{5.78}$$

do espaço vetorial real $(\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, \cdot)$*, introduzido no Exemplo 4.2.9.*

Vimos no Exercício 5.2.10 que os conjuntos $P(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *e* $I(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *são subespações vetoriais de* $(\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, \cdot)$*.*

Mostre que

$$\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) = P(\mathbb{R};\mathbb{R}) \oplus I(\mathbb{R};\mathbb{R})\,.$$

Resolução:

<u>**Sugestão:**</u> mostre que se $h \in \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, podemos escrever:

$$h(x) = \underbrace{\frac{h(x) + h(-x)}{2}}_{\doteq f(x)} + \underbrace{\frac{h(x) - h(-x)}{2}}_{\doteq g(x)}\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}$$

A seguir, mostre que

$$f \in P(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad g \in I(\mathbb{R}; \mathbb{R}).$$

□

Observação 5.3.6 *Notemos que o conjunto* $P(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ *(*$I(\mathbb{R}; \mathbb{R})$*, respectivamente) é o conjunto formado por todas as funções de* $\mathscr{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ *que são funções pares (ímpares, respectivamente).*

Como consequência do Exercício 5.42 acima e da Proposição 5.3.4, podemo sconcluir que toda função de $\mathscr{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ *pode ser escrita,* **de modo único***, como soma de uma função para com uma função ímpar.*

Podemos estender a noção de soma de subespaços de um espaço vetorial real (ou complexo) para um número finito de subespaços vetoriais, a saber:

Definição 5.3.3 *Sejam* $U_1, U_2, \ldots, U_n$ *subespaços vetoriais de um espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Definimos a **soma dos n subespaços vetoriais $U_1, U_2, \cdots, U_n$***, que será indicada por*

$$\sum_{j=1}^{n} U_j,$$

como sendo:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} U_j &= U_1 + U_2 + \cdots + U_n \\ &\doteq \{u_1 + u_2 + \cdots + u_n ;\, u_j \in U_j,\ \textit{para } j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.\end{aligned} \tag{5.79}$$

Como isto temos a:

Proposição 5.3.5 *Sejam* $U_1, U_2, \cdots, U_n$ *subespaços vetoriais de um espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Então os conjuntos

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n \quad \textit{e} \quad U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n,$$

são um subespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.

Demonstração:

As demonstrações são consequência da Proposição 5.3.2 e da Proposição 5.3.1, respectivamente e de indução sobre n.

As suas elaborações serão deixadas como exercício para o leitor.

□

Com isto podemos estender a noção de soma direta para um número finito de subespaços vetoriais de um espaço vetorial real (ou complexo), a saber:

Definição 5.3.4 *Sejam* $U_1, U_2, \cdots, U_n$ *subespaços vetoriais de um espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Dizemos que a **soma dos** n **subespaços vetoriais** U_1 **até** U_n *é uma* **soma direta** *se, para cada* $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *temos que:*

$$U_j \cap (U_1 + \cdots + U_{j-1} + U_{j+1} + \cdots + U_n) = \{O\}. \tag{5.80}$$

Neste caso usaremos a seguinte notação

$$\begin{aligned} & U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \\ \text{ou} \quad & \bigoplus_{j=1}^{n} U_j , \end{aligned} \tag{5.81}$$

para denotar a soma (direta) dos $\underline{n}$ *subespaços vetoriais* $U_1, U_2, \cdots, U_n$.

Observação 5.3.7

1. *A expressão*
$$U_1 + \cdots + U_{j-1} + U_{j+1} \cdots + U_n$$
será denotada por
$$U_1 + \cdots + \widehat{U_j} + \cdots + U_n ,$$
onde símbolo $\widehat{U_j}$, *significa que a parcela* U_j, *nã deve ser considerada na soma.*

2. *Notemos que, para cada* $j_o \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *temos que se* U_{j_o} *é um subsepaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$, *temos que*
$$\begin{aligned} & O \in U_{j_o} , \\ \textit{logo sempre teremos que:} \quad & O \in U_{j_o} \cap \left(U_1 + \cdots + \widehat{U_{j_o}} + \cdots + U_n \right) . \end{aligned} \tag{5.82}$$

Com isto temos a:

Proposição 5.3.6 *Sejam* $U_1, U_2, \cdots, U_n$ *subespaços vetoriais de um espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Então

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \tag{5.83}$$

se, e somente se, dado $v \in V$, *para cada* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *podemos encontrar um único* $u_j \in U_j$, *de modo que*

$$v = u_1 + \cdots + u_n . \tag{5.84}$$

Demonstração:

A prova é feita por indução sobre $\underline{n}$ e é análoga a da Proposição 5.3.4.

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

□

Apliquemos a Proposição 5.3.6 acima, ao:

Exemplo 5.3.5 *Mostre que o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*) é soma direta dos seguintes subespaços vetoriais:*

$$U_o \doteq \{p_o \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,;\;\; p_o(x) = a_o\,,\;\; \textit{para } x \in \mathbb{R}\,,\;\; \textit{para algum } a_o \in \mathbb{R}\}\,, \tag{5.85}$$

$$U_1 \doteq \{p_1 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,;\;\; p_1(x) = a_1\,x\,,\;\; \textit{para } x \in \mathbb{R}\,,\;\; \textit{para algum } a_1 \in \mathbb{R}\}, \tag{5.86}$$

$$U_2 \doteq \left\{p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,;\;\,,\;\; p_2(x) = a_2\,x^2\,,\;\; \textit{para } x \in \mathbb{R}\,,\;\; \textit{para algum } a_2 \in \mathbb{R}\right\}\,. \tag{5.87}$$

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que os conjuntos $U_o\,, U_1$ e U_2 são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$

Mostremos que

$$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = U_o \oplus U_1 \oplus U_2\,.$$

Mostremos, primeiramente, que

$$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = U_o + U_1 + U_2\,.$$

Para isto, se $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, ou seja (veja o Exemplo 4.2.7, com $n = 2$), podemos encontrar

$$a_o\,, a_1\,, a_2 \in \mathbb{R}\,,$$

de modo que, para $x \in \mathbb{R}$, tenhamos

$$\begin{aligned}
p(x) &= \underbrace{a_o}_{\doteq p_o(x)} + \underbrace{a_1\,x}_{\doteq p_1(x)} + \underbrace{a_2\,x^2}_{\doteq p_2(x)} && (5.88)\\
&= p_o(x) + p_1(x) + p_2(x)\,,\\
&= (p_o + p_1 + p_2)(x)\,,\\
\text{ou ainda,} \quad & p = p_o + p_1 + p_2\\
\text{e, de (5.88), (5.85) e (5.86), temos que:} \quad & p_o \in U_o\,,\;\; p_1 \in U_1 \;\; \text{e } p_2 \in U_2\,,\\
\text{mostrando que} \quad & \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = U_o + U_1 + U_2\,. && (5.89)
\end{aligned}$$

Logo, de (5.88) e (5.85), temos que

$$\begin{aligned}
& p \in U_o\\
\text{se, e somente se,} \quad & a_1 = a_2 = 0\,. && (5.90)
\end{aligned}$$

De modo semelhante, de (5.88) e (5.86), temos que

$$\begin{aligned}
& p \in U_1\\
\text{se, e somente se,} \quad & a_o = a_2 = 0\,. && (5.91)
\end{aligned}$$

e por fim, de (5.88) e (5.87), temos que

$$\begin{aligned}
& p \in U_2\\
\text{se, e somente se,} \quad & a_o = a_1 = 0\,. && (5.92)
\end{aligned}$$

Verifiquemos que a soma é direta, que pela Definição 5.3.4 (para $n = 3$), é o mesmo que mostrar:

$$\begin{aligned} & U_o \cap (U_1 + U_2) = \{\mathcal{O}\}, \\ & U_1 \cap (U_o + U_2) = \{\mathcal{O}\} \\ \text{e} \quad & U_2 \cap (U_o + U_1) = \{\mathcal{O}\}. \end{aligned} \tag{5.93}$$

1. Mostremos que

$$U_o \cap (U_1 + U_2) = \{\mathcal{O}\}. \tag{5.94}$$

Seja

$$\begin{aligned} & p \in U_o \cap (U_1 + U_2), \\ \text{isto é,} \quad & p \in U_o \\ \text{e} \quad & p \in (U_1 + U_2). \end{aligned} \tag{5.95}$$

Sendo $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dado por (5.88), de (5.95) e (5.90), teremos

$$a_1 = a_2 = 0, \tag{5.96}$$

$$\text{ou seja,} \quad p(x) = a_o, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.97}$$

Por outro lado, como

$$\begin{aligned} & p \in U_1 + U_2, \\ & p = p_1 + p_2, \end{aligned} \tag{5.98}$$

$$\begin{aligned} \text{onde} \quad & p_1 \in U_1, \\ \text{e} \quad & p_2 \in U_2, \\ \text{que, de (5.86) e (5.87)} \quad & \\ \text{existem } a_1, a_2 \in \mathbb{R}\text{, de modo que:} \quad & p_1(x) = a_1 x \end{aligned} \tag{5.99}$$

$$\text{e} \quad p_2(x) = a_2 x^2 \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.100}$$

$$\text{e, de (5.98), (5.99) e (5.100), segue:} \quad p(x) = a_1 x + a_2 x^2, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.101}$$

Logo, de (5.97) e (5.101), segue que

$$\begin{aligned} a_o & \overset{(5.97)}{=} p(x) \\ & \overset{(5.101)}{=} a_1 x + a_2 x^2, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}, \\ \text{implicando que} \quad & a_o = a_1 = a_2 = 0, \\ \text{ou seja,} \quad & p(x) = 0, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, \\ \text{ou ainda,} \quad & p = \mathcal{O}, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (5.106).

2. Mostremos que

$$U_1 \cap (U_o + U_2) = \{\mathcal{O}\}. \tag{5.102}$$

Seja

$$\begin{aligned} & p \in U_1 \cap (U_o + U_2), \\ \text{isto é,} \quad & p \in U_1 \\ \text{e} \quad & p \in (U_o + U_2). \end{aligned} \tag{5.103}$$

Sendo $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dado por (5.88), de (5.103) e (5.91), teremos

$$a_o = a_2 = 0, \tag{5.104}$$

$$\text{ou seja,} \quad p(x) = a_1\,x, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.105}$$

Por outro lado, como

$$\begin{aligned} & p \in U_o + U_2, \\ & p = p_o + p_2, \\ \text{onde} \quad & p_o \in U_o, \\ \text{e} \quad & p_2 \in U_2, \end{aligned} \tag{5.106}$$

que, de (5.85) e (5.87)

$$\text{existem } a_o, a_2 \in \mathbb{R}, \text{ de modo que:} \quad p_o(x) = a_o \tag{5.107}$$

$$\text{e} \quad p_2(x) = a_2\,x^2 \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.108}$$

$$\text{e, de (5.106), (5.107) e (5.108), segue:} \quad p(x) = a_o + a_2\,x^2, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.109}$$

Logo, de (5.105) e (5.109), segue que

$$\begin{aligned} a_1\,x & \overset{(5.105)}{=} p(x) \\ & \overset{(5.109)}{=} a_o + a_2\,x^2, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}, \\ \text{implicando que} \quad & a_o = a_1 = a_2 = 0, \\ \text{ou seja,} \quad & p(x) = 0, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, \\ \text{ou ainda,} \quad & p = \mathcal{O}, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (5.102).

Para finalizar,

3. Mostremos que

$$U_2 \cap (U_o + U_1) = \{\mathcal{O}\}. \tag{5.110}$$

Seja

$$\begin{aligned} & p \in U_2 \cap (U_o + U_1), \\ \text{isto é,} \quad & p \in U_2 \\ \text{e} \quad & p \in (U_o + U_1). \end{aligned} \tag{5.111}$$

Sendo $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dado por (5.88), de (5.111) e (5.92), teremos

$$a_o = a_1 = 0\,, \tag{5.112}$$

$$\text{ou seja,} \qquad p(x) = a_2\,x^2\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{5.113}$$

Por outro lado, como

$$
\begin{aligned}
& p \in U_o + U_1\,,\\
& p = p_o + p_1\,, && (5.114)\\
\text{onde} \quad & p_o \in U_o\,,\\
\text{e} \quad & p_1 \in U_1\,,\\
\text{que, de (5.85) e (5.86)} \quad & \\
\text{existem } a_o\,, a_1 \in \mathbb{R}\text{, de modo que:} \quad & p_o(x) = a_o && (5.115)\\
\text{e} \quad & p_1(x) = a_1\,x \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,, && (5.116)\\
\text{e, de (5.114), (5.115) e (5.116), segue:} \quad & p(x) = a_o + a_1\,x\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,. && (5.117)
\end{aligned}
$$

Logo, de (5.113) e (5.117), segue que

$$
\begin{aligned}
a_o\,x^2 & \overset{(5.105)}{=} p(x)\\
& \overset{(5.109)}{=} a_o + a_1\,x\,, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}\,,\\
\text{implicando que} \quad & a_o = a_1 = a_2 = 0\,,\\
\text{ou seja,} \quad & p(x) = 0\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,,\\
\text{ou ainda,} \quad & p = \mathscr{O}\,,
\end{aligned}
$$

mostrando a validade de (5.110).

Logo, de (5.89), (5.93) e da Definição 5.3.4, segue que

$$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3\,,$$

completando a resolução.

□

5.4 Exercícios

Exercício 5.4.1 *Verifique se em cada um dos itens abaixo o subconjunto W é um subespaço vetorial do espaço vetorial V. Caso não sejam especificadas, considere as operações usuais.*

1. *Sejam $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, munido das operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz, e* $W \doteq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} ;\, a\,, b\,, c \in \mathbb{R} \right\}$.

2. *Sejam* $V \doteq \mathbb{R}^4$, *munido das operações usuais de soma quádruplas ordenadas e multiplicação de número real por quádrupla ordenada, e* $W \doteq \{(x\,,x\,,y\,,y)\,;\,x\,,y \in \mathbb{R}\}$.

3. *Sejam* $V \doteq \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função, e* $W \doteq \{p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,;\,p(0) = p(1)\}$.

4. *Sejam* $V \doteq M_n(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz, e* $B \in M_n$ *fixadas.*

   Defina $W \doteq \{A \in M_n(\mathbb{R})\,;\,B \cdot A = 0\}$.

5. *Sejam* $V \doteq \mathbb{R}^n$, *munido das operações usuais de soma de* n*-uplas e multiplicação de número real por* n*-uplas, e* $W \doteq \{(x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n)\,;\,a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_n\,x_n = 0\}$, *onde* $a_1\,,\cdots\,,a_n \in \mathbb{R}$ *estão fixos.*

6. *Sejam* $V \doteq M_{n1}(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz, e* $W \doteq \{X \in M_{n1}(\mathbb{R})\,;\,A \cdot X = 0\}$, *onde* $A \in M_{m\times n}$ *está fixada.*

7. *Sejam* $V \doteq \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função, e* $W \doteq \{p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,;\,p'(t) = 0\,,\forall t \in \mathbb{R}\}$.

8. *Sejam* $V \doteq M_n(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz, e* $W \doteq \{A \in M_n(\mathbb{R})\,;\,A^t = A\}$.

9. *Sejam* $V \doteq M_n(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz, e* $W \doteq \{A \in M_n(\mathbb{R})\,;\,A^t = -A\}$.

10. *Sejam* $V \doteq \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$, *munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por funcão, e* $W \doteq \left\{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})\,;\,\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0\right\}$.

11. *Sejam* $V \doteq \mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$, *munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por mfunção, e* $W \doteq \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})\,;\,f(x_o) = 0\}$ *onde* $x_o \in \mathbb{R}$ *está fixado.*

Exercício 5.4.2 *Diga, em cada um dos itens abaixo, se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta. isto é, provando se for verdadeira ou dando um contra-exemplo se for falsa.*

1. *Se* W_1 *e* W_2 *são susbespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$, *então* $W_1 \cup W_2$ *é subespaço do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$.

2. *Sejam* W_1 *e* W_2 *subespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$. *Então* $W_1 \cup W_2$ *é subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$ *se, e somente se,*

$$W_1 \subseteq W_2 \quad \textit{ou} \quad W_2 \subseteq W_1.$$

<u>**Sugestão:**</u> *mostre que se* W *é subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V,+,\cdot)$ *e* $x_o, y_o \in V$ *são tais que* $x_o \in W$ *e* $y_o \notin W$*, então teremos* $x_o + y_o \notin W$ *e use-o.*

Exercício 5.4.3 *Em cada item abaixo encontrar os subespaços vetoriais* $U+W$ *e* $U\cap W$ *do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V,+,\cdot)$*, onde* U, W *são subespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V,+,\cdot)$ *indicado.*

1. *Sejam* $U \doteq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\, y=0\}$, $W \doteq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\, x=2y\}$ *e* $(V,+,\cdot)=(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais).*

2. *Sejam* $U \doteq \left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix};\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$, $W \doteq \left\{\begin{pmatrix} 0 & c\\ 0 & d\end{pmatrix};\, c,d\in\mathbb{R}\right\}$ *e* $(V,+,\cdot) = (M_2,+,\cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais).*

3. *Sejam* $U \doteq \{p\in\mathscr{P}_3(\mathbb{R}); p''(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}\}$, $W \doteq \{q\in\mathscr{P}_3(\mathbb{R});\, q'(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}\}$ *e* $(V,+,\cdot)=(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais).*

Exercício 5.4.4 *Verifique, em cada um dos itens abaixo, se*

$$V = U\oplus W.$$

1. $(V,+,\cdot)=(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais),*
   $U \doteq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\, 2x+3y=0\}$ *e* $W \doteq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\, x-y=0\}$.

2. $(V,+,\cdot)=(M_3,+,\cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais),*
   $$U \doteq \left\{\begin{pmatrix} a & b & 0\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & d\end{pmatrix};\, a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\} \text{ e } W \doteq \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & e\\ f & g & 0\\ h & i & 0\end{pmatrix};\, e,f,g,h,i\in\mathbb{R}\right\}.$$

3. $(V,+,\cdot)=(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais),*
   $U \doteq \{p\in\mathscr{P}_3(\mathbb{R});\, p(1)=p(0)=0\}$ *e* $W \doteq \{q\in\mathscr{P}_3(\mathbb{R});\, q'(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}\}$.

4. *Considere* $P(\mathbb{R};\mathbb{R}) \doteq \{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});\, f$ *é uma função par*$\}$ *e* $I(\mathbb{R};\mathbb{R}) \doteq \{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});\, f$ *é uma função ímpar*$\}$.

   (a) *Mostre que* $P(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *e* $I(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *são subespaços vetorias do espaço vetorial real* $(\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}),+,\cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais).*

   (b) *Mostre que* $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) = P(\mathbb{R};\mathbb{R})\oplus I(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

5. $(M_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais),* W_s, W_a, *definidas por* (5.18) *e* (5.24)*, respectivamente.*

Exemplo 5.4.1 *Em cada um dos itens abaixo, dado* U *subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V,+,\cdot)$*, encontrar o subespaço suplementar do subespaço vetorial* U*, isto é, o subespaço vetorial* W *do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V,+,\cdot)$*, tal que*

$$V = U\oplus W.$$

1. $(V, +, \cdot) = (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais) e* $U \doteq \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$.

2. $(V, +, \cdot) = (\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais) e* $U \doteq \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}); p''(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$.

3. $(V, +, \cdot) = (M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais) e* $U \doteq \{A \in M_3; A^t = A\}$.

4. $(V, +, \cdot) = (M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais) e* $U \doteq \{X \in M_{2\times 1}; A \cdot X = 0\}$, *onde* $A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 5.4.5 *Suponhamos que os* U *e* W *são dois subespaços vetoriais do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$, *tais que* $U \oplus W = V$.

Neste caso diremos que o subespaço vetorial U *é* **suplementar** *(ou* **complementar***) do subespaço vetorial* W *(ou* W *é* **suplementar** *de* U*).*

1. *Determinar um suplementar do subespaço vetorial* W, *do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, *onde* $W \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y = 0\}$.

2. *Determinar um suplementar do subespaço* U , *do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, *onde* $U \doteq \{(x, y, z, t)) \in \mathbb{R}^4;\ x - y = z - t = 0\}$.

Capítulo 6

Combinações lineares em espaços vetoriais

6.1 Introdução

Vimos no capítulo 5 anterior, que um subespaço vetorial é um subconjunto de um espaço vetorial real, que é fechado com relação à adição de vetores e também com relação à multiplicação de vetor por escalar (veja (5.2) e (5.3)).

Em outras palavras, quando somamos dois vetores de um subespaço vetorial ou multiplicamos um vetor do subespaço por um escalar, o resultado é um elemento deste subespaço. Quando combinamos um número finito vezes estas ações temos o que chamaremos de *combinação linear entre vetores*.

6.2 Definições e exemplos

Mais precisamente, temos a:

Definição 6.2.1 *Sejam* $u_1, u_2, \cdots, u_n$ *vetores de um espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Diremos que o vetor $u \in V$ *é uma* **combinação linear** *dos vetores*

$$u_1, u_2, \cdots, u_n,$$

se podemos encontrar escalares

$$\begin{aligned} &\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \ (\textit{ou } \mathbb{C}), \\ \textit{de modo que} \quad & u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n . \end{aligned} \tag{6.1}$$

Observação 6.2.1 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) e* $U \subseteq V$ *um subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Notemos que

$$\begin{aligned} & u_1, u_2, \cdots, u_n \in U \\ \textit{e} \quad & \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \ (\textit{ou } \mathbb{C}), \end{aligned}$$

então a combinação linear

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n$$

será um U *(pois* U *é um subespaço vetorial), isto é,*

$$(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) \in U\,.$$

Tratemos dos:

Exemplo 6.2.1 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*) e o polinômio* $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *dado por*

$$p(x) \doteq 2 + x^2\,, \quad \textit{para cada,} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.2}$$

Mostre que o polinômio $\underline{p}$ *é uma combinação dos polinômios* $p_o, p_1, p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*, onde*

$$p_o(x) \doteq 1\,, \tag{6.3}$$
$$p_1(x) \doteq x\,, \tag{6.4}$$
$$p_2(x) \doteq x^2\,, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.5}$$

Resolução:

Observemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2 + x^2 \\ &= 2 \cdot \underbrace{1}_{\overset{(6.3)}{=} p_o(x)} + 0 \cdot \underbrace{x}_{\overset{(6.4)}{=} p_1(x)} + 1 \cdot \underbrace{x^2}_{\overset{(6.5)}{=} p_2(x)} \\ &= \underbrace{2}_{\doteq \alpha_o} \cdot p_o(x) + \underbrace{0}_{\doteq \alpha_1} \cdot p_1(x) + \underbrace{1}_{\doteq \alpha_2} \cdot p_2(x)\,, \end{aligned}$$

isto é,

$$p = 2 \cdot p_o + 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2\,, \tag{6.6}$$

mostrando que realmente o polinômio $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, dado por (6.2), é uma combinação dos polinômios $p_o, p_1, p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, dados por (6.3), (6.3) e (6.5), respectivamente, completando a resolução.

□

Temos também o:

Exemplo 6.2.2 *Mostre que no espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*), o polinômio* $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *dado por*

$$p(x) \doteq 1 + x^2\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{6.7}$$

é uma combinação dos polinômios $q_o, q_1, q_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*, onde*

$$q_o(x) \doteq 1\,, \tag{6.8}$$
$$q_1(x) \doteq 1 + x \tag{6.9}$$
$$\textit{e} \qquad q_2(x) \doteq 1 + x + x^2\,, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.10}$$

Resolução:

Para mostrarmos o que é pedido precisamos encontrar números reais

$$\alpha_o,\ \alpha_1\,,\alpha_2 \in \mathbb{R}\,,$$

de modo que

$$p = \alpha_o \cdot q_o + \alpha_1 \cdot q_1 + \alpha_2 \cdot q_2\,. \tag{6.11}$$

Ou seja, para cada $x \in \mathbb{R}$, precisamos encontrar α_o, $\alpha_1\,, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, de tal modo que:

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &\overset{(6.7)}{=} p(x) \\ &\overset{(6.11)}{=} \alpha_o\, q_o(x) + \alpha_1\, q_1(x) + \alpha_2\, q_2(x) \\ &\overset{(6.8)}{=} \alpha_o + \alpha_1\,(1+x) + \alpha_2\,\left(1 + x + x^2\right) \\ &= (\alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)\,x + \alpha_2\,x^2\,, \end{aligned}$$

que é equivalente ao sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases},$$

$$\text{cuja (única) solução será:} \quad \begin{cases} \alpha_o = 1\,, \\ \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1\,, \end{cases}, \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned} \text{e, de (6.11) e (6.12), segue que:} &\quad p = 1 \cdot q_o + (-1) \cdot q_1 + 1 \cdot q_2\,, \\ \text{ou ainda,} &\quad p = q_o - q_1 + q_2\,, \end{aligned}$$

mostrando que o polinômio $\underline{p}$ é combinação linear dos vetores q_o, q_1, q_2, no espçao vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, completando a resolução.

□

6.3 Geradores de um espaço vetorial

Podemos agora introduzir a:

Definição 6.3.1 *Sejam* $(V\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) e* S *um subconjunto não vazio de* V*.*

Denotaremos por $[S]$*, o conjunto formado por todas as combinações lineares dos elementos de* S*.*

Em outras palavras, $u \in [S]$ *se, e somente se, existirem*

$$\begin{aligned} &\alpha_1\,,\alpha_2 \cdots\,, \alpha_n \in \mathbb{R} \ \textit{(ou } \mathbb{C}\textit{)} \\ \textit{e} \quad &u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n \in S\,, \\ \textit{de modo que} \quad &u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n\,, \end{aligned} \tag{6.13}$$

ou ainda,

$$[S] \doteq \{\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \,;\, u_i \in S \,, \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}), \text{ para } i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\} \,. \qquad (6.14)$$

Com isto temos a:

Proposição 6.3.1 *Sejam* $(V\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) e* S *um subconjunto não vazio de* V.

Então $[S]$ *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Demonstração:

1. Como $S \neq \emptyset$, podemos encontrar
$$u_o \in S \,.$$
Com isto teremos que
$$O \overset{\text{item 2. da Proposição 4.3.1}}{=} 0 \cdot u \overset{(6.14)}{\in} [S],$$
ou seja, o vetor nulo é combinação linear (o escalar será o número real 0) do vetor $u_o \in S$, assim
$$O \in [S] \,.$$

2. Se $u\,,v \in [S]$, de (6.14), podemos encontrar
$$\begin{aligned} \text{escalares} &\quad \alpha_1\,,\cdots\,,\alpha_n\,,\beta_1,\cdots\,,\beta_m \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ \text{e vetores} &\quad u_1,\cdots\,,u_n\,,v_1\,,\cdots\,,v_m \in S\,, \\ \text{de modo que} &\quad u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \qquad (6.15) \\ \text{e} &\quad v = \beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_m \cdot v_m \,. \qquad (6.16) \end{aligned}$$
Assim, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, segue, das propriedades básicas de espaços vetoriais reais, que
$$\begin{aligned} u+\lambda \cdot v &\overset{(6.15) \text{ e } (6.16)}{=} [\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n] + \lambda \cdot [\beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_m \cdot v_m] \\ &\overset{(4.7),(4.9),(4.10),(4.11),(4.12)}{=} \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n + (\lambda\,\beta_1) \cdot v_1 + \cdots + (\lambda\,\beta_m) \cdot v_m \overset{(6.14)}{\in} [S]\,, \end{aligned}$$
mostrando que
$$u + \lambda \cdot v \in [S] \,.$$

Portanto, dos itens 1, e 2 . acima e da Proposição 5.2.1, segue que $[S]$ será um subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, completando a demonstração do resultado

□

Podemos agora introduzir a:

Definição 6.3.2 *Sejam* S *e* $(V, +, \cdot)$ *como na Definição 6.3.1 acima.*

Diremos que o subespaço vetorial $[S]$ *é o* **subespaço vetorial gerado por** S.

Os elementos do conjunto S *serão denominados* **geradores** *do subespaço vetorial* $[S]$.

Se

$$S = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

utilizaremos a seguinte notação

$$[u_1, u_2, \cdots, u_n] \doteq [S]. \tag{6.17}$$

Observação 6.3.1 *Com as Definições 6.3.1 e 6.3.2 acima, se*

$$u_1, u_2, \cdots, u_n \in V,$$

temos que

$$[u_1, u_2, \cdots, u_n] \doteq \{\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \; ; \; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})\}. \tag{6.18}$$

Com isto temos a:

Proposição 6.3.2 *Sejam* S *e* T *subconjuntos, não-vazios, de um espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$.

1. *temos que*
$$S \subseteq [S]; \tag{6.19}$$

2. *se*
$$\begin{aligned} & S \subseteq T, \\ \textit{então} \quad & [S] \subseteq [T]; \end{aligned} \tag{6.20}$$

3. *temos que*
$$[[S]] = [S]; \tag{6.21}$$

4. *Se* S *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$ *então*
$$S = [S]; \tag{6.22}$$

5. *temos que*
$$[S \cup T] = [S] + [T]. \tag{6.23}$$

Demonstração:

De 1.:

Notemos que

$$\begin{aligned} \text{se} \quad & u \in S, \\ \text{então} \quad & u \overset{(4.13)}{=} 1 \cdot u, \end{aligned}$$

ou seja, o vetor $\underline{u}$ é combinação linear (com escalar igual a 1) do próprio vetor $\underline{u}$, que pertence a S.

Logo, de (6.14), temos:

$$u = 1 \cdot u \in [S] \,,$$

$$\text{mostrando que} \qquad S \subseteq [S] \,,$$

como queríamos demonstrar.

<u>De 2.:</u>

Notemos que, se

$$u \in [S] \,, \tag{6.24}$$

de (6.14), segue que podemos encontrar

$$\begin{aligned} \text{escalares} \quad & \alpha_1 \,, \alpha_2 \,, \cdots \,, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ \text{e vetores} \quad & u_1 \,, u_2 \,, \cdots \,, u_n \in S \,, && (6.25) \\ \text{tais que} \quad & u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \,. && (6.26) \end{aligned}$$

Como

$$S \subseteq T \,,$$

$$\text{de (6.25), segue que} \qquad u_1 \,, u_2 \,, \cdots \,, u_n \in T \,. \tag{6.27}$$

Portanto, de (6.27), (6.26), temos que o vetor $\underline{u}$ é combinação linear de vetores de T, e assim, da Definição 6.3.1, teremos

$$u \in [T] \,,$$

$$\text{que juntamente com (6.24), implicará que:} \qquad [S] \subseteq [T] \,,$$

como queríamos demonstrar.

<u>De 3.:</u>

Pelo item 1. desta Proposição 6.3.2, segue que

$$S \subseteq [S] \,.$$

Logo, do mesmo resultado, segue que

$$[S] \subseteq [[S]] \,. \tag{6.28}$$

Para mostrar a outra inclusão, consideremos

$$u \in [[S]] \,. \tag{6.29}$$

Segue, da Definição 6.3.1, que o vetor $\underline{u}$ é uma combinação linear de elementos de $[S]$.

Novamente pela Definição 6.3.1, como cada elemento de $[S]$ é uma combinação linear de elementos de S, resulta que o vetor $\underline{u}$ será uma combinação linear, de combinaçào linear de elementos de S, ou seja,

$$u \in [S]\,,$$

$$\text{mostrando que} \qquad [[S]] \subseteq [S]\,. \tag{6.30}$$

Portanto, de (6.28) e (6.30), teremos

$$[[S]] = [S]\,,$$

como queríamos demonstrar.

De 4.:

Pelo item 1. desta Proposição 6.3.2, segue que

$$S \subseteq [S]\,. \tag{6.31}$$

Mostremos a outra inclusão.

Para isto, seja $u \in [S]$.

Então, pela Definição 6.3.1, o vetor $\underline{u}$ é uma combinação linear de elementos de S.

Como S é um subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, esta combinação linear será um elemento de S, ou seja,

$$[S] \subseteq S\,. \tag{6.32}$$

Portanto, de (6.31) e (6.32), segue que

$$S = [S]\,,$$

como queríamos demonstrar.

De 5.:

Mostremos que

$$[S \cup T] \subseteq [S] + [T]\,. \tag{6.33}$$

Para isto, seja

$$u \in [S \cup T]\,.$$

Da Definição 6.3.1 de subespaço gerado, segue que, podemos encontrar

$$\begin{aligned} \text{escalares} \quad & \alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots, \alpha_n\,, \beta_1\,, \beta_2\,, \cdots, \beta_m \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ \text{e vetores} \quad & u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n \in S && (6.34) \\ \text{e} \quad & v_1\,, v_2\,, \cdots, v_m \in T\,, && (6.35) \\ \text{tais que} \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n + \beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_m \cdot v_m \\ &\overset{(4.6) \text{ e } (4.7)}{=} (\underbrace{\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n}_{\in [S], \text{ de } (6.34) \text{ e a Definição } 6.3.1}) + (\underbrace{\beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_m \cdot v_m}_{\in [T], \text{ de } (6.35) \text{ e a Definição } 6.3.1}) \in [S] + [T]\,, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja, vale} \qquad [S \cup T] \subseteq [S] + [T]\,.$$

Mostremos agora que

$$[S] + [T] \subseteq [S \cup T] . \qquad (6.36)$$

Para isto, seja

$$u \in [S] + [T] . \qquad (6.37)$$

Então, pela Definição 5.3.1, temos que

$$\begin{aligned} & u = v + w , \\ \text{onde} \quad & v \in [S] \quad \text{e} \quad w \in [T] . \end{aligned} \qquad (6.38)$$

Logo, da Definição 6.3.1 de subespaço gerado, podemos encontrar

$$\begin{aligned} \text{escalares} \quad & \alpha_1 , \alpha_2 , \cdots , \alpha_p , \beta_1 , \beta_2 , \cdots , \beta_q \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ \text{e vetores} \quad & v_1 , v_2 , \cdots , v_p \in S & (6.39) \\ \text{e} \quad & w_1 , w_2 , \cdots , w_q \in T , & (6.40) \\ \text{tais que} \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= v + w \\ &= (\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_p \cdot v_p) + (\beta_1 \cdot w_1 + \cdots + \beta_q \cdot w_q) \\ &= \alpha_1 \cdot \underbrace{v_1}_{\overset{(6.39)}{\in} S \subseteq S \cup T} + \cdots + \alpha_p \cdot \underbrace{v_p}_{\overset{(6.39)}{\in} S \subseteq S \cup T} + \beta_1 \cdot \underbrace{w_1}_{\overset{(6.40)}{\in} T \subseteq S \cup T} + \cdots + \beta_q \cdot \underbrace{w_q}_{\overset{(6.40)}{\in} T \subseteq S \cup T} , \end{aligned}$$

ou seja, o vetor u é uma combinação linear dos vetores de S cup$T$, ou seja,

$$\begin{aligned} & u \in [S \cup T] , \\ \text{que, com (6.37), segue que:} \quad & [S] + [T] \subseteq [S \cup T] . \end{aligned} \qquad (6.41)$$

Logo, de (6.33) e (6.41), segue a validade de (6.23), completando a demonstração do resultado.

□

Podemos agora introduzir a:

Definição 6.3.3 *Dizemos que um espaço vetorial real (ou complexo)* $(V , + , \cdot)$ *é* **finitamente gerado**, *se podemos encontrar um subconjunto finito* $S \subseteq V$, *tal que*

$$V = [S] . \qquad (6.42)$$

A seguir temos os seguintes exemplos de espaços vetoriais reais finitamente gerados e não finitamente gerado.

Começaremos com o:

Exemplo 6.3.1 *O espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^4 , + , \cdot)$ *(veja o Exemplo 4.2.3, com* $n \doteq 4$*) é finitamente gerado.*

Resolução:

De fato, consideremos os seguintes vetores do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$:

$$\begin{aligned} & e_1 \doteq (1, 0, 0, 0), \\ & e_2 \doteq (0, 1, 0, 0), \\ & e_3 \doteq (0, 0, 1, 0) \\ \text{e} \quad & e_4 \doteq (0, 0, 0, 1). \end{aligned} \tag{6.43}$$

Então

$$\begin{aligned} \text{se} \quad & u \in \mathbb{R}^4, \\ \text{podemos encontrar escalares} \quad & a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}, \\ \text{tais que} \quad & u = (a_1, a_2, a_3, a_4). \end{aligned} \tag{6.44}$$

Logo

$$\begin{aligned} u & \stackrel{(6.48)}{=} (a_1, a_2, a_3, a_4) \\ & \stackrel{(4.26),\ \text{com } n=4}{=} (a_1, 0, 0, 0) + (0, a_2, 0, 0, 0) + (0, 0, a_3, 0) + (0, 0, 0, a_4) \\ & \stackrel{(4.27),\ \text{com } n=4}{=} a_1 \cdot (1, 0, 0, 0) + a_2 \cdot (0, 1, 0, 0, 0) + a_3 \cdot (0, 0, 1, 0) + a_4 \cdot (0, 0, 0, 1) \\ & \stackrel{(6.47)}{=} a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3 + a_4 \cdot e_4, \end{aligned} \tag{6.45}$$

mostrando que qualquer vetor $u \in \mathbb{R}^4$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores

$$e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathbb{R}^4.$$

Portanto, de (6.45) e da Definição 6.3.2, teremos:

$$\mathbb{R}^4 = [e_1, e_2, e_3, e_4]. \tag{6.46}$$

Notemos, de (6.46), segue que o conjunto

$$S \doteq \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

é um conjunto finito formado por geradores de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ e assim, pela Definição 6.3.3, temos que o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ é finitamente gerado.

□

Podemos estender o Exemplo 6.3.1 acima, a seguinte situação:

Exemplo 6.3.2 *Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado. O espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ (veja o Exemplo 4.2.3) é finitamente gerado.*

Resolução:

De fato, consideremos os seguintes vetores de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} e_1 &\doteq (1\,,0\,,\cdots\,,0)\,, \\ e_2 &\doteq (0\,,1,0\,,\cdots\,,0)\,, \\ &\vdots \\ e_n &\doteq (0\,,0\,,\cdots\,,0\,,1)\,. \end{aligned} \tag{6.47}$$

Então, se

$$u \in \mathbb{R}^n\,,$$

do Exemplo 4.2.3, podemos encontrar escalares

$$a_1\,,a_2\,,\cdots\,,a_n \in \mathbb{R}\,,$$

de modo que $\quad u = (a_1\,,a_2\,,\cdots\,,a_n)\,.$ (6.48)

com isto, teremos:

$$\begin{aligned} u &\overset{(6.48)}{=} (a_1\,,a_2\,,\cdots\,,a_n) \\ &\overset{(4.26)}{=} (a_1\,,0\,,\cdots\,,0) + (0\,,a_2\,,0\,,\cdots\,,0) + \cdots + (0\,,\cdots\,,0\,,a_n) \\ &\overset{(4.27)}{=} a_1 \cdot (1\,,0\,,\cdots\,,0) + a_2 \cdot (0\,,1\,,0\,,\cdots\,,0) + \cdots + a_n \cdot (0\,,\cdots\,,0\,,1) \\ &\overset{(6.47)}{=} a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + \cdots + a_n \cdot e_n\,, \end{aligned} \tag{6.49}$$

mostrando que o vetor $u \in \mathbb{R}^n$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores $e_1\,e_2\,,\cdots\,,e_n \in \mathbb{R}^n$

Portanto, de (6.49) e da Definição 6.3.2, teremos:

$$\mathbb{R}^n = [e_1\,,e_2\,,\cdots\,,e_n]\,.$$

Portanto o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$ é finitamente gerado.

Notemos, de (6.49), segue que o conjunto

$$S \doteq \{e_1\,,e_2\,,\cdots\,,e_n\}$$

é um conjunto finito formado por geradores de $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$ e assim, pela Definição 6.3.3, temos que o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$ é finitamente gerado.

$\square$

Temos também o:

Exemplo 6.3.3 *O espaço vetorial real $(M_{2\times3}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ (veja o Exemplo 4.2.5, com $m \doteq 2$ e $n \doteq 3$)) é gerado pelas seguintes 6 matrizes de tipo 2×3:*

$$\begin{aligned} E_{11} &\doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{13} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{21} &\doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{23} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.50}$$

Em particular, o espaço vetorial real $(M_{2\times3}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ é finitamente gerado.

Resolução:

De fato, se

$$A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}),$$

do Exemplo Exemplo 4.2.5, podemos encontrar escalares

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23} \in \mathbb{R},$$

de modo que
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \tag{6.51}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} A &\overset{(6.51)}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\ &\overset{(2.8)}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{pmatrix} \\ &\overset{(2.20)}{=} a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\overset{(6.50)}{=} a_{11} \cdot E_{11} + a_{12} \cdot E_{12} + a_{13} \cdot E_{13} + a_{21} \cdot E_{21} + a_{22} \cdot E_{22} + a_{23} \cdot E_{23}, \end{aligned} \tag{6.52}$$

mostrando que a matriz $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, pode ser escrita como combinação linear das matrizes $E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Portanto, de (6.52) e da Definição 6.3.2, teremos:

$$M_{2\times 3}(\mathbb{R}) = [E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}].$$

Portanto o espaço vetorial real $(M_{2\times 3}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é finitamente gerado.

Notemos, de (6.52), segue que o conjunto

$$S \doteq \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}\}$$

é um conjunto finito formado por geradores de $(M_{2\times 3}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ e assim, pela Definição 6.3.3, temos que o espaço vetorial real $(M_{2\times 3}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é finitamente gerado.

□

Podemos estender o Exemplo 6.3.3 acima ao:

Exemplo 6.3.4 *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ fixados. O espaço vetorial real $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (veja o Exemplo 4.2.5) é gerado pelas $m \cdot n$ matrizes:*

$$E_{kl} \doteq \left(\delta_{i,j}^{k,l}\right), \quad \textit{para cada} \quad k \in \{1, 2, \cdots, m\} \quad \textit{e} \quad l \in \{1, 2, \cdots, n\}, \tag{6.53}$$

onde, para cada $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$ *e* $l \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *fixados, temos que:*

$$\delta_{i,j}^{k,l} \doteq \begin{cases} 1, & \textit{para} \quad (i,j) = (k,l) \\ 0, & \textit{para} \quad (i,j) \neq (k,l) \end{cases} . \tag{6.54}$$

Em particular, o espaço vetorial real $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *é finitamente gerado.*

Resolução:

Deixaremos a resolução como exercício para o leitor.

□

Temos também o:

Exemplo 6.3.5 *O espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(veja o Exemplo 4.2.7, com* $n \doteq 2$*) é finitamente gerado.*

Resolução:

De fato, consideremos $p_o, p_1, p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ os seguintes polinômios com coeficientes reais, de grau menor ou igual a 2:

$$p_o(x) \doteq 1, \tag{6.55}$$
$$p_1(x) \doteq x, \tag{6.56}$$
$$\text{e} \qquad p_2(x) \doteq x^2, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.57}$$

Então se

$$p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}),$$

(veja o Exemplo 4.2.7, com $n \doteq 2$) podemos encontrar escalares

$$a_o, a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$
$$\text{de modo que} \qquad p(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6.58}$$

deste modo, teremos:

$$\begin{aligned} p(x) &\overset{(6.58)}{=} a_o + a_1 x + a_2 x^2 \\ &= a_o \underbrace{1}_{\overset{(6.55)}{=} p_o(x)} + a_1 \underbrace{x}_{\overset{(6.56)}{=} p_1(x)} + a_2 \underbrace{x^2}_{\overset{(6.57)}{=} p_2(x)} \\ &= (a_o \cdot p_o + a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2)(x), \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$
$$\text{ou seja,} \qquad p = a_o \cdot p_o + a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2, \tag{6.59}$$

mostrando que o polinômio $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ pode ser escrito como combinação linear dos polinômios $p_o, p_1, p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

Portanto, de (6.52) e da Definição 6.3.2, teremos:

$$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = [p_o, p_1, p_2].$$

Notemos, de (6.59), segue que o conjunto

$$S \doteq \{p_o, p_1, p_2\}$$

é um conjunto finito formado por geradores de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ e assim, pela Definição 6.3.3, temos que o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é finitamente gerado.

□

Podemos estender o Exemplo 6.3.5 acima, a seguinte situação:

Exemplo 6.3.6 *Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado. O espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (veja o Exemplo 4.2.7) é finitamente gerado.*

Resolução:

De fato, consideremos

$$p_o, p_1, \cdots, p_n \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}),$$

os seguintes polinômios, com coeficientes reais, de grau menor ou igual a n:

$$p_o(x) \doteq 1, \tag{6.60}$$
$$p_1(x) \doteq x, \tag{6.61}$$
$$p_2(x) \doteq x^2, \tag{6.62}$$
$$\vdots,$$
$$p_n(x) \doteq x^n, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.63}$$

Então se

$$p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$$

(veja o Exemplo 4.2.7) podemos encontrar escalares

$$a_o, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R},$$

$$\text{de modo que} \quad p(x) = a_o + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6.64}$$

$$\begin{aligned}
\text{desta forma, teremos:} \quad p(x) &\overset{(6.64)}{=} a_o + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n \\
&= a_o \underbrace{1}_{\overset{(6.60)}{=} p_o(x)} + a_1 \cdot \underbrace{x}_{\overset{(6.61)}{=} p_1(x)} + \cdots + a_n \cdot \underbrace{x^n}_{\overset{(6.63)}{=} p_n(x)} \\
&= (a_o \cdot p_o + a_1 \cdot p_1 + \cdots + a_n \cdot p_n)(x), \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \quad p = a_o \cdot p_o + a_1 \cdot p_1 + \cdots + a_n \cdot p_n, \tag{6.65}$$

mostrando que o polinômio $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ pode ser escrito como combinação linear dos polinômios $p_o, p_1, \cdots, p_n \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$.

Portanto, de (6.65) e da Definição 6.3.2, teremos:

$$\mathscr{P}_n(\mathbb{R}) = [p_o, p_1, \cdots, p_n].$$

Notemos, de (6.65), segue que o conjunto

$$S \doteq \{p_o, p_1, p_2, \cdots, p_n\}$$

é um conjunto finito formado por geradores do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ e assim, pela Definição 6.3.3, temos que o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é finitamente gerado.

□

Um outro caso importante é dado pelo:

Exemplo 6.3.7 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função - veja o Exemplo 4.2.9), onde formado* $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ *denota o conjunto formado por todos os polinômios com coeficientes reais, ou seja,*

$$\mathscr{P}(\mathbb{R}) \doteq \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ função } ; p \text{ é um polinômio com coeficientes reais}\}. \tag{6.66}$$

Afirmamos que $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ **não** *é finitamente gerado.*

Resolução:

Notemos que

$$\begin{aligned} \text{se} \quad & p, q \in \mathscr{P}(\mathbb{R}), \\ \text{então} \quad & (p+q) \in \mathscr{P}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

ou seja, a operação de adição $+$, é fechada em $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Temos também que

$$\begin{aligned} \text{se} \quad & \lambda \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ p \in \mathscr{P}(\mathbb{R}), \\ \text{então} \quad & (\lambda \cdot p) \in \mathscr{P}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

ou seja, a operação de multiplicação de número real por elementos de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$, é fechada em $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Deixaremos como exercício para o leitor verificar as afiramções acima bem como verificar que $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é um espaço vetorial real, onde $+$ e $\cdot$ são as operações de $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (veja o Exemplo 4.2.9).

Note que

$$\mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R}),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, ou seja, todo polinômio, com coeficiente reais, de grau menor ou igual a n, é um polinômio, com coeficiente reais.

Suponhamos, por absurdo, que o espaço vetorial real $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é finitamente gerado, ou seja, existe um número finito de polinômios, que indicaremos por

$$\begin{aligned} & q_o, q_1, \cdots, q_m \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \\ \text{tais que} \quad & \mathscr{P}(\mathbb{R}) = [q_o, q_1, , \cdots, q_m]. \end{aligned} \tag{6.67}$$

Seja $N \in \mathbb{N}$, o grau mais alto entre os m polinômios

$$q_o, q_1, \cdots, q_m,$$

que existe pois, temos somente um número finito de polinômios na coleção acima.

Notemos que o polinômio $p \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ dado por

$$p(x) \doteq x^{N+1}, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R},$$

não poderá ser escrito como combinação linear dos polinômios

$$q_o, q_1, \cdots, q_m,$$

pois o **maior grau** dentre esse os polinômios é $\underline{N}$, que é menor que o grau do polinômio $\underline{p}$, que é $N+1$.

Assim, teríamos

$$p \notin \mathscr{P}(\mathbb{R}) \overset{(6.67)}{=} [q_o, q_1, \cdots, q_m],$$

o que seria um absurdo, pois $p \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Portanto o espaço vetorial real $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ **não** é finitamente gerado.

□

Observação 6.3.2 *Observemos que*

$$[p_o, p_1, \cdots, p_n, \cdots] = \mathscr{P}(\mathbb{R}),$$

onde, os polinômios $p_j \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, *para* $j \in \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, *são dados por:*

$$\begin{aligned} p_o(x) &\doteq 1, \\ p_1(x) &\doteq x, \\ p_2(x) &\doteq x^2, \\ &\vdots \\ p_n(x) &\doteq x^n, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R} \\ &\vdots\,. \end{aligned} \tag{6.68}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Temos agora a:

Proposição 6.3.3 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) gerado pelos vetores* $u_1, u_2, \cdots, u_n$, *isto é,*

$$V = [u_1, u_2, \cdots, u_n]. \tag{6.69}$$

Suponhamos que o vetor $\underline{u_1}$ *é uma combinação linear dos vetores*

$$\begin{aligned} &u_2, u_3, \cdots, u_n, \\ \textit{ou seja,} \quad &u_1 \in [u_2, u_3, \cdots, u_n]. \end{aligned} \tag{6.70}$$

Então o espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ *será gerado pelos vetores*

$$u_2, u_3, \cdots, u_n,$$

$$\textit{isto é,} \quad [u_2, u_3, \cdots, u_n] = [u_1, u_2, \cdots, u_n], \tag{6.71}$$

$$\textit{ou ainda,} \quad V = [u_2, u_3, \cdots, u_n]. \tag{6.72}$$

Demonstração:

Devemos mostrar que qualquer vetor $u \in V$, pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores

$$\begin{aligned} & u_2\,, u_3\,, \cdots, u_n\,, \\ \text{ou seja,} \qquad & V = [u_2\,, u_3\,, \cdots, u_n]\,. \end{aligned}$$

Notemos que se

$$u \in V = [u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n]\,,$$

pelas Definições 6.3.2 e 6.3.1, podemos encontrar escalares

$$\begin{aligned} & \alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})\,, \\ \text{de modo que} \qquad & u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n\,. \end{aligned} \tag{6.73}$$

Mas, por hipótese (veja (6.70)), temos que

$$u_1 \in [u_2\,, u_3\,, \cdots, u_n]\,,$$

isto é (veja a Definição 6.3.1), o vetor $\underline{u_1}$ é uma combinação linear dos vetores

$$u_2\,, u_3\,, \cdots, u_n\,,$$

ou seja, podemos encontrar escalares

$$\begin{aligned} & \beta_2\,, \beta_3\,, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})\,, \\ \text{de modo que} \qquad & u_1 = \beta_2 \cdot u_2 + \beta_3 \cdot u_3 + \cdots + \beta_n \cdot u_n\,. \end{aligned} \tag{6.74}$$

Logo, teremos:

$$\begin{aligned} u &\overset{(6.73)}{=} \alpha_1 \cdot \underbrace{u_1}_{\overset{(6.74)}{=} \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n \cdot u_n} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \\ &= \alpha_1 \cdot (\beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n u_n) + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \\ &\overset{(4.12),(4.10),(4.6),(4.7) \text{ e } (4.11)}{=} (\alpha_1\, \beta_2 + \alpha_2) \cdot u_2 + \cdots + (\alpha_1 \beta_n + \alpha_n) \cdot u_n\,, \end{aligned}$$

ou seja (veja a Definição 6.3.1), o vetor $\underline{u}$ pode ser escrito como como uma combinação linear dos vetores

$$\begin{aligned} & u_2\,, u_3\,, \cdots, u_n\,, \\ \text{ou ainda,} \qquad & u \in [u_2\,, u_3\,, \cdots, u_n]\,, \\ \text{isto é,} \qquad & V = [u_2\,, u_3\,, \cdots, u_n]\,, \end{aligned}$$

como queriamos mostrar.

$\square$

Observação 6.3.3 *A Proposição 6.3.3 acima, nos diz que se um espaço vetorial real (ou complexo) é gerado por um número finito de vetores e um desses vetores pode ser obtido como combinação linear dos restantes, então o espaço vetorial real (ou complexo), dado incialmente, poderá ser gerado pelos vetores restantes, retirando-se o vetor que pode ser obtido como combinação linear dos outros da lista inicial.*

Apliquemos a Proposição 6.3.3 acima, ao:

Exemplo 6.3.8 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *(veja o Exemplo 4.2.3, com* $n = 4$*) e os seguintes seus subespaços vetoriais*

$$U \doteq \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x - y + t + z = 0\} \tag{6.75}$$

$$e \qquad W \doteq \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x + y - t + z = 0\} . \tag{6.76}$$

Encontre um conjunto finito de geradores para os seguintes subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$*:*

$$U, \quad W, \quad U \cap W \quad e \quad U + W .$$

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que os conjunto U e W são subespaços vetoriais de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$.

Dos fatos acima e das Proposições 5.3.1 e 5.3.2, segue que os conjuntos $U \cap W$ e $U + W$ são subespaços vetoriais de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$.

Encontremos geradores para cada um dos subespaços vetoriais acima:

1. Para o subespaço vetorial U:

   Notemos que

$$\begin{aligned} & u \doteq (x, y, z, t) \in U , \\ \text{se, e somente, de (6.75):} \quad & x - y + t + z = 0 \\ \text{ou, equivalentemente,} \quad & y = x + z + t . \end{aligned} \tag{6.77}$$

   Portanto,

$$u \doteq (x, y, z, t) \in U ,$$

   é equivalente à:

$$\begin{aligned} u &= (x, y, z, t) \\ &= (x, \underbrace{y}_{\overset{(6.81)}{=} x+z+t}, z, t) \\ &= (x, x + z + t, z, t) \\ &\overset{(4.26), \text{ com } n=4}{=} (x, x, 0, 0) + (0, z, z, 0) + (0, t, 0, t) \\ &\overset{(4.27), \text{ com } n=4}{=} x \cdot \underbrace{(1, 1, 0, 0)}_{\doteq u_1} + z \cdot \underbrace{(0, 1, 1, 0)}_{\doteq u_2} + t \cdot \underbrace{(0, 1, 0, 1)}_{\doteq u_3} , \end{aligned} \tag{6.78}$$

ou seja, o vetor $u \in U$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores

$$u_1\,,u_2\,,u_3\,,$$

os escalares serão os números reais $x\,,z\,,t \in \mathbb{R}$, respectivamente.

Portanto, de (6.78), teremos:

$$\begin{aligned} U &= [u_1\,,u_2\,,u_3] \\ &= [(1\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,1\,,1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)]\,. \end{aligned} \tag{6.79}$$

Logo, de (6.79), o conjunto

$$\begin{aligned} S &\doteq \{u_1\,,u_2\,,u_3\} \\ &= \{(1\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,1\,,1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\}\,, \end{aligned} \tag{6.80}$$

é formado por geradores do o subsepaço vetorial U, mostrando que o subsepaço vetorial U é finitamente gerado.

2. Para o subespaço vetorial W:

Notemos que se

$$\begin{aligned} & w \doteq (x\,,y\,,z\,,t) \in W\,, \\ \text{se, e somente se, de (6.76):} \quad & x + y - t + z = 0 \\ \text{ou, equivalentemente,} \quad & t = x + y + z\,. \end{aligned} \tag{6.81}$$

Portanto,

$$w = (x\,,y\,,z\,,t) \in W\,,$$

é equivalente à:

$$\begin{aligned} w &= (x\,,y\,,z\,,t) \\ &= (x\,,y\,,z\,,\underbrace{t}_{\overset{(6.81)}{=}x+y+z}) \\ &= (x\,,y\,,z\,,x+y+z) \\ &\overset{(4.26),\ \text{com } n=4}{=} (x\,,0\,,0\,,x) + (0\,,y\,,0\,,y) + (0\,,0\,,z\,,z) \\ &\overset{(4.27),\ \text{com } n=4}{=} x \cdot \underbrace{(1\,,0\,,0\,,1)}_{\doteq w_1} + y \cdot \underbrace{(0\,,1\,,0\,,1)}_{\doteq w_2} + z \cdot \underbrace{(0\,,0\,,1\,,1)}_{\doteq w_3}, \end{aligned} \tag{6.82}$$

ou seja, o vetor $u \in U$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores

$$w_1\,,w_2\,,w_3\,,$$

onde os escalares serão $x\,,y\,,z \in \mathbb{R}$, respectivamente.

Portanto, de (6.82), teremos:

$$\begin{aligned} W &= [w_1\,,w_2\,,w_3] \\ &= [(1\,,0\,,0\,,1)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\,,(0\,,0\,,1\,,1)]\,. \end{aligned} \tag{6.83}$$

Logo, de (6.83), o conjunto

$$\begin{aligned} S &\doteq \{w_1\,,w_2\,,w_3\} \\ &= \{(1\,,0\,,0\,,1)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\,,(0\,,0\,,1\,,1)\}\,, \end{aligned} \tag{6.84}$$

é formado por geradores do o subsepaço vetorial W, mostrando que o subsepaço vetorial W é finitamente gerado.

3. Para o subespaço vetorial $U \cap W$:

Notemos que

$$\begin{aligned} && v &\doteq (x\,,y\,,z\,,t) \in U \cap W\,, \\ \text{se, e somente se,} && v &= (x\,,y\,,z\,,t) \in U \\ \text{e} && v &= (x\,,y\,,z\,,t) \in W\,, \end{aligned} \tag{6.85}$$

ou seja, de (6.75) e (6.76), deveremos ter que resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x - y + t + z = 0 \\ x + y - t + z = 0, \end{cases} \,,$$

cuja solução é (será deixado como exercício para o leitor): $$\begin{cases} z = -x \\ t = y \end{cases} \,, \tag{6.86}$$

para cada $x\,,y \in \mathbb{R}$.

Deste modo, teremos:

$$\begin{aligned} v &= (x\,,y\,,z\,,t) \\ &(x\,,y\,,\underbrace{z}_{\overset{(6.86)}{=}-x}\,,\underbrace{t}_{\overset{(6.86)}{=}y}) \\ &= (x\,,y\,,-x\,,y) \\ &\overset{(4.26),\ \text{com } n=4}{=} (x\,,0\,,-x\,,0) + (0\,,y\,,0\,,y) \\ &\overset{(4.27),\ \text{com } n=4}{=} x \cdot \underbrace{(1\,,0\,,-1\,,0)}_{\doteq v_1} + y \cdot \underbrace{(0\,,1\,,0\,,1)}_{\doteq v_2} \end{aligned} \tag{6.87}$$

ou seja, o vetor $u \in U$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores

$$v_1\,,v_2\,,$$

onde os escalares serão $x\,,y \in \mathbb{R}$, respectivamente.

Portanto, de (6.87), teremos:

$$\begin{aligned} U \cap W &= [v_1\,, v_2] \\ &= [(1\,,0\,,-1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)]\,. \end{aligned} \tag{6.88}$$

Logo, de (6.88), o conjunto

$$\begin{aligned} S &\doteq \{v_1\,, v_2\} \\ &= \{(1\,,0\,,-1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1))\}\,, \end{aligned} \tag{6.89}$$

é formado por geradores do o subsepaço vetorial $U \cap W$, mostrando que o subsepaço vetorial $U \cap W$ é finitamente gerado.

4. Para o subespaço vetorial $U + W$:

Do item 4. da Proposição (6.3.2) segue que

$$\begin{aligned} & U = [U] \\ \text{e} \quad & W = [W]\,, \end{aligned}$$

pois U e W são subespaços vetoriais do espaçco vetorial real $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$.

Além disso, temos:

$$\begin{aligned} U + W &\overset{U \overset{(6.79)}{=} [u_1\,,u_2\,,u_3] \text{ e } W \overset{(6.83)}{=} [w_1\,,w_2\,,w_3]}{=} [u_1\,, u_2\,, u_3] + [w_1\,, w_2\,, w_3] \\ &\overset{\text{item 5. da Proposição 6.3.2}}{=} [u_1\,, u_2\,, u_3\,, w_1\,, w_2\,, w_3]\,. \end{aligned} \tag{6.90}$$

Com isto teremos que:

$$\begin{aligned} U + W &\overset{(6.90),(6.81) \text{ e } (6.83),(6.82)}{=} [(1\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,1\,,1\,,0)\,,\underbrace{(0\,,1\,,0\,,1)}\,, \\ &\qquad (1\,,0\,,0\,,1)\,,\underbrace{(0\,,1\,,0\,,1)}\,,(0\,,0\,,1\,,1)] \\ &= [(1\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,1\,,1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\,,(1\,,0\,,0\,,1)\,,(0\,,0\,,1\,,1)]\,. \end{aligned} \tag{6.91}$$

Logo, de (6.83), o conjunto

$$\begin{aligned} S &\doteq \{u_1\,, u_2\,, u_3\,, w_1\,, w_3\} \\ &= \{(1\,,1\,,0\,,0)\,,(1\,,0\,,0\,,1)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\,,(0\,,0\,,1\,,1)\}\,, \end{aligned} \tag{6.92}$$

é formado por geradores do o subsepaço vetorial $U + W$, mostrando que o subsepaço vetorial $U + W$ é finitamente gerado.

□

Observação 6.3.4

1. *Observemos que no Exemplo 6.3.8 acima, temos que:*

$$(1,1,0,0) = (1,0,0,1) + (0,1,1,0) - (0,0,1,1)\,.$$

Portanto, pela Proposição 6.3.3, segue que podemos excluir o vetor

$$(1\,,1\,,0\,,0)$$

da lista dos geradores do subespaço vetorial real $U + W$*, isto é, do conjunto* S*, dado por (6.92), que os vetores restantes continuarão gerando o subespaço vetorial* $U + W$*, isto é:*

$$U + V = [(0\,,1\,,1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\,,(1\,,0\,,0\,,1)\,,(0\,,0\,,1\,,1)]\,. \tag{6.93}$$

2. *Veremos mais adiante que este será o número mínimo de geradores para o subespaço vetorial* $U+V$*, ou seja,* **não** *podemos retirar mais nenhum vetor da lista formada pelos quatro vetores em (6.93) e ainda continuar gerando o subsepaço vetorial* $U + V$*.*

6.4 Exercícios

Exercício 6.4.1 *Sejam* $u_1 \doteq (1\,,3\,,5)$ *e* $u_2 \doteq (2\,,4\,,-3)$ *vetores do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$*. Determine os valores de* $k \in \mathbb{R}$*, para os quais o vetor* $v \doteq (2\,,7\,,k)$ *possa ser escrito como combinação linear dos vetores* u_1 *e* u_2*.*

Exercício 6.4.2 *Para cada um dos subconjuntos* $S \subseteq V$ *abaixo, onde* $(V\,,+\,,\cdot)$ *é o espaço vetorial indicado, encontrar o subespaço gerado por* S*, isto é,* $[S]$*.*

1. $S \doteq \{(1\,,0)\,,(2\,,-1)\}$ *e* $V \doteq \mathbb{R}^2$*, munido das operações usuais.*

2. $S \doteq \{(1\,,1\,,1)\,,(2\,,2\,,0)\}$ *e* $V \doteq \mathbb{R}^3$*, munido das operações usuais.*

3. $S \doteq \{p_o\,,p_1\,,p_2\,,p_3\}$ *e* $V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$*, munido das operações usuais, onde*

$$p_o(x) \doteq 1\,, \quad p_1(x) \doteq x\,, \quad p_2(x) \doteq x^2 \quad e \quad p_3(x) \doteq 1 + x^3\,, \ \text{para } x \in \mathbb{R}\,.$$

4. $S \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ *e* $V \doteq M_2(\mathbb{R})$*, munido das operações usuais*

Exercício 6.4.3 *Mostrar que os conjuntos* $\{f_1\,,f_2\,,f_3\}$ *e* $\{g_1\,,g_2\,,g_3\}$ *geram o mesmo subespaço vetorial do espaço vetorial* $(\mathcal{C}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$*, onde*

$$\begin{aligned} & f_1(x) \doteq \operatorname{sen}^2(x)\,, \quad f_2(x) \doteq \cos^2(x)\,, \quad f_3(x) \doteq \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,, \\ e \quad & g_1(x) \doteq 1\,, \quad g_2(x) \doteq \operatorname{sen}(2x)\,, \quad g_3(x) \doteq \cos(2x)\,, \ \text{para } x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Exercício 6.4.4

1. *Mostre que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, munido das operações usuais de adição de números complexos e multiplicação de número real por número complexo, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.*

2. *Mostre que os números complexos $z_1 \doteq 2+3\,i$ e $z_2 \doteq 1-2\,i$, geram o espaço vetorial* **real** $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot)$.

3. *Mostre que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, munido das operações usuais de adição de números complexos e multiplicação de números complexos, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.*

4. *Mostre que o número complexo $z_1 \doteq 1$, gera o espaço vetorial* **complexo** $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot)$.

Exercício 6.4.5 *Verificar se as seguintes matrizes $A_1\,,A_2\,,A_3\,,A_4 \in M_2(\mathbb{R})$, geram o espaço vetorial $(M_2(\mathbb{R})\,,+\,\cdot)$, onde:*

$$A_1 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 6.4.6 *Mostre que os polinômios $p_1\,,p_2\,,p_3\,,p_4$ geram o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, onde:*

$$p_1(x) \doteq 1\,, \quad p_2(x) \doteq 1-x\,, \quad p_3(x) \doteq (1-x)^2\,, \quad p_4(x) \doteq (1-x)^3\,, \ \textit{para } x \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício 6.4.7 *Considere os seguintes vetores do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$; $u_1 \doteq (-1\,,0\,,1)$ e $u_2 \doteq (3\,,4\,,-2)$. Determine um sistema de equações lineares homogêneas para o qual o conjunto solução seja exatamente, o subespaço gerado pelos vetores $u_1\,,u_2$.*

Exercício 6.4.8 *Determine os geradores para cada um dos seguintes subespaços do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$:*

1. $U \doteq \{\,(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x-2y=0\,\}$. *Represente-o geometricamente.*

2. $V \doteq \{\,(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x+z=0 \text{ e } x-2y=0\,\}$. *Represente-o geometricamente.*

3. $W \doteq \{\,(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x+2y-3z=0\,\}$. *Represente-o geometricamente.*

4. $U \cap V$. *Represente-o geometricamente.*

5. $V + W$. *Represente-o geometricamente.*

Exercício 6.4.9 *Em cada um dos itens abaixo encontrar um subconjunto finito S, que gere o subespaço vetorial W do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$ indicado.*

1. $W \doteq \{(x\,,y\,,z) \in V\,;\, x-2y=0\}$ *e* $V \doteq \mathbb{R}^3$, *munido das operações usuais.*

2. $W \doteq \{p \in V\,;\, p'(x)=0\,,$ *para* $x \in \mathbb{R}\}$ *e* $V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais.*

3. $W \doteq \{A \in V\,;\, A^t = A\}$ *e* $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais.*

4. *Sejam* $A \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $W \doteq \{X \in V\,;\, A \cdot X = 0\}$ *e* $V \doteq M_{3\times 1}(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais.*

Exercício 6.4.10 *Encontrar, em cada um dos itens abaixo, o subconjunto* S *do espaço vetorial real* $(V\,,+\,,\cdot)$, *que geram os subespaços vetoriais* U, W, $U \cap W$ *e* $U + W$.

1. $U \doteq [(1\,,0\,,0)\,,(1\,,1\,,1)]$, $W \doteq [(0\,,1\,,0)\,,(0\,,0\,,1)]$, *e* $V \doteq \mathbb{R}^3$, *munido das operações usuais.*

2. $U \doteq \left\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x + y = 0\right\}$, $W \doteq [(1\,,3\,,0)\,,(0\,,4\,,6)]$, *e* $V \doteq \mathbb{R}^3$, *munido das operações usuais.*

3. $U \doteq \{A \in M_2(\mathbb{R})\,;\, A^t = A\}$, $W \doteq \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$ *e* $V = M_2(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais.*

4. $U = [p\,,q\,,r]$, $W \doteq [s\,,u\,,v]$ *e* $V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais, onde*

$$p(x) \doteq x^3 + 4\,x^2 - x + 3\,, \quad q(t) \doteq x^3 + 5\,x^2 + 5\,, \quad r(x) \doteq 3\,x^3\,,$$
$$e \qquad s(x) \doteq x^3 + 4\,x^2\,, \quad u(x) \doteq x - 1\,, \quad v(x) \doteq 1\,, \ \textit{para}\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício 6.4.11 *Obtenha o subconjunto formado por vetores do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, *que geram os seguintes subespaços;*

1. $U \doteq \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,;\, p(1) = p(0) = 0\}$;

2. $W \doteq \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,;\, p''(x) = 0\,,\ \textit{para todo}\ x \in \mathbb{R}\}$;

3. $U \cap W$.

Exercício 6.4.12 *Seja* $(V\,,+\,,\cdot)$ *o espaço vetorial formado pela funções reais, de uma variável real (isto é,* $V \doteq \mathcal{F}(\mathbb{R})$*).*

Mostre que $f\,,g \in [u\,,v] \subseteq V$ *onde*

$$f(x) \doteq 1\,, \quad g(x) \doteq \cos(2\,x)\,, \quad u(x) \doteq \operatorname{sen}^2(x)\,, \quad v(x) \doteq \cos^2(x)\,, \ \textit{para}\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício 6.4.13 *Verifique se o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *é gerado pelo conjunto* $S \doteq \{p\,,q\,,r\}$, *onde:*

$$p(x) \doteq 1 + x\,, \quad q(x) \doteq x + 2\,x^2 \quad e \quad r(x) \doteq 1 - x^2\,, \ \textit{para}\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício 6.4.14 *Sejam* $M \neq O_3$ *uma matriz simétrica e* $N \neq O_3$ *uma matriz anti-simétrica pertencentes ao espaço vetorial real* $(M_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$. *Mostre que as matrizes* M *e* N *são L.I. no espaço vetorial real* $(M_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Exercício 6.4.15 *Determinar* $m, n \in \mathbb{R}$, *para que os subconjuntos de vetores do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *dados abaixo, sejam L.I. .*

1. $\{(3, 5m, 1), (2, 0, 4), (1, m, 3)\}$.
2. $\{(1, 3, 5), (2, m+1, 10)\}$.
3. $\{(m, 2, n), (3, m+n, m-1)\}$.

Exercício 6.4.16 *Mostre que o conjunto de vetores* $A \doteq \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ *do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *é L.D. e que qualquer subconjunto do conjuto A, formado por três elementos é L.I. no espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$, *onde*

$$q_1(x) \doteq 1, \quad q_2(x) \doteq x, \quad q_3(x) \doteq x^2, \quad q_4(x) \doteq 2 + x + 2x^2, \ \textit{para } x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 6.4.17 *Mostrar que se o subconjunto de vetores* $\{u, v, w\}$ *do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$ *for L.I., o mesmo acontecerá com o subconjunto* $\{u+v, u+w, v+w\}$.

Exercício 6.4.18 *Verifique, em cada um dos itens abaixo, se o subconjunto S do espaço vetorial* $(V, +, \cdot)$ *é L.I. ou L.D. .*

1. $S \doteq \{(1, 2), (-3, 1)\}$ *e* $V \doteq \mathbb{R}^2$, *munido das operações usuais.*
2. $S \doteq \{p, q\}$ *e* $V \doteq \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais, onde*
$$p(x) \doteq 1 + x - x^2, \quad q(t) \doteq 2 + 5x - 9x^2, \ \textit{para } x \in \mathbb{R}.$$
3. $S \doteq \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais.*
4. $S \doteq \{(1, 2, 2, -3), (-1, 4, -2, 0)\}$ *e* $V \doteq \mathbb{R}^4$, *munido das operações usuais*
5. $S \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *e* $V \doteq M_3(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais.*
6. $S \doteq \{f, g, h\}$ *e* $V \doteq C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, *munido das operações usuais, onde*
$$f(x) \doteq 1, \quad g(x) \doteq \text{sen}(x), \quad h(x) \doteq \cos(x), \ \textit{para } x \in \mathbb{R}.$$
7. $S \doteq \{f, g, h\}$ *e* $V \doteq \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, *munido das operações usuais, onde*
$$f(x) \doteq 1, \quad g(x) \doteq \text{sen}^2(x), \quad h(x) \doteq \cos^2(x), \ \textit{para } x \in \mathbb{R}.$$
8. $S \doteq \{f, g\}$ *e* $V \doteq \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, *munido das operações usuais, onde*
$$f(x) \doteq e^x, \quad g(x) \doteq e^{-x}, \ \textit{para } x \in \mathbb{R}.$$

9. $S \doteq \{f, g, h\}$ *e* $V \doteq \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, *munido das operações usuais, onde*

$$f(x) \doteq x\,e^x, \quad g(x) \doteq x, \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 6.4.19 *Seja* $S \doteq \{u, v, w\}$ *um conjunto L.I. no espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$. *Verifique se os conjuntos abaixo são L.I. ou L.D., justificando a resposta.*

(a) $S_1 \doteq \{u, u+v, u+v+w\}$.

(b) $S_2 \doteq \{u-v, v-w, w-u\}$.

(c) $S_3 \doteq \{u+v, u+v+w, w\}$.

Exercício 6.4.20 *Sejam* $f, g \in \mathscr{C}^1((a, b); \mathbb{R})$. *Mostre que, se existir* $x_o \in (a, b)$, *tal que*

$$f(x_o)\,g'(x_o) \neq f'(x_o)\,g(x_o),$$

então as funções f *e* g *são L.I. . no espaço vetorial real* $(\mathscr{C}^1((a, b); \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Exercício 6.4.21 *Sejam* $u_1 \doteq (1, 3, 5)$ *e* $u_2 \doteq (2, 4, -3)$ *vetores do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. *Determine os valores de* $k \in \mathbb{R}$, *para os quais o vetor* $v \doteq (2, 7, k)$ *possa ser escrito como combinação linear dos vetores* u_1 *e* u_2.

Exercício 6.4.22 *Sejam* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *e* $u_1, u_2, \ldots, u_r$ *vetores pertencentes ao espaço vetorial real* $(M_{n\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$. *Mostre que, se os vetores coluna* $A\,u_1, Au_2, \cdots, Au_r$ *são vetores L.I. , então os vetores* $u_1, u_2, \cdots, u_r$ *também serão L.I. no espaço vetorial real* $(M_{n\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Capítulo 7

Dependência linear em espaços vetoriais

7.1 Introdução

Neste capítulo abordaremos, enter outras, a questão citada no item 2. da Observação 6.3.4, do capítulo 6 anterior.

7.2 Definições e exemplos

No capítulo 6 anterior, ao estudarmos os geradores de um espaço vetorial real (ou complexo) finitamente gerado, procuramos encontrar um determinado conjunto finito de vetores do mesmo, de modo que qualquer vetor, do espaço em questão, pudesse ser escrito como combinação linear dos vetores deste conjunto.

Por exemplo, se os vetores

$$v \quad \text{e} \quad w\,,$$

geram o espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$ então, para qualquer $u \in V$, será possível encontrar escalares

$$\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\ (\text{ou } \mathbb{C})\,,$$

$$\text{tais que} \qquad u = \alpha \cdot v + \beta \cdot w\,, \tag{7.1}$$

$$\text{ou, equivalentemente (veja (4.91)),} \qquad \alpha \cdot v + \beta \cdot w - 1 \cdot u = O\,. \tag{7.2}$$

Notemos que a combinação linear acima é igual ao vetor nulo, embora **nem todos** os escalares que aparecem na sua formação sejam nulos (o coeficiente do vetor u é igual a $-1 \neq 0$).

Vejamos agora uma outra situação, a saber: será sempre possível encontrar escalares

$$\alpha\,,\beta\,,\gamma \in \mathbb{R}\,,$$

não todos NECESSARIAMENTE nulos, de modo que, no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ (veja o Exemplo 4.2.3, com $n = 3$), tenhamos

$$\alpha \cdot (1\,,0\,,0) + \beta \cdot (0\,,1\,,0) + \gamma \cdot (0\,,0\,,1) = (0\,,0\,,0)\,? \tag{7.3}$$

É fácil verificar que a resposta, neste caso, é **não**.

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar essa afirmação.

Isto, como mostra (7.3), significa, como veremos, que **não** será possível escrever um dos vetores, do espaço vetorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, como combinação linear dos outros dois restantes, independente de quem sejam esses dois vetores escolhidos.

Isto contrasta com o que ocorre com os vetores

$$u, \quad v \quad \text{e} \quad w$$

que satisfazem (7.1) ou, equivalentemente (7.2).

Em um certo sentido, os vetores que satisfazem (7.1), ou, equivalentemente (7.2), guardam uma certa *"dependência"* entre um e outro, enquanto no caso (7.3), os três vetores são, em certo sentido, *"independentes"*.

Vejamos, com as definições que se seguem, como podemos tornar as ideias abordas acima mais precisas.

Definição 7.2.1 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) e*

$$u_1, u_2, \cdots, u_n \in V.$$

Diremos que os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são **linearmente independentes,** *no espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$ *(ou, abreviadamente* **L.I.***), se a combinação linear*

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O \tag{7.4}$$

ocorrerá **somente** *quando os escalares*

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{)}$$

forem todos **necessariamente** *nulos, isto é, se, e somente se,*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0. \tag{7.5}$$

Observação 7.2.1

1. *Na Definição 7.2.1 acima, se os vetores vetores*

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são L.I., em $(V, +, \cdot)$*, diremos que o conjunto*

$$S \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

é L.I. em $(V, +, \cdot)$.

2. *Notemos que*

$$\begin{aligned} \textit{se} \qquad & \alpha_1 = \alpha_2 \cdots = \alpha_n = 0\,, \\ \textit{então, de (4.82) e (4.8), segue que:} \qquad & \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O. \end{aligned} \tag{7.6}$$

3. *Porém, a recíproca nem sempre é válida, isto é, podemos ter uma coleção finita de vetores,*

$$v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_n$$

de um espaço vetorial real (ou complexo) e escalares

$$\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots\,, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})\,,$$

não todos necessariamente nulos, *de tal modo que*

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O\,. \tag{7.7}$$

Como exemplo desta situação, consideremos no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2\,, +\,, \cdot)$ *(veja o Exemplo 4.2.3, com* $n = 2$*) os vetores*

$$\begin{aligned} & v_1 \doteq (1\,, 1) \\ \textit{e} \qquad & v_2 \doteq (-1\,, -1). \end{aligned}$$

Neste caso, temos que:

$$\begin{aligned} O & \overset{(4.28),\ \textit{com}\ n=2}{=} (0\,, 0) \\ & \overset{(4.26)\ \textit{e}\ (4.26),\ \textit{com}\ n=2}{=} 1 \cdot (1\,, 1) + 1 \cdot (-1\,, -1) \\ & = \underbrace{1}_{\doteq \alpha_1} \cdot v_1 + \underbrace{1}_{\doteq \alpha_2} \cdot v_2\,, \end{aligned}$$

mostrando que existem escalares

$$\alpha_1\,, \alpha_2 \in \mathbb{R}\,,$$

não todos **necessariamente** *nulos (no caso ambos são iguais a* 1*), de modo que (7.7) se verifica.*

4. *A noção de independência linear para os vetores*

$$u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n$$

em um espaço vetorial real (ou complexo), introduzida na Definição 7.2.1 acima, é equivalente a dizer que se podemos encontrar

$$\alpha_{i_o} \neq 0\,, \qquad \textit{para algum} \quad i_o \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}\,,$$

então, **necessariamente**, *deveremos ter*

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \neq O\,,$$

independente dos escalares

$$\alpha_1\,,\alpha_2 \cdots\,,\alpha_{i_o-1}\,,\alpha_{i_o+1}\,,\cdots\,,\alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})$$

escolhidos, ou ainda, podemos escrever o vetor nulo

$$O \in V$$

de uma, **única**, *maneira como combinação linear dos vetores*

$$u_1\,,u_2 \cdots\,,u_n\,,$$

a saber:

$$O = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_n\,.$$

Podemos também introduzir a:

Definição 7.2.2 *Sejam* $(V\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) e*

$$u_1\,,u_2 \cdots\,,u_n \in V\,.$$

Dizemos que os vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n$$

são ditos **linearmente dependentes** *no espaço vetorial real (ou complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$ *(ou, abreviadamente,* **L.D.***), se os vetores* **não** *forem linearmente independentes no espaço vetorial real (ou complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Observação 7.2.2

1. *Na Definição 7.2.2 acima, se os vetores vetores*

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n$$

são L.D., no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$*, diremos que o conjunto*

$$S \doteq \{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\}$$

é L.D., no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$.

2. *A Definição 7.2.2, de dependência linear acima, para os vetores*

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n$$

no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$*, é equivalente a dizer que é possível encontrar números reais (ou complexos)*

$$\alpha_1\,,\alpha_2\,,\cdots\,,\alpha_n\,,$$

não todos nulos, *de modo que*

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O\,,$$

ou seja, podemos escrever o vetor nulo $O \in V$ *de, pelo menos, dois modos diferentes, a saber:*

$$\begin{aligned} & 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_n = O \\ e \qquad & \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O\,. \end{aligned}$$

Isto será uma situação geral, como veremos amis adiante.

Temos agora a:

Proposição 7.2.1 *Sejam* $(V\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) e*

$$u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n \in V\,.$$

Os vetores

$$O\,, u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n$$

são vetores L.D., no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, *onde* O *é vetor nulo do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Demonstração:

De fato, basta verificar que

$$\underbrace{1}_{\doteq\alpha} \cdot O + \underbrace{0}_{\doteq\alpha_1} \cdot u_1 + \cdots + \underbrace{0}_{\doteq\alpha_n} \cdot u_n = 1 \cdot O + 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_n \overset{(4.82)\text{ e }(4.8)}{=} O\,,$$

ou seja, existem escalares

$$\alpha\,, \alpha_1\,, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})\,,$$

não todos nulos (pois $\alpha = 1$), de modo que

$$\alpha \cdot O + \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O\,,$$

mostrando, pela Definição 7.2.2, que os vetores

$$O\,, u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n$$

são de vetores L.D. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, completando a demonstração do resultado.

□

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 7.2.1 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *(veja o Exemplo 4.2.3, com* $n = 3$*).*

Mostre que os vetores

$$(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$$

são linearmente independentes no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *.*

Resolução:

Para tanto, precisamos encontrar todas as possíveis soluções da equação vetorial

$$\alpha \cdot (1,1,1) + \beta \cdot (1,1,0) + \gamma \cdot (1,0,0) = (0,0,0), \tag{7.8}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}(0,0,0) &\overset{(7.8),(4.27),\text{ com } n=3}{=} (\alpha,\alpha,\alpha) + (\beta,\beta,0) + (\gamma,0,0) \\ &\overset{(4.26),\text{ com } n=3}{=} (\alpha+\beta+\gamma,\, \alpha+\beta,\, \alpha).\end{aligned} \tag{7.9}$$

Isto equivale a resolver o sistema linear

$$\begin{cases}\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \gamma = 0\end{cases},$$

que possui uma <u>única</u> solução, a saber :

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para leitor.

Logo, pela Definição 7.2.1, segue que os vetores

$$(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$$

são linearmente independentes no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, completando a resolução. $\square$

Tratemos também do:

Exemplo 7.2.2 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *(veja o Exemplo 4.2.3, com* $n = 3$*).*

Tomemos os vetores $u_1, u_2, u_3 \in (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$*, dados por*

$$u_1 \doteq (x_1, y_1, z_1), \quad u_2 \doteq (x_2, y_2, z_2) \quad e \quad u_3 \doteq (x_3, y_3, z_3). \tag{7.10}$$

Encontre uma <u>**condição necessária e suficiente**</u> *para que os vetores*

$$u_1,\ u_2,\ u_3,$$

sejam linearmente independentes no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *.*

Resolução:

Observemos que, pela Definição 7.2.1, os vetores

$$u_1\,,\ u_2\,,\ u_3$$

serão L.I., em $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$, se, e somente se, a equação vetorial

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 = O\,, \tag{7.11}$$

apresentar como <u>**única**</u> solução, os escalares

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0\,. \tag{7.12}$$

Observemos também que

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 &\overset{(7.12),(4.27),\ \text{com } n=3}{=} \alpha_1 \cdot (x_1\,, y_1\,, z_1) + \alpha_2 \cdot (x_2\,, y_2\,, z_2) + \alpha_3 \cdot (x_3\,, y_3\,, z_3)\\
&= (\alpha_1\, x_1\,, \alpha_1\, y_1\,, \alpha_1\, z_1) + (\alpha_2\, x_2\,, \alpha_2\, y_2\,, \alpha_2\, z_2) + (\alpha_3\, x_3\,, \alpha_3\, y_3\,, \alpha_3\, z_3)\\
&\overset{(7.12),(4.26),\ \text{com } n=3}{=} (\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2 + \alpha_3\, x_3\,, \alpha_1\, y_1 + \alpha_2\, y_2 + \alpha_3\, y_3\,, \alpha_1\, z_1 + \alpha_2\, z_2 + \alpha_3\, z_3)\,,
\end{aligned}$$

que é equivalente ao sistema linear homogêneo, de três equações a três incógnitas (que são os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$):

$$\begin{cases} \alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2 + \alpha_3\, x_3 = 0 \\ \alpha_1\, y_1 + \alpha_2\, y_2 + \alpha_3\, y_3 = 0 \\ \alpha_1\, z_1 + \alpha_2\, z_2 + \alpha_3\, z_3 = 0 \end{cases}. \tag{7.13}$$

Logo, para que a equação vetorial (7.11) possua somente a solução trivial (7.12), é necessário e suficiente, que o sistema linear (7.13) só admita a solução trivial (7.12).

Mas isto, pelo Corolário 3.7.1, é equivalente que a dizer que a matriz dos coeficientes do sistema linear (7.13), isto é, a matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

possua determinante diferente de zero (veja o Capítulo 3).

Note que as colunas desta matriz são formadas pelas entradas que compõem os vetores

$$u_1\,, \quad u_2 \quad \text{e} \quad u_3$$

em (7.10), completando a resolução.

□

Observação 7.2.3 *O mesmo resultado vale se colocarmos os coeficientes dos vetores*

$$u_1\,, \quad u_2 \quad e \quad u_3$$

como as linhas de uma matriz. Por quê? justifique sua resposta.

Deixaremos como exercício para o leitor a extensão do Exemplo 7.2.2 acima, a saber:

Exercício 7.2.1 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$*(veja o Exemplo 4.2.3).*

Enuncie e demonstre um resultado análogo ao Exemplo 7.2.2 acima, para uma coleção

$$u_1\,,\cdots,u_k$$

de vetores do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$*, onde* $k \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$ *está fixado.*

Temos também o:

Exemplo 7.2.3 *Consideremos o espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *(veja o Exemplo 4.2.5).*

Verifique se as matrizes

$$u_1 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\;,\; u_2 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\;,\; u_3 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.14}$$

de $M_2(\mathbb{R})$*, são linearmente independentes no espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$*.*

Resolução:

Para isto, precisamos estudar todas as possíveis soluções

$$\alpha_1\,,\alpha_2\,,\alpha_3 \in \mathbb{R}$$

da equação vetorial:

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 = O_{22}\,, \tag{7.15}$$

onde O_{22}, denota a matriz nula de $M_2(\mathbb{R})$, ou, equivalentemente, encontrar todas as possíveis soluções da equação matricial

$$\underbrace{\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\overset{(2.21)\text{ e }(2.8)}{=} \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_2+\alpha_3 \\ 0 & \alpha_1+\alpha_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que é equivalente a equação matricial

$$\begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_2+\alpha_3 \\ 0 & \alpha_1+\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.16}$$

ou ainda, (veja (2.6)) equivalente ao sistema linear de quatro equações a três incógnitas (a saber, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \tag{7.17}$$

que possui soluções do tipo

$$(\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3) = (\alpha_1 , -\alpha_1 , \alpha_1)$$

para cada $\alpha_1 \in \mathbb{R}$.

A demonstração desta úlitma afirmação será deixada como exercício para o leitor.

Logo, escolhendo-se

$$\alpha_1 \doteq 1 ,$$

teremos que

$$\alpha_2 = -1 \quad \text{e} \quad \alpha_3 = 1 ,$$

serão soluções (não identicamente nulas) do sistema linear (7.17) ou, equivalentemente, da equação vetorial (7.15).

Dessa forma, pela Definição 7.2.2, segue que os vetores

$$u_1 , \quad u_2 \quad \text{e} \quad u_3$$

será linearmente dependente no espaço vetorial real $(M_2(\mathbb{R}) , + , \cdot)$, completando a resolução.

□

Observação 7.2.4 *Um outro modo de tratar o Exemplo 7.2.3 acima, é observar que*

$$u_2 = u_1 + u_3 . \tag{7.18}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Notemos que a identidade 7.18 acima é equivalente a escrever

$$1 \cdot u_1 + (-1) \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 = O ,$$

que, pela Definição 7.2.2, é o mesmo que dizer que os vetores

$$u_1 , \; u_2 \quad e \quad u_3$$

são L.D. no espaço vetorial real $(M_2(\mathbb{R}) , + , \cdot)$.

Temos também o:

Exemplo 7.2.4 *Consideremos o espaço vetorial real* $\left(\mathscr{C}^1(\mathbb{R} ; \mathbb{R}) , + , \cdot\right)$ *(veja o Exemplo 4.2.13, com* $k \doteq 1$*).*

Verifique se as funções $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$ *são L.D., no espaço vetorial real* $\left(\mathscr{C}^1(\mathbb{R} ; \mathbb{R}) , + , \cdot\right)$*, onde*

$$f(x) \doteq \cos(x) \tag{7.19}$$

$$e \qquad g(x) \doteq \operatorname{sen}(x) , \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R} . \tag{7.20}$$

Resolução:

Como as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são funções definidas em $\mathbb{R}$, a equação vetorial

$$\alpha \cdot f + \beta \cdot f = O , \tag{7.21}$$

onde O, denota a função identicamente nula em $\mathbb{R}$, será equivalente a equação

$$\alpha \, f(x) + \beta \, g(x) = 0 , \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R} .$$

Em particular, a identidade acima deverá ser válida para:

1. $x = 0$, ou seja:

$$
\begin{aligned}
0 &= \alpha\, f(0) + \beta\, g(0) \\
&\overset{(7.19)\text{ e }(7.20)}{=} \alpha \underbrace{\cos(0)}_{=1} + \beta \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{=0} \\
&= \alpha\,, \\
\text{ou seja,} \quad \alpha &= 0\,. \qquad (7.22)
\end{aligned}
$$

2. $x = \dfrac{\pi}{2}$, ou seja:

$$
\begin{aligned}
0 &= \alpha\, f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \beta\, g\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&\overset{(7.19)\text{ e }(7.20)}{=} \alpha \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \beta \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \\
&= \beta\,, \\
\text{ou seja,} \quad \beta &= 0\,. \qquad (7.23)
\end{aligned}
$$

Conclusão: a única solução da equação vetorial (7.21) será

$$\alpha = \beta = 0\,,$$

portanto, , pela Definição 7.2.1, as funções

$$f \quad \text{e} \quad g$$

são L.I. no espaço vetorial real $\left(\mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, \cdot\right)$, completando a resolução.

□

Exemplo 7.2.5 *Consideremos o espaço vetorial real* $\left(\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})\,,+\,,\cdot\right)$ *(veja o Exemplo 4.2.13, com* $k \doteq 1$*).*

Verifique se as funções $\underline{f}$, $\underline{g}$ *e* $\underline{h}$ *são linearmente dependentes no espaço vetorial real* $(\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, *onde*

$$
\begin{aligned}
f(x) &\doteq \cos^2(x)\,, && (7.24)\\
g(x) &\doteq \operatorname{sen}^2(x) && (7.25)\\
\text{e} \qquad h(x) &\doteq 1\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,. && (7.26)
\end{aligned}
$$

Resolução:

Observemos que

$$
\begin{aligned}
&\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,,\\
\text{ou seja,} \quad &\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) - 1 = 0, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,,
\end{aligned}
$$

que, devido a (7.24), (7.25) e (7.26), é equivalente a escrever

$$1 \cdot f + 1 \cdot g + (-1) \cdot h = O\,,$$

onde O, denota a função identicamente mula.

Logo a equação vetorial

$$\alpha \cdot f + \beta \cdot g + \gamma \cdot h = O\,,$$

possui uma solução não trivial, a saber

$$\alpha \doteq 1\,, \quad \beta \doteq 1 \quad \text{e} \quad \gamma \doteq -1\,.$$

Portanto, pela Definição 7.2.2, as funções

$$f\,,\ g \ \text{ e } \ h$$

são L.D. no espaço vetorial real $\left(\mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}),+,\cdot\right)$, completando a resolução.

□

Deixaremos para o leitor o:

Exercício 7.2.2 *Consideremos o espaço vetorial real* $\left(\mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}),+,\cdot\right)$ *(veja o Exemplo 4.2.13, com* $k \doteq 1$*).*

Sejam

$$\begin{aligned} & f(x) \doteq \cos(2\,x)\,, \\ & g(x) = \cos^2(x) \\ e \qquad & h(x) = \operatorname{sen}^2(x)\,, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Mostre que as funções

$$f\,,\ g \ \ e \ \ h$$

são linearmente dependentes, no espaço vetorial real $\left(\mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}),+,\cdot\right)$.

7.3 Propriedades da dependência linear

Começaremos pela seguinte caraterização equivalente de dependência linear:

Proposição 7.3.1 *Consideremos o espaço vetorial real (ou complexo)* $(V,+,\cdot)$ *e* $u_1, u_2, \cdots, u_n \in V$.

Os vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n$$

são L.D., no espaço vetorial real (ou complexo) $(V,+,\cdot)$*, se, e somente se, pelo menos um destes vetores da coleção pode ser escrito como combinação linear dos restantes.*

Demonstração:

Observemos que se um dos vetores da coleção de vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\,,$$

digamos u_{i_o}, para algum $i_o \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, se escreve como combinação linear dos restantes, ou seja, dos vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_{i_o-1}\,,u_{i_o+1},\cdot\,,u_n\,,$$

então deverão existir escalares

$$\alpha_1\,,\alpha_2\,,\cdots\,,\alpha_{i_o-1},\alpha_{i_o+1},\cdots\,,\alpha_n \in \mathbb{R}\ (\text{ou } \mathbb{C})\,,$$

tais que

$$u_{i_o} = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n\,. \tag{7.27}$$

Mas (7.27) é equivalente a

$$\begin{aligned} O &= \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} - u_{i_o} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \\ &= \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} + (-1) \cdot u_{i_o} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n, \end{aligned}$$

onde O, é o vetor nulo do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, ou seja, a equação vetorial

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} + \alpha_{i_o} \cdot u_{i_o} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O$$

possui uma solução não trivial (a saber, $\alpha_{i_o} \doteq -1$), o que mostra, pela Definição 7.2.2, que a coleção de vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n$$

é L.D. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$.

Por outro lado, se a coleção de vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n$$

é linearmente dependentes no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$ então, pela Definição 7.2.2, podemos encontrar escalares

$$\alpha_1\,,\alpha_2\,,\cdots\,,\alpha_n \in \mathbb{R}\ (\text{ou } \mathbb{C})\,,$$

não todos nulos, digamos que $\alpha_{i_o} \neq 0$, para algum $i_o \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, tais que

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} + \alpha_{i_o} \cdot u_{i_o} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O\,,$$

ou seja, $$-\alpha_{i_o} \cdot u_{i_o} = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n\,.$$

Como

$$\alpha_{i_o} \neq 0\,,$$

teremos

$$u_{i_o} = \frac{\alpha_1}{-\alpha_{i_o}} \cdot u_1 + \cdots + \frac{\alpha_{i_o-1}}{-\alpha_{i_o}} \cdot u_{i_o-1} + \frac{\alpha_{i_o+1}}{-\alpha_{i_o}} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{-\alpha_{i_o}} \cdot u_n,$$

ou seja, o vetor u_{i_o}, da coleção de vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n,$$

pode ser obtido como combinação linear dos vetores restantes, a saber, dos vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_{i_o-1}, u_{i_o+1}, \cdots, u_n,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Com isto temos a:

Proposição 7.3.2 *Consideremos o espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$ *e* $u_1, u_2, \cdots, u_n \in V$.

Suponhamos que o conjunto de vetores

$$S \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

é L.D. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ *e* $T \subseteq V$*, um conjunto finito, satisfazendo*

$$S \subseteq T.$$

Então o conjunto $\underline{T}$ *também será L.D. o espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Demonstração:

Vamos mostrar que se

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}, \cdots, u_m \in V$$

são tais que

$$S \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

é um conjunto formado por vetores que são L.D. em $(V, +, \cdot)$, então o conjunto

$$T \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}, \cdots, u_m\}$$

também é um conjunto formado por vetores que são L.D. em $(V, +, \cdot)$.

Como o conjunto S é L.D. em $(V, +, \cdot)$, existem escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad (\text{ou } \mathbb{C}),$$

não todos nulos, ou seja,

$$\alpha_{i_o} \neq 0, \quad \text{para algum} \quad i_o \in \{1, 2, \cdots, n\},$$

tais que

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o} \cdot u_{i_o} + \cdot + \alpha_n \cdot u_n = O\,. \tag{7.28}$$

Como $S \subseteq T$, segue que $u_{i_o} \in T$ e, de (7.28), segue que que

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o} \cdot u_{i_o} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n + 0 \cdot u_{n+1} + \cdots + 0 \cdot u_m = O\,. \tag{7.29}$$

possui uma solução não identicamente nula, pois $\alpha_{i_o} \neq 0$, mostrando que o conjunto $\underline{T}$ é formado por vetores que são L.D. em $(V\,,+\,,\cdot)$, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 7.3.1 *O resultado acima nos diz que qualquer subconjunto de um espaço vetorial real (ou complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$*, que contenha como subconjunto, um conjunto que é L.D. no espaço vetorial real (ou complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$*, deverá ser,* **<u>necessariamente</u>** *L.D. no espaço vetorial real (ou complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$*.*

Um outro resultado importante é dado pela:

Proposição 7.3.3 *Consideremos o espaço vetorial real (ou complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$ *e*

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_m \in V\,.$$

Suponhamos que os vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_m$$

são L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$*.*

Então qualquer subcoleção destes vetores também será L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$*.*

Demonstração:

Basta mostrar que se os vetores

$$u_1\,u_2\,,\,,\cdots\,,u_n\,,u_{n+1},\cdots\,,u_m$$

são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, então os vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n$$

também são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$.

Para isto suponhamos que

$$\beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n \cdot u_n = O\,. \tag{7.30}$$

Notemos que a equação vetorial (7.30) pode ser reescrita como:

$$\beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n + 0 \cdot u_{n+1} + \cdots + 0 \cdot u_m = O \tag{7.31}$$

e os vetores

$$u_1,\cdots\,,u_n,u_{n+1},\cdots\,,u_m$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$.

Logo, pela Defiição refd5.4-a, segue que a única solução para a equação vetorial (7.31) será

$$\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0,$$

ou seja, pela Definição 7.2.1, os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, como queríamos demonstrar.

□

Observação 7.3.2 *O resultado acima nos diz que qualquer subconjunto finito de um conjunto finito de vetores de um espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$ *que é L.I., no espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$*, deverá,* <u>**necessariamente**</u>*, ser L.I., no espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Um outro resultado importante é dado pela:

Proposição 7.3.4 *Consideremos o espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$ *e*

$$u, u_1, u_2, \cdots, u_n \in V.$$

Suponhamos que os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ *e os vetores*

$$u, u_1, u_2, \cdots, u_n,$$

são L.D. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.

Então o vetor $\underline{u}$ *deverá ser uma combinação linear dos vetores*

$$u_1, u_2, \cdots, u_n,$$

$$\text{ou seja,} \qquad u \in [u_1, u_2, \cdots, u_n]. \tag{7.32}$$

Demonstração:

Notemos que, como os vetores

$$u, u_1, u_2, \cdots, u_n,$$

são L.D. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, pela Definição 7.2.2, podemos encontrar escalares

$$\beta, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n+1}, \quad \text{não todos nulos}, \tag{7.33}$$

$$\text{tais que} \qquad \beta \cdot u + \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n \cdot u_n = O. \tag{7.34}$$

Afirmamos que

$$\beta \neq 0.$$

Suponhamos, por absurdo, que

$$\beta = 0\,. \tag{7.35}$$

A expressão (7.34) tornar-se-á:

$$\beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n \cdot u_n = 0.$$

Como, por hipótese, os vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n$$

são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, pela Definição 7.2.1, deveríamos, necessariamente, ter

$$\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0\,, \tag{7.36}$$

que juntamente com 7.35, implicaria em: $\beta = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0\,,$

o que contrariaria (7.33).

Portanto deveremos ter

$$\beta \neq 0\,.$$

Com isto, (7.34) será equivalente a

$$-\beta \cdot u = \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n\,,$$

e com $\beta \neq 0$, teremos: $u = \dfrac{\beta_1}{-\beta} \cdot u_1 + \cdots + \dfrac{\beta_n}{-\beta} \cdot u_n\,,$

ou seja, o vetor $\underline{u}$ pode ser obtido como combinação linear dos vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n\,,$$

como queríamos demonstrar.

□

Pra finalizar temos a:

Proposição 7.3.5 *Consideremos o espaço vetorial real (ou complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$ *e*

$$u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n$$

vetores L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$*.*

Então cada vetor

$$v \in [u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n]$$

se escreve, de maneira **única**, *como combinação linear dos vetores*

$$u_1\,, u_2,\,, \cdots\,, u_n\,,$$

isto é, podemos encontrar **únicos** *escalares*

$$\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots\,, \alpha_n \in \mathbb{R}\ (ou\ \mathbb{C})\,,$$

tais que

$$v = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n\,. \tag{7.37}$$

Demonstração:

Como, por hipótese, temos que

$$v \in [u_1 , u_2 , \cdots , u_n]$$

da Definição 6.3.1, segue que podemos encontar escalares

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \cdots , \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) ,$$

tais que vale (7.37).

Suponhamos que existam escalares

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \cdots , \alpha_n , \beta_1 , \beta_2 , \cdots , \beta_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) ,$$

tais que

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = v = \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n , \tag{7.38}$$

ou seja, o vetor $\underline{v}$ pode ser escrito de, pelo menos, duas maneiras como combinação linear dos vetores

$$u_1 , u_2 , \cdots , u_n .$$

Precisamos mostrar que

$$\alpha_j = \beta_j , \quad \text{para todo} \quad j \in \{1 , 2 , \cdots , n\} .$$

Observemos que (7.38) é equivalente a:

$$[\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n] - [\beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n] = O ,$$

que, por sua vez, pelas propriedades (4.6), (4.7), (4.11) e 4.86, pode ser escrita como

$$(\alpha_1 - \beta_1) \cdot u_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot u_n = 0 .$$

Mas, por hipótese, os vetores

$$u_, , \cdots , u_n$$

são L.I. espaço vetorial real (ou complexo) $(V , + , \cdot)$.

Logo, da Definição 7.2.1, necessariamente, deveremos ter

$$\begin{aligned} & \alpha_j - \beta_j = 0 , \quad \text{para cada} \quad j \in \{1 , 2 , \cdots , n\} , \\ \text{isto é,} \quad & \alpha_j = \beta_j , \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, \cdots , n\} , \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 7.3.3 *Vale uma certa recíproca da Proposição 7.3.5 acima, a saber: se cada vetor*

$$v \in [u_1 , u_2 , \cdots , u_n] ,$$

se escreve, de maneira única, como combinação linear dos vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\,,$$

então os vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n$$

deverão ser L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$.

De fato, pois, em particular, o vetor nulo $O \in V$ *se escreve de modo único como combinação linear dos vetores*

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\,,$$

isto é, se

$$O = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n\,,$$

necessariamente, deveremos ter: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,\,,$

pois este é o **<u>único</u>** *modo de escrever o vetor nulo como combinação linear dos vetores* $u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n$*, mostrando, pela Definição 7.2.1, que os vetores*

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n$$

serão L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$*, com afirmamos.*

7.4 Exercícioss

Exercício 7.4.1 *Determinar, em cada um dos itens abaixo,* $m\,,n \in \mathbb{R}$*, para que o subconjunto* S *contido no espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$*, sejam L.I. .*

1. $S \doteq \{(3\,,5\,m\,,1)\,,(2\,,0\,,4)\,,(1\,,m\,,3)\}$.

2. $S \doteq \{(1\,,3\,,5)\,,(2\,,m+1\,,10)\}$.

3. $S \doteq \{(m\,,2\,,n)\,,(3\,,m+n\,,m-1)\}$.

Exercício 7.4.2 *Verifique, em cada um dos itens abaixo, se o subconjunto* S *do espaço vetorial* $(V\,,+\,,\cdot)$ *é L.I. ou L.D., justificando a resposta .*

1. $S \doteq \{(1\,,2)\,,(-3\,,1)\}$ *e* $V \doteq \mathbb{R}^2$*, munido das operações usuais.*

2. $S \doteq \{p\,,q\}$ *e* $V \doteq \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*, munido das operações usuais, onde*

$$p(t) \doteq 1 + x - x^2\,, \quad q(t) \doteq 2 + 5\,x - 9\,x^2\,, \ \textit{para } x \in \mathbb{R}\,.$$

3. $S \doteq \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V \doteq M_2(\mathbb{R})$*, munido das operações usuais.*

4. $S \doteq \{(1\,,2\,,2\,,-3)\,,(-1\,,4\,,-2\,,0)\}$ *e* $V \doteq \mathbb{R}^4$*, munido das operações usuais*

5. $S \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *e* $V \doteq M_3(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais.*

6. $S \doteq \{f, g, h\}$ *e* $V \doteq \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, *munido das operações usuais, onde*

$$f(x) \doteq 1, \quad g(x) \doteq \operatorname{sen}(x), \quad h(x) \doteq \cos(x), \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

7. $S \doteq \{f, g, h\}$ *e* $V \doteq \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, *munido das operações usuais, onde*

$$f(x) \doteq 1, \quad g(x) \doteq \operatorname{sen}^2(x), \quad h(x) \doteq \cos^2(x), \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

8. $S \doteq \{f, g\}$ *e* $V \doteq \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, *munido das operações usuais, onde*

$$f(x) \doteq e^x, \quad g(x) \doteq e^{-x}, \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

9. $S \doteq \{f, g, h\}$ *e* $V \doteq \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, *munido das operações usuais, onde*

$$f(x) \doteq x\, e^x, \quad g(x) \doteq x \quad e \quad h(x) \doteq 1, \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 7.4.3 *Mostre que o conjunto de vetores* $A \doteq \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ *do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *é L.D. e que qualquer subconjunto do conjunto* A, *formado por três elementos é L.I. no espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$, *onde*

$$q_1(x) \doteq 1, \quad q_2(x) \doteq x, \quad q_3(x) \doteq x^2, \quad q_4(x) \doteq 2 + x + 2x^2, \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 7.4.4 *Sejam* $M \neq O$ *uma matriz simétrica e* $N \neq O$ *uma matriz anti-simétrica pertencentes ao espaço vetorial real* $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$. *Mostre que as matrizes* M *e* N *são L.I. no espaço vetorial real* $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Exercício 7.4.5 *Mostrar que se o subconjunto de vetores* $\{u, v, w\}$ *do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$ *for L.I., o mesmo acontecerá com o subconjunto* $\{u + v, u + w, v + w\}$.

Exercício 7.4.6 *Seja* $S \doteq \{u, v, w\}$ *um conjunto L.I. no espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$. *Verifique se os conjuntos abaixo são L.I. ou L.D., justificando a resposta.*

1. $S_1 \doteq \{u, u + v, u + v + w\}$.

2. $S_2 \doteq \{u - v, v - w, w - u\}$.

3. $S_3 \doteq \{u + v, u + v + w, w\}$.

Exercício 7.4.7 *Sejam* $f, g \in \mathscr{C}^1((a, b); \mathbb{R})$. *Mostre que, se existir* $x_o \in (a, b)$, *tal que*

$$f(x_o)\, g'(x_o) \neq f'(x_o)\, g(x_o),$$

então as funções f *e* g *são L.I. . no espaço vetorial real* $(\mathscr{C}^1((a, b); \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Exercício 7.4.8 *Sejam* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *e* $u_1, u_2, \cdots, u_r$ *vetores pertencentes ao espaço vetorial real* $(M_{n\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$. *Mostre que, se os vetores coluna* $A\,u_1, Au_2, \cdots, Au_r$ *são vetores L.I. , então os vetores* $u_1, u_2, \cdots, u_r$ *também serão L.I. no espaço vetorial real* $(M_{n\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Exercício 7.4.9 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *o espaço vetorial real formado pelas funções de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$. *Mostre que os vetores* $f, g, h \in V$ *são L.I., onde*

$$f(x) \doteq \operatorname{sen}(x), \quad g(x) \doteq \cos(x), \quad e \quad h(x) = x, \ \textit{para}\ x \in \mathbb{R}.$$

Capítulo 8

Base (ordenada) de um espaço vetorial

8.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos as questões envolvendo como descrever um espaço vetorial real (ou complexo), que seja finitamente gerado, como sendo gerado pelo menor número de vetores possível (que será o que denominaremos de base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo). A esse número mínimo de vetores que geram o espaço vetorial real (ou complexo) daremos o nome de dimensão do espaço vetorial real (ou complexo).

Começaremos pela primeira questão:

8.2 Definições e exemplos

A noção de base (ordenada) de um espaço vetorial real (ou complexo) é semelhante a que foi introduzida no curso de Geometria Analítica para o $\mathbb{R}^2$ ou o $\mathbb{R}^3$.

Ela consiste em escolher um conjunto de geradores do espaço vetorial real (ou complexo) em questão, que contenha o menor número de vetores possível, isto é, um conjunto que gere o espaço vetorial real (ou complexo), mas que se deste conjunto for retirado qualquer elemento, o conjunto que restará **não** gerará mais o espaço vetorial real (ou complexo) em questão.

Mais precisamente, temos a:

Definição 8.2.1 *Seja* $V \neq \{O\}$, $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) finitamente gerado.*

Definimos uma **base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo)** $(V, +, \cdot)$ *como sendo um conjunto finito de vetores, que indicaremos por* $\mathcal{B}$*, formado por vetores L.I. no espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$ *e que gera* $(V, +, \cdot)$*, isto é,*

$$\begin{aligned} & [\mathcal{B}] = V \\ \text{e} \quad & \mathcal{B} \text{ é L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) } (V, +, \cdot) \,. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Consideremos alguns casos, começando pelo:

Exemplo 8.2.1 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *(veja o Exemplo 4.2.3, com* $n = 3$*).*

Mostre que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{(1\,,0\,,0)\,,\,(0\,,1\,,0)\,,\,(0\,,0\,,1)\} \tag{8.2}$$

é uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$.

Resolução:

Sabemos que o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ é finitamente gerado (veja o Exemplo 6.3.2, com $n \doteq 3$).

É fácil mostrar que os vetores do conjunto $\mathcal{B}$ são L.I. no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Além disso se $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que

$$\begin{aligned}(x\,,y\,,z) &\overset{(4.26),\text{ com } n=3}{=} (x\,,0\,,0) + (0\,,y\,,0) + (0\,,0\,,z)\\ &\overset{(4.27),\text{ com } n=3}{=} x\cdot(1\,,0\,,0) + y\cdot(0\,,1\,,0) + z\cdot(0\,,0\,,1)\,,\end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 6.3.2, que os vetores do conjunto $\mathcal{B}$ geram o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$, isto é,

$$[\mathcal{B}] = \mathbb{R}^3\,.$$

Logo, da Definição 8.2.1, segue que o conjunto $\mathcal{B}$ será uma base (ordenada) para o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$, completando a resolução.

□

Observação 8.2.1 *A base (ordenada)* $\mathcal{B}$*, dada por* (8.2)*, é denominada* <u>**base (ordenada) canônica**</u> *do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$.

Podemos estender o Exemplo 8.2.1 acima, como afirma o seguinte exercício abaixo, cuja resolução será deixada a cargo do leitor.

Exercício 8.2.1 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$ *(veja o Exemplo 6.3.2).*

Mostre que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{e_1\,,e_2\,,\cdots\,,e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n\,, \tag{8.3}$$

onde

$$\begin{aligned}e_1 &\doteq (1\,,0\,,\cdots\,,0),\,,\\ &\vdots\,,\\ e_j &\doteq (0\,,\cdots\,,0\,,\underbrace{1}_{j-\text{ésima posição}}\,,\cdots\,,0)\,, \qquad (8.4)\\ &\vdots\,,\\ e_n &\doteq (0\,,\cdots\,,0\,,1)\end{aligned}$$

é uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$.

Observação 8.2.2 *A base (ordenada)* $\mathcal{B}$*, dada por* (8.3)*, é denominada* <u>**base (ordenada) canônica**</u> *do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$.

Temos também o:

Exemplo 8.2.2 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *(veja o Exemplo 6.3.2, com* $n \doteq 2$*).*

Mostre que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{(1, 1), (1, -1)\}$$

é uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2 +, \cdot)$*.*

Resolução:

É preciso mostrar que os vetores de $\mathcal{B}$ são L.I. em $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ e que todo vetor do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores do conjunto $\mathcal{B}$.

Segue, da Observação 7.3.3, que basta mostrarmos que todo vetor de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ se escreve, de maneira única, como combinação linear dos vetores

$$u_1 \doteq (1, 1) \quad \text{e} \quad u_2 \doteq (1, -1). \tag{8.5}$$

Para isto, consideremos

$$u \doteq (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

O nosso problema se resume a mostrar que existem <u>**únicos**</u>

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},$$

tais que

$$\begin{aligned} u &= (x, y) \\ &= \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 \\ &\overset{(8.5)}{=} \alpha_1 \cdot (1, 1) + \alpha_2 \cdot (1, -1) \\ &\overset{(4.27),\ \text{com } n=3}{=} (\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, -\alpha_2) \\ &\overset{(4.26),\ \text{com } n=3}{=} (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned}$$

Esta identidade é equivalente ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x \\ \alpha_1 - \alpha_2 = y \end{cases}. \tag{8.6}$$

Resolvendo o sistema linear (8.6) (deixaremos como exercício para o leitor), obteremos uma <u>**única**</u> do mesmo, dada por

$$\alpha_1 = \frac{x + y}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{x - y}{2},$$

mostrando, pela Observação 7.3.3, que o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) para $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, completando a resolução.

□

Deixaremos, para o leitor, a resolução dos:

Exercício 8.2.2 *Consideremos o espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(veja o Exemplo 4.2.5, com* $n = m \doteq 2$*).*

Mostre que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{8.7}$$

é uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

Observação 8.2.3 *A base (ordenada)* $\mathcal{B}$*, dada por (8.7), é denominada* <u>base (ordenada) canônica</u> *do espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$*.*

Temos também o

Exercício 8.2.3 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(veja o Exemplo 4.2.7, com* $n \doteq 2$*).*

Mostre que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{p, q, r\}$$

é uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$*, onde:*

$$\begin{aligned} & p(x) \doteq 1 + x, \\ & q(x) \doteq 1 - x \\ e \quad & r(x) \doteq 1 - x^2, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

8.3 Propriedades de uma base (ordenada) de um espaço vetorial

Temos o seguinte resultado:

Proposição 8.3.1 *Consideremos o espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$ *e suponhamos que o conjunto*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

é uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo $(V, +, \cdot)$*.*

Então o conjunto

$$\mathcal{B}' \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}\}$$

<u>**não**</u> *poderá ser uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$*.*

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que o conjunto

$$\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}\}$$

é uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.

Como $u_n \in V$ e $\mathcal{B}\,'$ é uma base (ordenada) de $(V, +, \cdot)$, pela Definição 8.2.1, temos que

$$[\mathcal{B}] = V, ,$$

ou seja, poderemos encontrar escalares

$$\begin{aligned} & \alpha_j \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}), \quad \text{para} \quad j \in \{1, 2, , \cdots, n-1\}, \\ \text{de modo que} \quad & u_n = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot u_{n-1}, \\ \text{isto é,} \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O &= \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot u_{n-1} - u_n \\ &= \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot u_{n-1} + (-1) \cdot u_n, \end{aligned}$$

que, pela Definição 7.2.2, segue que os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são L.D. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ o que seria um absurdo pois, por hipótese, os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, pertencem a uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ (veja a Definição 8.2.1).

Portanto o conjunto

$$\mathcal{B}\,' = \{u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}\},$$

não poderá ser uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, como queríamos demonstrar.

□

Temos também o seguinte importante resultado:

Teorema 8.3.1 *Seja $V \neq \{O\}$ tal que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real (ou complexo) finitamente gerado.*

Então $(V, +, \cdot)$ admite uma base (ordenada) .

Em outras palavras, existe um conjunto $\mathcal{B}$, formado por um número finito de vetores de $(V, +, \cdot)$ que são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ e que gera $(V, +, \cdot)$, ou seja,

$$\begin{aligned} & [\mathcal{B}] = V \\ e \quad & \mathcal{B} \text{ é L.I. em } (V, +, \cdot). \end{aligned}$$

Demonstração:

Como $V \neq \{O\}$ e $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real (ou complexo) finitamente gerado, existem vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n \in V,$$

tais que

$$V = [u_1, u_2, \cdots, u_n].$$

Notemos que, se o conjunto
$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$
for formado por vetores que são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, então o conjunto $\mathcal{B}$ será uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, terminando a demonstração.

Por outro lado, se o conjunto $\mathcal{B}$ é L.D. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, isto é, os vetores $u_1, u_2, \cdots, u_n$ são L.D. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$), como $V \neq \{O\}$, existe, pelo menos, um $j_o \in \{1, 2, \cdots, n\}$, de modo que
$$u_{j_o} \neq O\,.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que
$$u_1 \neq O\,,$$
$$\text{isto é,} \quad j_o = 1\,.$$

Se todo vetor
$$u_j\,, \quad \text{para} \quad j \in \{2, 3, \cdots, n\}$$
puder se escrever como combinação linear do vetor u_1, então segue que
$$V = [u_1]$$
e o conjunto $\mathcal{B} \doteq \{u_1\}$ será uma base (ordenada) de $(V, +, \cdot)$, terminando a demonstração.

Caso isto não ocorra, é porque podemos encontrar um vetor
$$u_{j_1}\,, \quad \text{para algum} \quad j_1 \in \{2, 3, \cdots, n\}\,,$$
tal que os vetores
$$u_1, u_{j_1}$$
são L.I. em $(V, +, \cdot)$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que o vetor u_2 seja tal vetor,
$$\text{ou seja,} \quad j_1 = 2\,,$$
$$\text{isto é, os vetores} \quad u_1, u_2 \ \text{ são L.I. em } (V, +, \cdot). \tag{8.8}$$

Se todos os vetores
$$u_3, \cdots, u_n\,,$$
puderem ser escritos como combinações lineares dos vetores
$$u_1, u_2\,,$$
então segue que
$$V = [u_1, u_2]$$
e o conjunto $\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2\}$ será uma base (ordenada) de $(V, +, \cdot)$ (pois, é L.I., por (8.8)).

Caso, contrário, podemos repetir este processo e como o número de elementos do conjunto

$$\{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\}$$

é finito, o processo irá findar após um número finito de passos.

Desse modo, podemos encontrar uma coleção finita de vetores L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$, dentre os vetores do conjunto

$$\{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\}$$

que geram $(V\,,+\,,\cdot)$, isto é, uma base (ordenada) de $(V\,,+\,,\cdot)$, finalizando a demonstração.

□

para finalizar temos a:

Proposição 8.3.2 *Suponhamos que*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\}$$

é uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$.

Se $u \in V$, *podemos encontrar únicos escalares*

$$\alpha_1\,,\alpha_2\,,\cdots\,,\alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}),, \tag{8.9}$$

de modo que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \tag{8.10}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot u_k\,. \tag{8.11}$$

Demonstração:

Como $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, da Definição 8.2.1, segue que podemos encontrar escalares

$$\alpha_1\,,\alpha_2\,,\cdots\,,\alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}),,$$

de modo que vale (8.11).

Novamente, como $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, da Definição 8.2.1, segue que o conjunto $\mathcal{B}$ é L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$.

Logo da Proposição 7.3.5, segue que os escalares de (8.9) são os únicos satisfazendo (8.11), completando a demonstração.

□

8.4 Exemplos importantes

Observação 8.4.1 *Resumindo, o Teorema 8.3.1 acima, nos diz que todo espaço vetorial real (ou complexo), não identicamente nulo, finitamente gerado tem, pelo menos, uma base (ordenada) , ou seja, uma coleção finita de vetores L.I., que geram o espaço vetorial real (ou complexo) em questão.*

O exemplo a seguir trata de dois espaços vetoriais, um sobre $\mathbb{R}$ e o outro sobre $\mathbb{C}$.

Exemplo 8.4.1 *Consideremos* $V \doteq \mathbb{C}$ *munido das seguinte operações usuais e adição de números complexos e de multiplicação de número real por número complexo.*

Mais precisamente, temos:

$$\mathbb{C} = \{(a\,,b)\,;\, a\,,b \in \mathbb{R}\} \quad (= \mathbb{R}^2).$$

Consideremos a adição $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definida do seguinte modo:*

$$\begin{aligned} \textit{se} \quad & z = (a\,,b)\,,\ w = (c\,,d) \in \mathbb{C}\,, \\ \textit{definimos:} \quad & z + w \doteq (a + c\,, b + d) \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{8.12}$$

e a multiplicação (por número real) $\cdot_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definida do seguinte modo:*

$$\begin{aligned} \textit{se} \quad & \lambda \in \mathbb{R} \\ \textit{e} \quad & z = (a\,,b) \in \mathbb{C} \\ \textit{definimos:} \quad & \lambda \cdot_{\mathbb{R}} z \doteq (\lambda\, a\,,\, \lambda\, b) \in \mathbb{C}\,. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Por outro lado, podemos definir a multiplicação por número complexo, ou seja, $\cdot_{\mathbb{C}} \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definida do seguinte modo:*

$$\begin{aligned} \textit{se} \quad & \lambda = (c\,,d) \in \mathbb{C} \\ \textit{e} \quad & z = (a\,,b) \in \mathbb{C}\,, \\ \textit{definimos:} \quad & \lambda \cdot_{\mathbb{C}} z \doteq (a\,c - b\,d\,, a\,d + c\,b) \in \mathbb{C}\,, \end{aligned} \tag{8.14}$$

que é a multiplicação usual de números complexos.

Encontrar uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{R}})$ *e do espaço vetorial complexo* $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{C}})$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{R}})$ é um espaço vetorial real e $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{C}})$ é um espaço vetorial complexo.

Encontremos uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{R}})$.

Notemos que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{(1\,,0)\,,(0\,,1)\} \tag{8.15}$$

é uma base (ordenada) para o espaço vetorial real $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{R}})$, pois o conjunto $\mathcal{B}$ é L.I. em $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{R}})$.

Notemos também que, se $z = (a\,,b) \in \mathbb{C}$, segue que

$$\begin{aligned} z &= (a\,,b) \\ &\overset{(8.12)}{=} (a\,,0) + (0\,,b) \\ &\overset{(8.13)}{=} a \cdot_{\mathbb{R}} (1\,,0) + b \cdot_{\mathbb{R}} (0\,,1)\,, \end{aligned}$$

ou seja, o conjunto $\mathcal{B}$ gera o espaço vetorial real $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{R}})$, ou seja, gera e é L.I., portanto, pela Definição , será uma base (ordenada) de $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{R}})$.

Por outro lado, o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{(1\,,0)\} \tag{8.16}$$

é uma base (ordenada) para o espaço vetorial complexo $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{C}})$.

De fato, pois o conjunto $\mathcal{C}$ é L.I. em $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{C}})$.

Notemos também que, se $z = (a\,,b) \in \mathbb{C}$ segue que

$$\begin{aligned} z &= (a\,,b) \\ &\overset{(8.14)}{=} \underbrace{(a\,,b)}_{\doteq\lambda} \cdot_{\mathbb{C}} (1\,,0) \\ &= \lambda \cdot_{\mathbb{C}} (1\,,0)\,, \end{aligned}$$

ou seja, o conjunto $\mathcal{C}$ gera o espaço vetorial complexo $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{C}})$, , ou seja, gera e é L.I., portanto, pela Definição , será uma base (ordenada) de $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{C}})$.

□

Observação 8.4.2

1. *O Exemplo 8.4.1 chama-nos a atenção para o fato que se considerarmos o espaço vetorial real* $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{R}})$, *temos que uma base (ordenada) deste possui dois elementos (veja* (8.15)*).*

   Por outro lado, o espaço vetorial complexo $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{C}})$, *temos que uma base (ordenada) deste possui um único elemento (veja* (8.16)*).*

2. *A base (ordenada)* $\mathcal{B}$, *dada por* (8.15), *é denominada* **base (ordenada) canônica** *do espaço vetorial real* $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{R}})$.

3. *A base (ordenada)* $\mathcal{B}$, *dada por* (8.16), *é denominada* **base (ordenada) canônica** *do espaço vetorial colorblue complexo* $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{C}})$.

Para finalizar esta seção, vamos voltar ao Exemplo 3.4.1, mais precisamente:

Exemplo 8.4.2 *Encontre o conjunto solução associado a equação matricial homogênea*

$$A \cdot x = O_{31}\,, \tag{8.17}$$

$$\textit{onde} \quad A \doteq \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{35}\,. \tag{8.18}$$

Resolução:

Vimos na resolução do Exemplo 3.4.1, que toda solução da equação matricial (8.17), deverá ser da forma (veja (3.48)):

$$u = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 \,, \tag{8.19}$$

$$\text{onde} \qquad u_1 \doteq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.20}$$

$$\text{e} \qquad u_2 \doteq \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{8.21}$$

□

Façamos algumas considerações sobre o Exemplo 8.4.2 acima:

Observação 8.4.3

1. *Notemos que, de (3.49), segue que o conjunto solução da equação matricial (8.17) é um subepaço vetorial do espaço vetorial* $(M_{51}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

2. *Notemos também que os vetores* u_1 *e* u_2*, dados por (8.20) e (8.21), respectivamente, são L.I. no espaço vetorial real* $(M_{51}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

3. *Portanto, das conisderações acima, se considerarmos*

$$W \doteq \{x \in M_{51}(\mathbb{R}) \,;\, A \cdot x = O_{31}\} \tag{8.22}$$

teremos que o conjunto W *é um subepaço vetorial do espaço vetorial* $(M_{51}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *e*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1 \,, u_2\}$$

$$\overset{(8.20) \text{ e } (8.21)}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{8.23}$$

será uma base (ordenada) para o espaço vetorial real $(W, +, \cdot)$.

4. *Observemos que o posto da matriz A, do Exemplo 8.4.2 (dada por (8.18)) é 3, isto é,*

$$\text{rank}(A) = 3\,,$$

e a equação matricial (H) (dada por (8.17)), possui duas soluções que tem a propriedade acima, isto é, qualquer solução da equação matricial (H) (dada por (8.17)), pode ser obtida como combinação linear das soluções u_1 e u_2 (dadas por (8.20) e (8.21), respectivamente).

Além disso notemos que, se denotarmos o número de elementos da base (ordenada) $\mathcal{B}$ por $\dim(W)$, teremos:

$$\begin{aligned}\dim(W) &= 2\\ &= \underbrace{5}_{\text{número de variáveis}} - \underbrace{3}_{\text{posto de } A}\,,\end{aligned}$$

isto é , o número de soluções L.I. da a equação matricial (H) (dada por (8.17)) é igual ao número de variáveis do sistema linear menos o posto da matriz A (dada por (8.18)).

Baseado na situação acima, temos o:

Teorema 8.4.1 *Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $A \in M_{mn}$ de posto igual a $\underline{k}$.*

Então o conjunto das soluções da equação matricial homogênea

$$A \cdot x = 0 \tag{8.24}$$

é um subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo) $(M_{mn}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, formado pelas matrizes M_{n1}, da forma:

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_{n-k} \cdot u_{n-k} \in M_{n1}\,, \tag{8.25}$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), para $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n-k\}$, sendo que as matrizes

$$u_i \in M_{n1} \setminus \{O\}\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n-k\}\,,$$

podem ser obtidas resolvendo-se a equação matricial (H) (dado por (8.24)), associado a matriz na FERL, associada a matriz A (são as $n-k$ soluções L.I. em $(M_{n1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$).

Em particular, se W é o subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo) $(M_{n1}\,,+\,,\cdot)$, que contém todas a solução da equação matricial (H) (dada por (8.24)), segue que

$$\dim(W) = n - \text{rank}(A)\,, \tag{8.26}$$

onde $\dim(W)$ denota o número de elementos de uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(W\,,+\,,\cdot)$.

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a demonstração deste resultado.

□

8.5 Exercícios

Exercício 8.5.1 *Verificar em cada um dos casos se o subconjunto* $\mathcal{B}$*, contido no espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$ *é uma base (ordenada) do mesmo.*

1. $B \doteq \{q_o, q_1, q_2, q_3\}$, *onde*

$$q_o(x) \doteq 1, \quad q_1(x) \doteq 1 + x, \quad q_2(x) \doteq 1 - x^2, \; q_3(x) \doteq 1 - x - x^2 - x^3, \; \forall x \in \mathbb{R}$$

e $V = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$*, munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função.*

2. $B \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ *e* $V \doteq M_2(\mathbb{R})$*, munido das operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz.*

3. $B \doteq \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ *e* $V \doteq \mathbb{R}^4$*, munido das operações usuais de soma de quádruplas ordenadas e multiplicação de número real por quádrupla ordenada.*

4. $\mathcal{B} \doteq \{p_1, p_2, _3, p_4\}$ *e* $V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$*, munido das operações usuais, onde*

$$p_1(x) \doteq 1, \quad p_2(x) \doteq 1 + x, \quad p_3(x) \doteq 1 - x^2, \quad p_4(x) \doteq 1 - x - x^2 - x^3, \; \textit{para } x \in \mathbb{R}.$$

5. $\mathcal{B} \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ *e* $V = M_2(\mathbb{R})$*, munido das operações usuais.*

6. $\mathcal{B} \doteq \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ *e* $V \doteq \mathbb{R}^4$*, munido das operações usuais.*

Exercício 8.5.2 *Encontrar em cada um dos itens abaixo uma base (ordenada) do subespaço* W *do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

1. $W \doteq \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x - y = 0 \text{ e } x + 2y + t = 0\right\}$ *e* $V \doteq \mathbb{R}^4$*, munido das operações usuais de soma de quádruplas ordenadas e multiplicação de número real por quádrupla ordenada.*

2. $W \doteq \{X \in M_2(\mathbb{R}) ; A \cdot X = X\}$ *onde* $A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $V = M_2(\mathbb{R})$*, munido das operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz.*

3. $W \doteq \{p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) ; p''(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$ *e* $V = \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*, munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função.*

4. $W \doteq \{X \in M_2(\mathbb{R}) ; A \cdot X = X \cdot A\}$ *onde* $A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $V = M_2(\mathbb{R})$*, munido das operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz.*

Exercício 8.5.3 *Determinar uma base e a dimensão do espaço vetorial real formado pelas soluções de cada um dos sistemas lineares homogêneos abaixo:*

$$1. \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ 3y + 4z = 0 \end{cases}, \qquad 2. \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ 3x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$$

Exercício 8.5.4 *Sejam* U *e* W *os seguintes subespaços vetoriais do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$*:*

$$U \doteq \{(a, b, c, d) \; ; \; b - 2c + d = 0\} \quad e \quad W \doteq \{(a, b, c, d) \; ; \; a = d \quad e \quad b = 2c\}.$$

Ache uma base e a dimensão dos seguintes susbespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$*:*

1. U 2. W 3. $U \cap W$ 4. $U + W$.

Exercício 8.5.5 *Encontre uma base (ordenada) do espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$*, munido das operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz, que contenha os vetores*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercício 8.5.6 *Ache uma base (ordenada) para o subespaço vetorial* W *do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$*, que é gerado pelos seguintes polinômios:*

1. $\{u, v, w\}$*, onde*

   $u(x) \doteq x^3{+}2x^2{-}2x{+}1, \quad v(x) \doteq x^3{+}3x^2{-}x{+}4, \quad w(x) \doteq 2x^3{+}x^2{-}7x{-}7,$ *para* $x \in \mathbb{R}$.

2. *e* $\{u, v, w\}$*, onde*

   $u(x) \doteq x^3{+}x^2{-}3x{+}2, \quad v(t) \doteq 2x^3{+}x^2{+}x{-}4, \quad w(x) \doteq 4x^3{+}3x^2{-}5x{+}2,$ *para* $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 8.5.7 *Seja* $\mathcal{B} \doteq \{v_1, \cdots, v_n\}$ *uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V+, \cdot)$.

Mostre que

1. *o conjunto*

   $$\mathcal{C} \doteq \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \cdots, v_1 + \cdots + v_n\},$$

   será uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V+, \cdot)$*;*

2. *se* $\alpha_j \neq 0$*, para todo* $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$*, então o conjunto*

   $$\{\alpha_1 \cdot v_1, \cdots, \alpha_n \cdot v_n\},$$

   será uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V+, \cdot)$.

Exercício 8.5.8 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *o espaço vetorial real formado pelas funções de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$. *Mostre que os vetores* $f, g, h \in V$ *são L.I., onde*

$$f(x) \doteq \operatorname{sen}(x), \quad g(x) \doteq \cos(x), \quad e \quad h(x) = x, \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 8.5.9 *Determinar uma base do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, *que contenha os vetores* $u_1 \doteq (1, 1, 1, 1)$ *e* $u_2 \doteq (2, 1, 2, 1)$ *como dois de seus elementos.*

Exercício 8.5.10 *Encontrar em cada um dos itens abaixo uma basedo subespaço vetorial* W *do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

1. $W \doteq \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x - y = 0 \text{ e } x + 2y + t = 0\right\}$ *e* $V \doteq \mathbb{R}^4$, *munido das operações usuais.*

2. *Sejam* $A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $W \doteq \{X \in M_2(\mathbb{R}) ; A \cdot X = X\}$ *e* $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais.*

3. $W \doteq \{p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) ; p''(x) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$ *e* $V \doteq \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais.*

4. *Sejam* $A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $W \doteq \{X \in M_2(\mathbb{R}) ; A \cdot X = X \cdot A\}$ *e* $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais.*

Exercício 8.5.11 *Dados* U, W *subespaços vetoriais do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$, *determinar;*

(i) *uma base do susbespaço vetorial* U.

(ii) *uma base do susbespaço vetorial* W.

(iii) *uma base do susbespaço vetorial* $U + W$.

(iv) *uma base do susbespaço vetorial* $U \cap W$,

nos em cada um dos seguintes casos:

1. $U \doteq \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 0\right\}$, $W \doteq \{(x, y, 0) ; x, y \in \mathbb{R}\}$ *e* $V \doteq \mathbb{R}^3$, *munido das operações usuais.*

2. $U \doteq \{A \in M_2 ; \operatorname{tr}(A) = 0\}$, $W \doteq \{A \in M_2 ; A^t = -A\}$ *e* $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais, onde* $\operatorname{tr}(A)$ *denota a soma dos elementos da diagonal principal da matriz* A, *chamado de* **traço da matriz** A.

3. $U \doteq \{p \in V ; p'(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$, $W \doteq \{p \in V ; p(0) = p(1)\}$ *e* $V \doteq \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais.*

Exercício 8.5.12 *Sejam* W_1, W_2 *subespaços vetoriais do espaço vetorial real* $(W, +, \cdot)$ *e consideremos* $V \doteq W_1 \oplus W_2$. *Mostre que se o conjunto* $\mathcal{A} \doteq \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ *é uma base do espaço vetorial real* $(W_1, +, \cdot)$ *e o conjunto* $\mathcal{B} \doteq \{w_1, w_2, \cdots, w_r\}$ *é uma base do espaço vetorial real* $(W_2, +, \cdot)$, *então o conjunto* $\gamma \doteq \{v_1, v_2, \cdots, v_k, w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ *será uma base do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Exercício 8.5.13 *Suponhamos que o conjunto* $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\}$ *é uma base do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$. *Mostre que:*

1. *o conjunto* $\gamma \doteq \{u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3, \cdots, u_1 + \cdots + u_n\}$ *também é um base do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

2. *sejam* $\alpha_j \neq 0$, *para cada* $j \in \{1, \cdots, n\}$. *Então o conjunto* $\delta \doteq \{\alpha_1 \cdot u_1, \cdots, \alpha_n \cdot u_n\}$ *também será uma base do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Exercício 8.5.14 *Seja* $V \doteq \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ *e considere no conjunto* V, *as seguintes operações:*

$$u \oplus v \doteq uv \quad e \quad \alpha \odot u \doteq u^{\alpha}.$$

1. *Mostre que* $(V, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$.

2. *O subconjunto* $\mathcal{B} \doteq \{1\}$ *é uma base para o espaço vetorial real* $(V, +, .)$? *Justifique sua resposta.*

3. *Determine uma base do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Capítulo 9

Dimensão de um espaço vetorial

9.1 Introdução

Podemos agora introduzir a nõção de dimensão de um espaço vetorial real (ou complexo) que são finitamente gerados.

9.2 Definição e propriedades

Para iniciar esta seção temos o seguinte resultado fundamental para o que segue:

Teorema 9.2.1 *Seja* $V \neq \{O\}$*, tal que* $(V, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real (ou complexo) finitamente gerado.*

Então toda base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ *possui o mesmo número de vetores.*

Demonstração:

Observemos primeiramente que, do Teorema 8.3.1, segue que o espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ admite uma base (ordenada) .

Sejam

$$\begin{aligned} & \mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \\ \text{e} \qquad & \mathcal{C} \doteq \{v_1, v_2, \cdots, v_m\} \end{aligned}$$

duas bases do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.

Nosso objetivo é mostrar que

$$m = n,$$

ou seja, qualquer base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ deverá ter exatamente, $\underline{n}$ elementos.

Suponhamos, por absurdo, que

$$n > m. \tag{9.1}$$

Mostremos que isto implicará que os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são L.D. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, o que contraria o fato de formarem uma base (ordenada) .

Como os vetores

$$v_1, v_2, \cdots, v_m$$

geram o espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, pois o conjunto $\mathcal{C}$ é uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$), para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, podemos escrever o vetor u_j, como combinação linear dos vetores

$$v_1, v_2, \cdots, v_m,$$

isto é, podemos encontrar escalares

$$\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \cdots, \alpha_{mj} \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}),$$

tais que

$$\begin{aligned} u_j &= \alpha_{1j} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{mj} \cdot v_m \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot v_i \,. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Assim, de (9.2), segue que, se

$$\begin{aligned} O &= \beta_1 \cdot \underbrace{u_1}_{\substack{(9.2) \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1} \cdot v_i}} + \cdots + \beta_n \cdot \underbrace{u_n}_{\substack{(9.2) \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_{in} \cdot v_i}} \\ &= \beta_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1} \cdot v_i \right) + \cdots + \beta_n \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{in} \cdot v_i \right) \\ &= \sum_{i=j}^{n} \beta_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \, \alpha_{1i} \right) \cdot v_i \,, \end{aligned} \tag{9.3}$$

ou seja,
$$\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \, \alpha_{1j} \right) \cdot v_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \, \alpha_{mj} \right) \cdot v_m = O \,.$$

Como os vetores

$$v_1, \cdots, v_m$$

são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, deveremos ter

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \, \beta_j = 0 \,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, m\} \,.$$

As identidades acima correspondem a um sistema linear homogêneo de $\underline{m}$ equações com $\underline{n}$ incógnitas, a saber,

$$\beta_j \,, \quad \text{para} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\} \,.$$

Como estamos supondo (veja (9.1))

$$n > m,$$

existe uma solução não trivial deste sistema linear, pois há mais incógnitas,no caso $\underline{n}$, do que equações, no caso, $\underline{m}$, isto é, uma solução

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n,$$
$$\text{onde} \quad \beta_{j_o} \neq 0, \quad \text{para algum} \quad j_o \in \{1, \cdots, n\},$$

pois a solução trivial,

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$$

é sempre solução de um sistema linear homogêneo (veja a seção 3.4 do Capítulo 3).

Logo, de (9.3), segue que os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

deverão ser L.D. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, o que é um absurdo pois, por hipótese, o conjunto

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

é uma base (ordenada) de $(V, +, \cdot)$.

Logo deveremos ter

$$n \leq m.$$

De modo semelhante, mostra-se que

$$m \leq n,$$

ou seja,

$$n = m,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 9.2.1 *Resumindo, o Teorema 9.2.1 acima, nos diz que qualquer base (ordenada) de um espaço vetorial real (ou complexo), não identicamente nulo, finitamente gerado, tem o mesmo número de vetores.*

Com o resultado acima podemos introduzir a:

Definição 9.2.1 *Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real (ou complexo) finitamente gerado.*

Se

$$V = \{O\}, \tag{9.4}$$

definiremos a <u>dimensão de V</u>, *como sendo* 0 *e escreveremos*

$$\dim(V) \doteq 0. \tag{9.5}$$

Se

$$V \neq \{O\},$$

definiremos a **dimensão de** $(V,+,\cdot)$, *como sendo o número de elementos de uma base (ordenada) qualquer do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V,+,\cdot)$ *e escreveremos*

$$\dim(V) \doteq \textit{número de elementos de uma base (ordenada) qualquer de } (V,+,\cdot)\,, \quad (9.6)$$

ou seja, utilizaremos o símbolo $\dim(V)$ *para denotar a dimensão do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V,+,\cdot)$.

Em contraponto, temos a:

Definição 9.2.2 *Se um espaço vetorial real (ou complexo)* $(V,+,\cdot)$ **não** *é finitamente gerado, diremos que ele tem* **dimensão infinita**.

Com isto temos a:

Proposição 9.2.1 *Seja* $(V,+,\cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão infinita.*

Então o espaço vetorial real (ou complexo) $(V,+,\cdot)$ *possui um subconjunto formado por um número infinito de vetores L.I. no espaço vetorial real (ou complexo)* $(V,+,\cdot)$.

Demonstração:

Temos que

$$V \neq \{O\}$$

pois, caso contrário,

$$\dim(V) = 0\,,$$

o que contraria o fato de sua dimensão ser infinita.

Selecione $u_1 \in V$, de modo que

$$u_1 \neq O\,.$$

Como o espaço vetorial real (ou complexo) $(V,+,\cdot)$ não é finitamente gerado, temos que

$$[u_1] \subseteq V \quad \text{e} \quad V \neq [u_1]\,.$$

Logo, podemos encontrar

$$\begin{aligned} & u_2 \in V\,, \\ \text{tal que} \quad & u_2 \notin [u_1]\,. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Desta forma, os vetores u_1, u_2 são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V,+,\cdot)$ pois, caso contrário, se fosse L.D. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V,+,\cdot)$, deveríamos ter $u_2 \in [u_1]$, pois $u_1 \neq O$ o que contrariaria (9.7).

Além disso, temos que

$$[u_1, u_2] \subseteq V \quad \text{e} \quad V \neq [u_1, u_2]\,,$$

caso contrário, o espaço vetorial real (ou complex) o $(V, +, \cdot)$ teria dimensão finita (no caso, igual a 2), contrariando a hipótese que ele não é finitamente gerado (por ter dimensão infinita).

Prosseguindo com as idéias acima, suponhamos que tenhamos encontrado vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n \in V$$

L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.

Como o espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ não é finitamente gerado, segue que

$$[u_1, u_2, \cdots, u_n] \subseteq V \quad \text{e} \quad V \neq [u_1, u_2, \cdots, u_n].$$

Logo , existe

$$u_{n+1} \in V, \quad \text{tal que} \quad u_{n+1} \notin [u_1, u_2, \cdots, u_n], \tag{9.8}$$

assim os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1} \in V$$

deverão ser L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ pois, caso contrário, como os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, pela Proposição 7.3.4, deveríamos ter

$$u_{n+1} \in [u_1, u_2, \cdots, u_n],$$

o que contrariaria (9.8).

Portanto, para qualquer conjunto finito de vetores L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, podemos sempre encontrar um vetor, que não está no subespaço gerado por esse conjunto finito, e que, além disso, reunindo este vetor ao conjunto finito que tínhamos, obteremos um conjunto L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, ou seja, existe no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ um conjunto formado por infinitos de vetores L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, como queríamos demonstrar.

□

Como consequência da demonstração do Teorema 9.2.1, temos a:

Proposição 9.2.2 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ fixado e um espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ de dimensão $\underline{n}$, ou seja,*

$$\dim(V) = n.$$

Então qualquer conjunto de vetores do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, com mais de $\underline{n}$ elementos é, necessariamente, L.D. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo que, os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_m \in V$$

são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, com

$$m > n.$$

Então, seguindo a demonstração do Teorema 9.2.1, a partir de (9.1), obteremos um absurdo.

Logo, mais de $\underline{n}$ vetores no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, deverão ser L.D. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Como consequência temos o:

Corolário 9.2.1 *Todo subespaço vetorial de um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita, também terá dimensão finita.*

Demonstração:

Sejam $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita e W um subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.

Suponhamos, por absurdo, que o espaço vetorial real (ou complexo) $(W, +, \cdot)$ tenha dimensão infinita.

Pela Proposição 9.2.1, existiriam um subconjunto L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, formado por vetores de W, com infinitos elementos.

Como estes vetores também são vetores L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, pela Proposição 9.2.2, o número deles deveria ser menor do que a dimensão de V, que é finita, o que seria um absurdo.

Logo a dimensão do espaço vetorial real (ou complexo) $(W, +, \cdot)$ deverá ser finita, como queríamos demonstrar.

$\square$

Observação 9.2.2

1. *Na verdade podemos ser um pouco mais precisos na conclusão do Corolário 9.2.1 acima, a saber: suponhamos que W um subespaço vetorial de $(V, +_V, \cdot_V)$, que tem dimensão finita $\underline{n}$.*

   Então

   $$\dim(W) \leq n,$$
   $$\text{ou seja,} \qquad \dim(W) \leq \dim(V). \tag{9.9}$$

   Para mostrar isto basta supor, por absurdo, que

   $$\dim(W) > n.$$

   Logo existe uma base (ordenada) de $(W, +_V, \cdot_V)$ formada por mais que $\underline{n}$ vetores, em particular, existem mais que $\underline{n}$ vetores L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(W, +_V, \cdot_V)$.

Assim os elementos desta base (ordenada) de $(W, +_V, \cdot_V)$ *também serão L.I. no espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +_V\lambda, \cdot_V)$*, ou seja, existe um subconjunto formado por vetores L.I. no espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +_V, \cdot_V)$ *que têm mais que* $\underline{n}$ *elementos.*

Como

$$n > \dim(V)\,,$$

pela Proposição 9.2.2, teríamos um absurdo.

Portanto, podemos conlcuir que

$$\dim(W) \leq \dim(V)\,.$$

2. *Se o espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$ *tem dimensão* $\underline{n}$*, diremos que ele é um espaço vetorial real (ou complexo)* $\underline{n}$-**dimensional**.

Temos também o:

Corolário 9.2.2 *Suponhamos que o espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real (ou complexo)* n*-dimensional e os vetores*

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$*.*

Então estes vetores formam uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$*.*

Demonstração:

Seja

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

formado por $\underline{n}$ vetores L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.

Mostremos que o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, ou seja, que geram o espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, pois eles são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.

Suponhamos, por aburdo, que exista

$$u \in V\,,$$
$$\text{tal que} \qquad u \notin [u_1, u_2, \cdots, u_n]\,.$$

Isto implicará que os vetores

$$u, u_1, \cdots, u_n$$

são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor (veja a Proposição 7.3.4).

Mas isto contrariaria a Proposição 9.2.2, pois teríamos um conjunto L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, com mais que $n = \dim(V)$ vetores.

Logo o conjunto $\mathcal{B}$ gera o espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ e portanto o conjunto $\mathcal{B}$ será uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, como queríamos demonstrar.

□

9.3 Exemplos

Tratemos de alguns casos importantes:

Exemplo 9.3.1 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *(veja o Exemplo 4.2.3). Então*

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n\,. \tag{9.10}$$

Resolução:

Lembremos que, do Exemplo 8.2.1, temos que o conjunto

$$\begin{aligned} & \mathcal{B} \doteq \{e_1, e_2, \cdots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n, \\ \text{onde} \qquad & e_1 \doteq (1, 0, \cdots, 0), \\ & \quad \vdots, \\ & e_j \doteq (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{j-\text{ésima posição}}, \cdots, 0), \\ & \quad \vdots, \\ & e_n \doteq (0, \cdots, 0, 1) \end{aligned}$$

é uma base (ordenada) (dita, base (ordenada) canônica) do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Logo, da Definição 9.2.1, segue que

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n\,,$$

completando a resolução.

□

Temos também o:

Exemplo 9.3.2 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(veja o Exemplo 6.3.7). Então*

$$\dim[\mathscr{P}(\mathbb{R})] = \infty\,. \tag{9.11}$$

Resolução:

Lembremos que, do Exemplo 6.3.7, temos que o espaço vetorial real $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ não é finitamente gerado.

Logo, pela Definição 9.2.2, sua dimensão não pode ser finita, assim

$$\dim(\mathscr{P}(\mathbb{R}) = \infty\,,$$

completando a resolução.

□

Temos também o:

Exemplo 9.3.3 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(veja o Exemplo 4.2.7).*
Então

$$\dim[\mathscr{P}_n(\mathbb{R})] = n + 1 . \tag{9.12}$$

Resolução:
De fato, do Exemplo 6.3.6, temos que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{p_o, p_1, \cdots, p_n\} \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}), \tag{9.13}$$

formado pelos seguintes polinômios:

$$\begin{aligned} p_o(x) &\doteq 1, \\ p_1(x) &\doteq x, \\ p_2(x) &\doteq x^2 \\ &\vdots \\ p_n(x) &\doteq x^n, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

geram o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que o conjunto $\mathcal{B}$ é um conjunto L.I. no espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$, ou seja, será uma base (ordenada) para o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Portanto, da Definição 9.2.1, segue que

$$\dim[\mathscr{P}_n(\mathbb{R})] = n + 1,$$

completando a resolução.

□

Observação 9.3.1 *A base (ordenada)* $\mathcal{B}$*, dada por* (9.13)*, é denominada* base (ordenada) canônica *do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Outro importante é dado pelo:

Exemplo 9.3.4 *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$ *e o espaço vetorial real* $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(veja o Exemplo 4.2.5).*
Então

$$\dim\,[M_{m\times n}(\mathbb{R})] = m\,n . \tag{9.14}$$

Resolução:
Lembremos que, do Exemplo 6.3.4, temos que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{E_{k,l};\ \ k \in \{1, 2, \cdots, m\},\ \ l \in \{1, 2, \cdots, n\}\} \tag{9.15}$$

formado pelas matrizes de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ dadas por:

$$E_{k,l} \doteq \left(\delta_{i,j}^{k,l}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}},$$

onde, para cada

$$k \in \{1, \cdots, m,\} \quad \text{e} \quad l \in \{1, \cdots, n\}$$

temos que

$$\delta_{i,j}^{k,l} \doteq \begin{cases} 1\,, & \text{se } (i\,,j) = (k\,,l) \\ 0\,, & \text{se } (i\,,j) \neq (k\,,l) \end{cases}$$

formam uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(M_{m\times n}(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$.

Portanto, da Definição 9.2.1, segue que

$$\dim\left[M_{m\times n}(\mathbb{R})\right] = m\,n\,,$$

completando a resolução.

$\square$

Observação 9.3.2 *A base (ordenada) $\mathcal{B}$, dada por (9.15), é denominada* **base (ordenada) canônica** *do espaço vetorial real $(M_{m\times n}(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$.*

Deixaremos como exercício para o leitor o:

Exercício 9.3.1

1. *A dimensão do espaço vetorial das matrizes reais quadradas e simétricas de ordem $\underline{n}$ (veja Exemplo 5.2.5) é igual a*

$$\frac{n(n+1)}{2}\,.$$

2. *Qual a dimensão do espaço vetorial das matrizes reais quadradas e anti-simétricas de ordem $\underline{n}$ (veja o Exercício 5.2.6) ?*

9.4 Mais propriedades...

Temos o seguinte importante resultado:

Teorema 9.4.1 (do completamento) *Seja $(V\,, +\,, \cdot)$ um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão $\underline{n}$.*

Suponhamos que os vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_m \in V$$

são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,, +\,, \cdot)$ com

$$m < n = \dim(V)\,.$$

Então podemos encontrar $n - m$ vetores

$$u_{m+1}\,, \cdots\,, u_n \in V\,,$$

de modo que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_m\,, u_{m+1}, \cdots\,, u_n\}$$

é uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,, +\,, \cdot)$.

Demonstração:

Notemos que, como

$$m < n = \dim(V)\,,$$

segue que

$$[u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_m] \neq V\,,$$

ou seja, podemos encontrar

$$u_{m+1} \in V \setminus [u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_m]\,. \tag{9.16}$$

Afirmamos que os vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_m\,,u_{m+1} \in V$$

são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$.

De fato, pois se os vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_m\,,u_{m+1} \in V$$

fossem vetores L.D. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, como os vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_m \in V$$

são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, da Proposição 7.3.4, teríamos que

$$u_{m+1} \in [u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_m]\,,$$

o que contrariaria (9.16).

Notemos agora que, se

$$m+1 = n\,,$$

então teríamos que o comjunto

$$\{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_m\,,u_{m+1}\}$$

será uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$ e este conjunto contém os vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_m$$

e assim terminaríamos a demonstração.

Caso contrário, isto é, se

$$m+1 < n = \dim(V)\,,$$

então segue que

$$[u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_{m+1}] \neq V\,,$$

ou seja, podemos encontrar um vetor

$$u_{m+2} \in V \setminus [u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_{m+1}]\,. \tag{9.17}$$

Afirmamos que os vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_{m+1},u_{m+2}\in V$$

são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$.

De fato, pois se

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_{m+1}\,,u_{m+2}\in V$$

fossem vetores L.D. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, como os vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_{m+1}\in V$$

são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, pela Proposição 7.3.4, teríamos que

$$u_{m+2}\in[u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_m]\,,$$

o que contrariaria (9.17).

Como

$$\dim(V)=n<\infty$$

repetindo os argumentos acima, um número finito de vezes, encontraremos vetores

$$u_{m+1}\,,u_{m+2}\,,\cdots\,,u_{m+k}\in V\,,$$

com

$$m+k=n=\dim(V)\,,$$

de forma que o conjunto

$$\mathcal{B}\doteq\{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_m\,,u_{m+1},\cdots\,,u_{m+k}\}$$

seja L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$.

Como

$$\dim(V)=n=m+k\,,$$

segue que o conjunto $\mathcal{B}$ será uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$ e este conjunto contém os vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_m\,,$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 9.4.1 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ *(veja o Exemplo 4.2.3, com* $n\doteq 3$*).*

Encontre uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ *que contenha o vetor*

$$(1\,,1\,,-1)\in\mathbb{R}^3\,.$$

Resolução:

Sabemos, pelo Exemplo 9.3.1 (com $n = 3$), que

$$\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3\,.$$

Logo Teorema do completamento (isto é, do Teorema 9.4.1), podemos encontrar $3 - 1 =$ 2vetores, que denotaremos por

$$\begin{aligned} & u_1 \doteq (x_1\,, y_1\,, z_1) \\ \text{e} \qquad & u_2 \doteq (x_2\,, y_2\,, z_2) \in \mathbb{R}^3\,, \end{aligned} \tag{9.18}$$

que juntamente com o vetor

$$u \doteq (1\,, 1\,, -1)$$

formem uma base (ordenada) do espaço vetorial real $\left(\mathbb{R}^3\,, +\,, \cdot\right)$, ou ainda, seja, L.I. no espaço vetorial real $\left(\mathbb{R}^3\,, +\,, \cdot\right)$.

Porém, do Exemplo 7.2.2, sabemos que isto é equivalente ao determinante da matriz

$$\begin{aligned} A &\doteq \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \\ -1 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ &= x_2\,(y_1 + z_1) - y_2\,(x_1 + z_1) + z_2\,(y_1 - x_1) \end{aligned} \tag{9.19}$$

ser diferente de zero.

Há uma infinidade de possibilidades para que isto aconteça, por exemplo, tomando

$$\begin{aligned} & (x_1\,, y_1\,, z_1) \doteq (0\,, 1\,, 1) \\ \text{e} \qquad & (x_2\,, y_2\,, z_2) \doteq (0\,, 0\,, 1)\,, \end{aligned} \tag{9.20}$$

teremos:

$$\begin{aligned} \det(A) &\overset{(9.19)\ \text{e}\ (9.20)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \neq 0\,. \end{aligned}$$

Portanto uma base (ordenada) do espaço vetorial real $\left(\mathbb{R}^3\,, +\,, \cdot\right)$, que contenha o vetor

$$u = (1\,, 1\,, -1)$$

é, por exemplo, o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{(1\,, 1\,, -1)\,, (0\,, 1\,, 1)\,, (0\,, 0\,, 1)\}\,,$$

completando a resolução.

$\square$

Outro exemplo muito importante é o, baseado no Exemplo 8.4.1:

Exemplo 9.4.2 *Encontrar as dimensões do espaço vetorial real*

$$(V, +, \cdot) = (\mathbb{C}, +, \cdot_{\mathbb{R}})$$

e do espaço vetorial complexo

$$(W, +, \cdot) = (\mathbb{C}, +, \cdot_{\mathbb{C}}),$$

onde as operações $+$, $\cdot_{\mathbb{R}}$ *e* $\cdot_{\mathbb{C}}$, *foram definidas em* (8.12), (8.13) *e* (8.14), *respectivamente.*

Resolução:

Como vimos na resolução do Exemplo 8.4.1, o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{(1, 0), (0, 1)\} \tag{9.21}$$

é uma base (ordenada) para o espaço vetorial real $(\mathbb{C}, +, \cdot_{\mathbb{R}})$, portanto a sua dimensão será igual a 2, ou seja,

$$\dim(V) = 2.$$

Por outro lado o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{(1, 0)\} \tag{9.22}$$

é uma base (ordenada) para o espaço vetorial complexo $(\mathbb{C}, +, \cdot_{\mathbb{C}})$, portanto a sua dimensão será igual a 1, ou seja,

$$\dim(W) = 1,$$

completando a resolução.

□

9.5 Dimensão da soma de subespaços vetoriais

Começaremos esta seção com o seguinte importante resultado:

Proposição 9.5.1 *Seja* $(V, +_V, \cdot_V)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita.*

Se os conjuntos U *e* W *são subespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +_V, \cdot_V)$, *então teremos que*

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W), \tag{9.23}$$

ou ainda,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \tag{9.24}$$

Demonstração:

Do Corolário 9.2.1, segue que todo subespaço vetorial de um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita, terá também dimensão finita.

Em particular, temos que

$$\dim(U), \ \dim(W), \ \dim(U \cap W), \ \dim(U + W) \leq \dim(V) < \infty.$$

Se

$$m \doteq \dim(U \cap W) < \infty\,, \tag{9.25}$$

da Definição ??, podemos encontrar um conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{v_1\,, v_2\,, \cdots, v_m\}\,,$$

formado por vetores do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,, +_V\,, \cdot_V)$, que é uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(U \cap W\,, +_V\,, \cdot_V)$.

Como estes vetores de $U \cap W \subseteq U$, são L.I. no o espaço vetorial real (ou complexo) $(U\,, +_V\,, \cdot_V)$, pelo Teorema 9.4.1, podemos encontrar vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots, u_p \in U\,,$$

tais que o conjunto

$$\mathcal{A} \doteq \{v_1\,, v_2\,, \cdots, v_m\,, u_1\,, u_2\, \cdots, u_p\}$$

é uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(U\,, +_V\,, \cdot_V)$.

Notemos que, neste caso, estamos supondo

$$\dim(U) = m + p\,. \tag{9.26}$$

Por outro lado, os vetores

$$v_1, \cdots, v_m$$

são L.I. em $(V\,, +\,, \cdot)$ e também pertencem a W.

Logo, pelo Teorema (9.4.1), é possível encontrar vetores

$$w_1, \cdots, w_q \in W\,,$$

de modo que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_q\}\,,$$

seja uma base (ordenada) de $(W, +_V, \cdot_V)$.

Notemos que, neste caso estamos supondo

$$\dim(W) = m + q\,. \tag{9.27}$$

Com isto, teremos:

$$\begin{aligned} &\dim(U \cap W) = m\,, \\ &\dim(U) = m + p \\ \text{e} \qquad &\dim(W) = m + q\,. \end{aligned} \tag{9.28}$$

Notemos que, na situação acima, teremos:

$$\begin{aligned} \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) &\overset{(9.30)}{=} (m + p) + (m + q) - m \\ &= m + p + q\,. \end{aligned} \tag{9.29}$$

Sendo, de (9.29), a fim de mostrarmos a validade da identidade (9.23), é necessário (e, na verdade, suficiente) mostrar que

$$\dim(U + W) = m + p + q\,. \tag{9.30}$$

Para tanto, basta mostrarmos que o conjunto

$$\mathcal{D} \doteq \{u_1\,, u_2 \cdots\,, u_p\,, w_1\, w_2\,, \cdots\,, w_q\,, v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_m\} \tag{9.31}$$

é uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(U + W\,, +_V\,, \cdot_V)$.

Mostremos primeiramente que os vetores do conjunto $\mathcal{D}$ geram o espaço vetorial real (ou complexo) $(U + W\,, +_V\,, \cdot_V)$.

Para isto, dado

$$v \in U + W\,,$$

segue que, da Definição (5.3.1), podemos encontrar

$$\begin{aligned} & u \in U \\ \text{e} \quad & w \in W\,, \\ \text{tais que} \quad & v = u + w\,. \end{aligned} \tag{9.32}$$

Como $u \in U$, e o conjunto $\mathcal{A}$ é uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(U\,, +_V\,, \cdot_V)$, segue que o vetor $\underline{u}$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_p, v_1, \cdots\,, v_m\,.$$

De modo semelhante, como $w \in W$, e $\mathcal{B}$ base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(W\,, +_V\,, \cdot_V)$, segue que o vetor $\underline{w}$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores

$$w_1\,, w_2\,, \cdots\,, w_q\,, v_1, \cdots\,, v_m\,.$$

Deste modo, o vetor

$$v = u + w$$

poderá ser escrito como uma combinação linear dos vetores

$$\begin{aligned} & u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_p\,, v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_m\,, w_1\,, w_2\,, \cdots\,, w_q\,, \\ \text{ou seja,} \quad & v \in [u_1, \cdots\,, u_p, v_1, \cdots\,, v_m, w_1, \cdots\,, w_q]\,, \\ \text{mostrando que} \quad & U + W = [u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_p\,, v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_m\,, w_1\,, w_2\,, \cdots\,, w_q]\,, \end{aligned}$$

ou seja, o conjunto $\mathcal{D}$ gera o espaço vetorial real (ou complexo) $(U + W\,, +_V\,, \cdot_V)$.

Mostremos agora, que o conjunto $\mathcal{D}$ é L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,, +_V\,, \cdot_V)$.

Suponhamos que os escalares

$$\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots\,, \alpha_p\,, \beta_1\,, \beta_2\,, \cdots\,, \beta_q\,, \delta_1\,, \delta_2\,, \cdots\,, \delta_m \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})\,,$$

são tais que

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p + \beta_1 \cdot w_1 + \cdots + \beta_q \cdot w_q + \delta_1 \cdot v_1 + \cdots + \delta_m \cdot v_m = O\,, \tag{9.33}$$

que pode ser reescrita como:

$$\underbrace{\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p + \delta_1 \cdot v_1 + \cdots + \delta_m \cdot v_m}_{\in U} = \underbrace{-\beta_1 \cdot w_1 - \cdots - \beta_q \cdot w_q}_{\in W},$$

ou seja, $$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p + \delta_1 \cdot v_1 + \cdots + \delta_m \cdot v_m = -\beta_1 \cdot w_1 - \cdots - \beta_q \cdot w_q \in U \cap W.$$

Em particular, teremos que:

$$-\beta_1 \cdot w_1 - \cdots - \beta_q \cdot w_q \in U \cap W = [v_1, v_2, \cdots, v_m].$$

Consequentemente, podemos encontrar escalares

$$\gamma_1, \alpha_2, \cdots, \gamma_m \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}),$$

tais que $$-\beta_1 \cdot w_1 - \cdots - \beta_q \cdot w_q = \gamma_1 \cdot v_1 + \cdots + \gamma_m \cdot v_m,$$

ou seja, $$\beta_1 \cdot w_1 + \cdots + \beta_q \cdot w_q + \gamma_1 \cdot v_1 + \cdots + \gamma_m \cdot v_m = 0.$$

Como os vetores

$$w_1, w_2, \cdots, w_q, v_1, v_2, \cdots, v_m \in W$$

são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(W, +_V, \cdot_V)$ (pois formam uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(W, +_V, \cdot_V)$), segue-se que deveremos ter

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_m = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_q = 0. \tag{9.34}$$

Assim, de (9.34), a equação (9.33), tornar-se-á:

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p + \delta_1 \cdot v_1 + \cdots + \delta_m \cdot v_m = 0.$$

Mas os vetores

$$u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_m,$$

são L.I. em $(U, +_V, \cdot_V)$ (pois formam uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(U, +_V, \cdot_V)$).

Logo segue-se que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \delta_1 = \cdots = \delta_m = 0. \tag{9.35}$$

Portanto, de (9.34) e (9.35), segue que os vetores do conjunto $\mathcal{D}$ (dado por (9.31)) são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +_V, \cdot_V)$ e assim uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +_V, \cdot_V)$.

Portanto segue que o conjunto $\mathcal{D}$, dado por (9.31), será um base (ordenada) para o espaço vetorial real (ou complexo) $(U + W, +_V, \cdot_V)$, ou ainda,

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= m + q \\ &\overset{(9.29)}{=} \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W), \end{aligned}$$

ou seja, vale a identidade (9.23), completando a demonstração.

□

Corolário 9.5.1 *Seja* U *um subespaço vetorial de um espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$ *de dimensão finita.*

Se

$$\dim(U) = \dim(V)\,, \tag{9.36}$$

então deveremos ter

$$U = V\,.$$

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que

$$U \neq V$$

(temos que $U \subseteq V$), isto é, existe um vetor

$$\begin{aligned} & u_1 \in V\,, \\ \text{tal que} \qquad & u_1 \notin U\,, \end{aligned}$$

em particular,

$$u_1 \neq O$$

pois, se u_1 fosse o vetor O estaria em U.

Definamos

$$W \doteq [u_1]\,.$$

Logo

$$\dim(W) = 1\,. \tag{9.37}$$

Como

$$\begin{aligned} & u_1 \notin U\,, \\ \text{segue que} \qquad & U \cap W = \{O\}\,, \\ \text{logo,} \qquad & \dim(U \cap W) = 0\,. \end{aligned} \tag{9.38}$$

Por outro lado, Proposição 9.5.1, segue que

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &\overset{(9.24)}{=} \dim(U) + \underbrace{\dim(W)}_{\overset{(9.37)}{=}1} + \underbrace{\dim(U \cap W)}_{\overset{(9.38)}{=}0} \\ &= \dim(U) + 1 \\ &\overset{\dim(U)\overset{(9.37)}{=}\dim(V)}{=} \dim(V) + 1 \\ &> \dim(V)\,, \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois o conjunto $U + W$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ logo, do item 1. da Observação 9.2.2, deveremos ter

$$\dim(U + W) \leq \dim(V)\,.$$

Portanto podemos concluir que
$$U = V,$$
como queríamos demonstrar.

□

Observação 9.5.1 *Notemos que se* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita,* U *e* W *são subespaços vetoriais doe espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$ *(como na Proposição 9.5.1) e se além disso, tivermos*

$$V = U + W \tag{9.39}$$
$$\textit{e} \qquad \dim(U) + \dim(W) > \dim(V), \tag{9.40}$$
$$\textit{então} \qquad U \cap W \neq \{O\}$$

ou seja, a soma $U + W$*, **não** será uma soma direta.*

De fato, suponhamos, por absurdo, que a soma $U + W$*, fosse uma soma direta.*

Em particular, deveríamos ter
$$U \cap W = \{O\}.$$

Logo, pela Proposição 9.5.1, teríamos
$$\begin{aligned} 0 &= \dim(U \cap W) \\ &\overset{(9.24)}{=} \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) \\ &\overset{(9.39)}{=} \dim(U) + \dim(W) - \dim(V) \overset{(9.40)}{>} 0, \end{aligned}$$

o que seria um absurdo.

Logo a soma $U + W$ ***não** pode ser uma soma direta.*

Também como consequência da Proposição 9.5.1 temos o:

Corolário 9.5.2 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita e* U *e* W *são subespaços vetoriais do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$*, de modo que*
$$V = U + W.$$

Então
$$V = U \oplus W \tag{9.41}$$
$$\textit{se, e somente se,} \qquad \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W). \tag{9.42}$$

Demonstração:

Notemos que, pela Definição 5.3.2, teremos:
$$\begin{aligned} & V = U \oplus W \\ \text{se, e somente se,} \quad & U \cap W = \{O\}, \\ \text{que é equivalente a dizer que} \quad & \dim(U \cap W) = 0, \end{aligned}$$

que, da Proposição (9.5.1), é equivalente a identidade

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W),$$

completando a demonstração do resultado.

□

9.6 Mais exemplos...

Começaremos pelo:

Exemplo 9.6.1 *Consideremos* U, W *como no Exemplo 6.3.8.*
Encontrar bases e as dimensões dos subespaços vetoriais

$$U,\ W,\ U \cap W \ \ e \ \ U + W$$

do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$.

Resolução:
Vimos na resolução do Exemplo 6.3.8 (veja (6.79), (6.83), (6.88) e (6.92)), que:

$$U = [(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,1,0,1)], \tag{9.43}$$
$$W = [(1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,1)], \tag{9.44}$$
$$U \cap W = [(1,0,-1,0), (0,1,0,1)], \tag{9.45}$$
$$U + W = [(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,1,0,1), (1,0,0,1), (0,0,1,1)]. \tag{9.46}$$

Verifiquemos a dependência ou independência linear de cada um dos conjuntos de vetores acima que determinam os subespaços gerados.
Para o subsepaço vetorial U:
Estudemos a dependência linear dos vetores que geram $(U, +, \cdot)$, ou seja, os vetores (veja (9.43))

$$(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,1,0,1).$$

Verifiquemos se os vetores acima são L.I. no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$.
Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\alpha \cdot (1,1,0,0) + \beta \cdot (0,1,1,0) + \gamma \cdot (0,1,0,1) = (0,0,0,0),$$

isto será equivalente à: $$(\alpha, \alpha + \beta + \gamma, \beta, \gamma) = (0,0,0,0),$$

ou seja, $$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases},$$

ou ainda, $$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Logo, do fato acima e da Definição 7.2.1, podemos conclui que os vetores

$$(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1).$$

são L.I. no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4,+,\cdot)$.

Portanto, de (9.43), do fato acima e da Definição 8.2.1, temos que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1)\}$$

será uma base (ordenada) para o espaço vetorial real $(U,+,\cdot)$.

Logo, do fato acima e da Definição 9.2.1, temos que

$$\dim(U) = 3. \tag{9.47}$$

Para o subespaço vetorial W:

Estudemos a dependência linear dos vetores que geram o espaço vetorial real $(W,+,\cdot)$, isto é, dos vetores (veja (9.44))

$$(1,0,0,1)\ ,\ (0,1,0,1)\ ,\ (0,0,1,1).$$

Verifiquemos se os vetores acima são L.I. no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4,+,\cdot)$.

Sejam $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\alpha\cdot(1,0,0,1)+\beta\cdot(0,1,0,1)+\gamma\cdot(0,0,1,1)=(0,0,0,0),$$

isto será equivalente à: $(\alpha,\beta,\gamma,\alpha+\beta+\gamma)=(0,0,0,0)$,

ou seja, $\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\\ \alpha+\beta+\gamma=0\end{cases}$

ou ainda, $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Logo, do fato acima e da Definição 7.2.1, podemos conclui que os vetores

$$(1,0,0,1)\ ,\ (0,1,0,1)\ ,\ (0,0,1,1)$$

são L.I. o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4,+,\cdot)$.

Portanto, de (9.44), do fato acima e da Definição 8.2.1, temos que o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$$

será uma base (ordenada) para o espaço vetorial rea $(W,+,\cdot)$.

Logo, do fato acima e da Definição 9.2.1, temos que

$$\dim(W) = 3. \tag{9.48}$$

Para o subespaço vetorial $U \cap W$:

Estudemos a dependência linear dos vetores que geram $(U \cap W, +, \cdot)$, isto é, os vetores (veja (9.45))

$$(1\,,0\,,-1\,,0)\ ,\ (0\,,1\,,0\,,1)\,.$$

Verifiquemos se os vetores acima são L.I. no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$.

Sejam $\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\alpha \cdot (1\,,0\,,-1\,,0) + \beta \cdot (0\,,1\,,0\,,1) = (0\,,0\,,0\,,0)\,,$$

isto será equivaelente à $\quad (\alpha\,,\beta\,,-\alpha\,,\beta) = (0\,,0\,,0\,,0)\,,$

ou seja,
$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ -\alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases},$$

ou ainda, $\quad \alpha = \beta = 0\,.$

Logo, do fato acima e da Definição 7.2.1, podemos conclui que os vetores

$$(1\,,0\,,-1\,,0)\ ,\ (0\,,1\,,0\,,1)$$

são L.I. no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$.

Portanto, de (9.45), do fato acima e da Definição 8.2.1, temos que o conjunto

$$\mathcal{D} \doteq \{((1\,,0\,,-1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\}$$

será uma base (ordenada) para o espaço vetorial real $(U \cap W\,,+\,,\cdot)$.

Logo, do fato acima e da Definição 9.2.1, temos que

$$\dim(U \cap W) = 2\,. \tag{9.49}$$

<u>Para o subespaço vetorial $U + W$:</u>

Pela Proposição 9.5.1, temos

$$\begin{aligned}\dim(U+W) &= \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \\ &\overset{(9.47),(9.48)\text{ e }(9.49)}{=} 3+3-2 \\ &= 4 \\ &\overset{(9.10),\text{ com } n \doteq 4}{=} \dim\left(\mathbb{R}^4\right)\,.\end{aligned}$$

Logo, do fato acima e pela Proposição 9.5.1, segue que

$$U + W = \mathbb{R}^4\,. \tag{9.50}$$

Logo podemos considerar a base (ordenada) canônica de $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$ com uma base (ordenada) para $(U + W\,,+\,,\cdot)$, ou seja,

$$\mathcal{D} \doteq \{((1\,,0\,,0\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,0\,,1\,,0)\,,(0\,,0\,,0\,,1)\}$$

será uma base (ordenada) para o espaço vetorial real $(U+W\,,+\,,\cdot)$, completando a resolução.

□

Observação 9.6.1 *Notemos que, no Exemplo 9.6.1 acima, temos que*

$$\dim(U \cap W) \overset{(9.49)}{=} 2 > 0\,.$$

Logo

$$U \cap W \neq \{0\}$$

e assim, de (9.50), segue que

$$\mathbb{R}^4 = U + W\,,$$

mas esta soma **não** *é uma soma direta.*

Temos também o:

Exemplo 9.6.2 *Consideremos o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ (veja o Exemplo 4.2.7, com $n \doteq 3$).*

Sejam

$$U \doteq \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,;\, p(0) = p(1) = 0\} \tag{9.51}$$

$$\text{e} \qquad W \doteq \{q \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,;\, q(-1) = 0\}\,. \tag{9.52}$$

Encontrar bases e as dimensões para os subespaços vetoriais

$$U\,,\; W\,,\; U \cap W \quad e \quad U + W$$

do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que os conjuntos U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Para o subespaço vetorial U :

Se

$$p \in U \subseteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,$$

de (4.38) (com $n = 3$), podemos encontrar escalares

$$a_o\,, a_1\,, a_2\,, a_3 \in \mathbb{R}\;,\,,$$

$$\text{tais que} \quad p(x) = a_o + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{9.53}$$

$$\text{Assim} \quad p(0) \overset{(9.53),\text{ com } x=0}{=} a_o \tag{9.54}$$

$$\text{e} \quad p(1) \overset{(9.53),\text{ com } x=1}{=} a_o + a_1 + a_2 + a_3\,. \tag{9.55}$$

Logo, de (9.51), temos que;

$$p \in U$$

$$\text{se, e somente se,} \quad p(0) = p(1) = 0$$

$$\text{que, junto com (9.54) e (9.55), teremos:} \quad \begin{cases} a_o = 0 \\ a_o + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} a_o = 0 \\ a_1 = -a_2 - a_3 \end{cases}, \tag{9.56}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} p(x) &\overset{(9.55)\text{ e }(9.56)}{=} -(a_2 + a_3)\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 \\ &= a_2\, \left(x^2 - x\right) + a_3\, \left(x^3 - x\right) . \end{aligned} \tag{9.57}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Definindo-se $p_1, p_2 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ dados por

$$p_1(x) \doteq x^2 - x \tag{9.58}$$

$$\text{e} \qquad p_2(x) \doteq x^3 - x\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{9.59}$$

Notemos que

$$p_1\,, p_2 \in U\,. \tag{9.60}$$

De fato, pois

$$\begin{aligned} p_1(0) &\overset{(9.58),\text{ com } x=0}{=} 0\,, \\ p_1(1) &\overset{(9.58),\text{ com } x=1}{=} 0\,, \\ p_2(0) &\overset{(9.59),\text{ com } x=0}{=} 0\,, \\ p_2(1) &\overset{(9.59),\text{ com } x=1}{=} 0\,, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \quad p_1(0) = p_1(1) = 0\,,$$

$$\text{e} \quad p_2(0) = p_2(1) = 0\,,$$

que, juntamente com (9.51), mostram a validade de (9.71).

Logo, teremos que

$$p \in U\,,$$

que é equivalente à:

$$\begin{aligned} p(x) &\overset{(9.57)}{=} a_2\, \left(x^2 - x\right) + a_3\, \left(x^3 - x\right) \\ &\overset{(9.58)\text{ e }(9.59)}{=} a_2\, p_1(x) + a_3\, p_2(x) \\ &= (a_2 \cdot p_1 + a_3 \cdot p_2)(x)\,, \forall x \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ a_2\,, a_3 \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \quad U = [p_1, p_2]\,. \tag{9.61}$$

Além disso os vetores p_1, p_2 são L.I. no espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$, pois têm graus diferentes.

Deixaremos os detalhes da demonstração deste fato como exercício para o leitor.

Portanto, de (9.61), do fato acima e da Definição 8.2.1, segue que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{p_1, p_2\}$$

será uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(U, +, \cdot)$.

Logo, do fato acima e da Definição 9.2.1, temos que

$$\dim(U) = 2. \tag{9.62}$$

Para o subespaço vetorial W:

Se

$$q \in W \subseteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R}),$$

de (4.38) (com $n = 3$), podemos encontrar escalares

$$a_o, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},,$$

$$\text{tais que} \quad q(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9.63}$$

Assim

$$q(-1) \overset{(9.63),\ \text{com } x=-1}{=} a_o + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-1)^2 + a_3 \cdot (-1)^3 \tag{9.64}$$

$$= a_o - a_1 + a_2 - a_3. \tag{9.65}$$

Logo

$$q \in W,$$

de (9.52), teremos: $\quad q(-1) = 0,$

que, junto com (12.61), nos fornece: $\quad a_o - a_1 + a_2 - a_3 = 0$

$$\text{ou ainda,} \quad a_3 = -a_o + a_1 - a_2, \tag{9.66}$$

$$q(x) \overset{(9.63) \text{ e } (9.66)}{=} a_o + a_1 x + a_2 x^2 + (-a_o + a_1 - a_2) x^3$$

$$= a_o \left(1 - x^3\right) + a_1 \left(x + x^3\right) + a_2 \left(x^2 - x^3\right), \tag{9.67}$$

para $x \in \mathbb{R}$.

Definindo-se $q_1, q_2, q_3 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, dados por

$$q_1(x) \doteq 1 - x^3, \tag{9.68}$$

$$q_2(x) \doteq x + x^3 \tag{9.69}$$

$$\text{e} \quad q_3(x) \doteq x^2 - x^3, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{9.70}$$

temos que

$$q_1, q_2, q_3 \in W. \tag{9.71}$$

De fato, pois

$$q_1(-1) \overset{(9.68),\text{ com } x=-1}{=} 0,$$
$$q_2(-1) \overset{(9.69),\text{ com } x=-1}{=} 0$$
$$\text{e} \quad q_3(-1) \overset{(9.70),\text{ com } x=-1}{=} 0, \tag{9.72}$$

que juntamente com (9.52), mostram a validade de (9.71).

Logo, teremos que

$$q \in W,$$

que é equivalente à:

$$q(x) \overset{(9.67)}{=} a_o\,(1-x^3) + a_1\,(x+x^3) + a_2\,(x^2-x^3)$$
$$\overset{(9.68),(9.69)\text{ e }(9.70)}{=} a_o\,q_1(x) + a_1\,q_2(x) + a_3\,q_3(x)$$
$$= (a_o \cdot q_1 + a_1 \cdot q_2 + a_2 \cdot q_3)(x)\,, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } a_o\,, a_1\,, a_2 \in \mathbb{R}\,,$$
$$\text{ou seja,} \quad W = [q_1\,, q_2\,, q_3]\,. \tag{9.73}$$

Além disso os vetores $q_1\,, q_2\,, q_3$ são L.I. no espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$.

Deixaremos os detalhes da demonstração deste fato como exercício para o leitor.

Além disso os vetores q_1, q_2, q_3 são L.I. em $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Portanto, de (9.73), do fato acima e da Definição 8.2.1, segue que o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{q_1\,, q_2\,, q_3\}$$

será uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(W\,, +\,, \cdot)$.

Logo, do fato acima e da Definição 9.2.1, temos que

$$\dim(W) = 3\,. \tag{9.74}$$

<u>Para o subespaço vetorial $U \cap W$:</u>

Se

$$p \in U \cap W \subseteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,$$

(com $n = 3$), podemos encontrar escalares

$$a_o\,, a_1\,, a_2\,, a_3 \in \mathbb{R}\,,$$
$$\text{tais que} \quad p(x) = a_o + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{9.75}$$

Assim, de (9.54), (9.55) e (12.61), devemos ter:

$$p(0) = a_o\,, \tag{9.76}$$
$$p(1) = a_o + a_1 + a_2 + a_3 \tag{9.77}$$
$$\text{e} \quad p(-1) = a_o - a_1 + a_2 - a_3\,. \tag{9.78}$$

Logo, de (9.51), (9.52), (9.76), (9.77) e (9.78), teremos:

$$p \in U \cap W$$

$$\text{se, e somente se,} \quad \begin{cases} a_o = 0 \\ a_o + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_o - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases},$$

$$\text{ou seja (exercício),} \quad \begin{cases} a_o = a_2 = 0 \\ a_3 = -a_1 \end{cases}. \tag{9.79}$$

Substituindo-se (9.79) em (9.75), obteremos:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_1\, x - a_1\, x^3 \\ &= a_1\, \left(x - x^3\right), \end{aligned} \tag{9.80}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Definindo-se $r \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, por

$$r(x) \doteq x - x^3, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{9.81}$$

temos que $r \in W$.

De fato, pois

$$\begin{aligned} r(0) &\overset{(9.81),\ \text{com } x=0}{=} 0, \\ r(1) &\overset{(9.81),\ \text{com } x=1}{=} 0, \\ r(-1) &\overset{(9.81),\ \text{com } x=-1}{=} 0, \end{aligned}$$

ostrando a validade da afirmação.

Logo, de (9.80) e (9.81), temos que

$$U \cap W = [r]. \tag{9.82}$$

Além disso o vetor

$$r \neq O \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}),$$

será L.I. no espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Logo, de (9.82), do fato acima e da Definição 8.2.1, segue o conjunto

$$\mathcal{D} \doteq \{r\}$$

é uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(U \cap W, +, \cdot)$.

Logo, do fato acima e da Definição 9.2.1, temos que

$$\dim(U \cap W) = 1. \tag{9.83}$$

<u>Para o subespaço vetorial $U + W$:</u>

Notemos que, da Proposição 9.5.1, segue que

$$\begin{aligned}
\dim(U+W) &\overset{(9.24)}{=} \dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)\\
&\overset{(9.62),(9.74),(9.83)}{=} 2+3-1\\
&= 4\\
&\overset{(9.12),\text{ com } n=3}{=} \dim\left[\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\right].
\end{aligned}$$

Logo, da Proposição 9.5.1, segue que

$$U+W=\mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \tag{9.84}$$

e assim podemos tomar como base (ordenada) para o subsepaço vetorial $U+W$, o conjunto formado pelos polinômios $s_o, s_1, s_2, s_3 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, dados por

$$\begin{aligned}
s_o(x) &\doteq 1\,,\\
s_1(x) &\doteq x\,,\\
s_2(x) &\doteq x^2\,,\\
s_3(x) &\doteq x^3\,, \quad \text{para} \quad x\in\mathbb{R}\,,
\end{aligned}$$

ou seja, a base (ordenada) canônica do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, completando a resolução;

□

Observação 9.6.2 *Como*

$$\dim(U\cap W) \overset{(9.83)}{=} 1 \neq 0\,,$$

temos que

$$U\cap W \neq \{O\}.$$

Logo, do fato acima, de (9.84) *e da Definição 5.3.2, segue*

$$\mathscr{P}_3(\mathbb{R}) = U+W\,,$$

mas esta soma **não** *é uma soma direta.*

9.7 Exercícios

Exercício 9.7.1 *Encontrar, em cada um dos itens, a dimensão do subespaço W do espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$ (veja o Exercício 8.5.2).*

1. $W \doteq \left\{(x\,,y\,,z\,,t)\in\mathbb{R}^4\,;\, x-y=0 \text{ e } x+2y+t=0\right\}$ *e* $V\doteq\mathbb{R}^4$.

2. $W\doteq\{X\in M_2(\mathbb{R})\,;\, A\cdot X = X\}$ *onde* $A\doteq\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ *e* $V=M_2(\mathbb{R})$.

3. $W \doteq \{p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,;\, p''(x) = 0\ ,\forall x \in \mathbb{R}\}$ *e* $V = \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

4. $W \doteq \{X \in M_2(\mathbb{R})\,;\, A \cdot X = X \cdot A\}$ *onde* $A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $V = M_2(\mathbb{R})$.

Exercício 9.7.2 *Dados* U, W *subespaços do espaço vetorial real* $(V\,,+_V\,,\cdot_V)$, *determinar, em cada um dos itens abaixo:*

(i) uma base (ordenada) e a dimensão do espaço vetorial real $(U\,,+_V\,,\cdot_V)$;

(ii) uma base (ordenada) e a dimensão do espaço vetorial real $(W\,,+_V\,,\cdot_V)$;

(iii) uma base (ordenada) e a dimensão do espaço vetorial real $(U+W\,,+_V\,,\cdot_V)$

(iv) uma base (ordenada) e a dimensão de do espaço vetorial real $(U\cap W\,,+_V\,,\cdot_V)$,

nos onde:

1. $U \doteq \left\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x+y+z=0\right\}$, $W \doteq \{(x\,,y\,,0)\,;\, x\,,y \in \mathbb{R}\}$ *e* $V = \mathbb{R}^3$, *munido das operações usuais de soma de ternas ordenadas e multiplicação de número real por terna ordenada.*

2. $U \doteq \{A \in M_2(\mathbb{R})\,;\ \mathrm{tr}(A) = 0\}$, $W \doteq \{A \in M_2(\mathbb{R})\,;\, A^t = -A\}$ *e* $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz.*

3. $U \doteq \{p \in V\,;\, p'(x) = 0\ ,\forall x \in \mathbb{R}\}$, $W \doteq \{p \in V\,;\, p(0) = p(1)\}$ *e* $V \doteq \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função.*

Exercício 9.7.3 *Sejam* U *e* W *dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial real* $(V\,,+\,,\cdot)$, *que tem dimensão* $\underline{n}$. *Suponha que*

$$\dim U > \frac{n}{2} \quad e \quad \dim W > \frac{n}{2}.$$

Mostre que $U \cap W \neq \{O\}$.

Exercício 9.7.4 *Dados* U, W *subespaços vetoriais do espaço vetorial real* $(V\,,+\,,\cdot)$, *determinar;*

(i) *a dimensão do subespaço vetorial* U.

(ii) *a dimensão do susbespaço vetorial* W.

(iii) *uma base e a dimensão do susbespaço vetorial* $U+W$.

(iv) *a dimensão do susbespaço vetorial* $U \cap W$,

nos em cada um dos seguintes casos:

1. $U \doteq \left\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x+y+z=0\right\}$, $W \doteq \{(x\,,y\,,0)\,;\, x\,,y \in \mathbb{R}\}$ *e* $V \doteq \mathbb{R}^3$, *munido das operações usuais.*

2. $U \doteq \{A \in M_2\,;\ \mathrm{tr}(A) = 0\}$, $W \doteq \{A \in M_2\,;\ A^t = -A\}$ *e* $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais, onde* $\mathrm{tr}(A)$ *denota a soma dos elementos da diagonal principal da matriz* A, *chamado de* **traço da matriz** A.

3. $U \doteq \{p(t) \in V\,;\ p'(t) = 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}\}$, $W \doteq \{p(t) \in V\,;\ p(0) = p(1)\}$ *e* $V \doteq \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, *munido das operações usuais.*

Capítulo 10

Coordenadas de um vetor em relação a uma base (ordenada)

10.1 Introdução

A seguir trataremos de descrever um vetor de um espaço vetorial real (ou complexo) em termos de matrizes.

Para tanto temos a:

10.2 Definições e exemplos

Sejam $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real (ou complexo) finitamente gerado e

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

uma base (ordenada) de $(V, +, \cdot)$.

Como $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) doespaço vetorial real (ou complexo) e $(V, +, \cdot)$ (veja a Definição 8.2.1), todo vetor de $u \in V$, deve poder ser escrito como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, isto é, podemos encontrar escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}),$$

tais que

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u_i \,. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Fixada a base (ordenada) $\mathcal{B}$, pela Proposição 8.3.2, os escalares

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \text{(ou } \mathbb{C})$$

obtido acima serão <u>**unicamente**</u> determinados pelo vetor $\underline{u}$.

Com isto podemos introduzir a:

Definição 10.2.1 *Os coeficientes*

$$\alpha_1\,,\alpha_2\,,\cdots\,,\alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{)}$$

obtidos (de modo único) verificando (10.1)*, serão denominados* **coordenadas do vetor** u *em relação à base (ordenada)* $\mathcal{B}$*, do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Denotaremos por $[u]_{\mathcal{B}}$ *(ou por* $u_{\mathcal{B}}$*) a matriz de* $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ *(ou* $M_n(\mathbb{C})$*), dada por:*

$$[u]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad (10.2)$$

que será denominada **matriz das coordenadas do vetor** u *em relação à base (ordenada)* $\mathcal{B}$*, do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 10.2.1 *Mostre que o conjunto*

$$\mathcal{B} \doteq \{(1\,,1\,,1)\,,(0\,,1\,,1)\,,(0\,,0\,,1)\} \qquad (10.3)$$

é uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$.

Encontre as coordenadas do vetor

$$u \doteq (1\,,2\,,0) \in \mathbb{R}^3 \qquad (10.4)$$

em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$ *e a matriz das coordenadas do vetor* $\underline{u}$ *(isto é,* $[u]_{\mathcal{B}}$*) em relação à base (ordenada)* $\mathcal{B}$.

Resolução:

Sabemos que

$$\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3\,.$$

Logo, para verificar $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$, basta verificar se os vetores do conjunto $\mathcal{B}$ são L.I. no esapço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$.

Utilizando-se o Exemplo 7.2.2, vemos que estes vetores são de fato L.I. no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$, pois

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Exercício}}{=} 1 \neq 0\,.$$

Portanto, o conjunto $\mathcal{B}$ será uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$.

Para encontrarmos as coordenadas do vetor $\underline{u}$ em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, pela Definição 10.2.1, precisaremos encontrar os escalares

$$\alpha\,,\beta\,,\gamma\in\mathbb{R}\,,$$

de modo que,

$$\begin{aligned} u &\overset{(10.4)}{=} (1\,,2\,,0)\\ &= \alpha\cdot(1\,,1\,,1)+\beta\cdot(0\,,1\,,1)+\gamma\cdot(0\,,0\,,1)\\ &\overset{(4.26)\text{ e }(4.27),\text{ com } n=3}{=} (\alpha\,,\alpha+\beta\,,\alpha+\beta+\gamma) \end{aligned}$$

que é equivalente ao sistema linear:

$$\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha+\beta=2\\ \alpha+\beta+\gamma=0\end{cases},$$

cuja (única) solução será (exercício):

$$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1\\ \gamma=-2\end{cases}. \tag{10.5}$$

Portanto, pela Definição 10.2.1, (10.5) nos fornece as coordenadas do vetor $\underline{u}$ em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$.

Deste modo (veja (10.2)), a matriz das coordenadas do vetor

$$u=(1\,,2\,,0)$$

em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, será dada por:

$$[u]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},$$

completando a resolução.

□

Temos também o:

Exemplo 10.2.2 *Mostre que os polinômios* $p_o\,,p_1\,,p_2\in\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*, dados por*

$$p_o(x)\doteq 1\,, \tag{10.6}$$
$$p_1(x)\doteq x\,, \tag{10.7}$$
$$p_2(x)\doteq x^2-x\,,\quad \textit{para}\quad x\in\mathbb{R}\,, \tag{10.8}$$

formam uma base (ordenada), que denotaremos por $\mathcal{B}$*, do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Encontre as coordenadas e a matriz das coordenadas do vetor $p\in\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*, dado por*

$$p(x)\doteq 1+x+x^2\,,\quad \textit{para}\quad x\in\mathbb{R}\,, \tag{10.9}$$

com relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$.

Encontre também as coordenadas e a matriz das coordenadas do vetor $\underline{p}$ *acima, em relação à base (ordenada)* $\mathcal{C} \doteq \{q_o, q_1, q_2\}$, *onde*

$$q_o(x) \doteq 1, \tag{10.10}$$
$$q_1(x) \doteq x, \tag{10.11}$$
$$q_2(x) \doteq x^2, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{10.12}$$

isto é, a base (ordenada) $\mathcal{C}$ *é a base (ordenada) canônica do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(veja a Observação 9.3.1).*

Resolução:

Para verificar que o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, pela Observação 7.3.3, basta mostrar que todo vetor $q \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ pode ser escrito, de maneira única, como combinação linear dos vetores do conjunto $\mathcal{B}$.

Notemos que se $q \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, do Exemplo 4.2.7, pode encontrar

$$\begin{aligned} & a_o, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \\ \text{tais que} \quad & q(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{10.13}$$

Logo basta mostrar que podemos encontrar **<u>únicos</u>** escalares

$$\begin{aligned} & \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ \text{tais que} \quad & q = \alpha \cdot p_o + \beta \cdot p_1 + \gamma \cdot p_2, \end{aligned} \tag{10.14}$$

$$\begin{aligned} \text{ou seja,} \quad & q(x) = \alpha\, p_o(x) + \beta\, p_1(x) + \gamma\, p_2(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \\ \text{de (10.13), (10.6), (10.7), (10.8):} \quad & a_o + a_1 x + a_2 x^2 = \alpha + \beta x + \gamma \left(x^2 - x\right), \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, \\ \text{equivalentemente:} \quad & \end{aligned}$$

$$a_o + a_1 x + a_2 x^2 = \alpha + (\beta - \gamma) x + \gamma x^2, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{10.15}$$

A identidade de polunômios (10.15) acima, é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} \alpha = a_o \\ \beta - \gamma = a_1 \\ \gamma = a_2, \end{cases},$$

que possui uma **<u>única</u>** solução, dada por (exercício):

$$\begin{cases} \alpha = a_o \\ \beta = a_1 + a_2 \\ \gamma = a_2 \end{cases}. \tag{10.16}$$

Logo, pela Observação 7.3.3, segue que o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Os escalares obtidos em (10.16), pela Definição 10.2.1, serão as coordenadas do vetor $q \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Notemos que para o vetor $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, dado por (10.9), temos que

$$p(x) = a_o + a_1\,x + a_2\,x^2\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

$$\text{se, e somente se,} \qquad \begin{cases} a_o \doteq 1 \\ a_1 \doteq 1 \\ a_2 \doteq 1 \end{cases} . \tag{10.17}$$

Logo, substituindo-se os valores acima em (10.16), obteremos

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 + 1 = 2 \\ \gamma = 1 \end{cases} ,$$

$$\text{ou seja,} \qquad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 1 \end{cases} . \tag{10.18}$$

Logo, a matriz das coordenadas do vetor $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dado por (10.9), em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, será dada por:

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{10.19}$$

Notemos que, em relação à base (ordenada) canônica $\mathcal{C}$, do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, teremos que:

$$\begin{aligned} p(x) &\overset{(10.9)}{=} 1 + x + x^2 \\ &= 1\underbrace{1}_{\overset{(10.10)}{=} q_o(x)} +1.\underbrace{x}_{\overset{(10.11)}{=} q_1(x)} +1.\underbrace{x^2}_{\overset{(10.12)}{=} q_2(x)} \\ &= \Big(\underbrace{1}_{\doteq\alpha}\cdot q_o + \underbrace{1}_{\doteq\beta}\cdot q_1 + \underbrace{1}_{\doteq\gamma}\cdot q_2\Big)(x)\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

assimpela Definição 10.2.1, teremos que

$$\alpha = 1\,,$$
$$\beta = 1\,,$$
$$\gamma = 1$$

serão as coordenadas do vetor $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, em relação à base (ordenada) $\mathcal{C}$, do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Logo a matriz das coorrdenadas do vetor $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dado por

$$p(x) \doteq 1 + x + x^2\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

com relação à base (ordenada) $\mathcal{C}$, será dada por

$$[u]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{10.20}$$

completando a resolução.

□

Observação 10.2.1 *Observemos que no Exemplo 10.2.2 acima, as base (ordenada) $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, são distintas e as matrizes das coordenadas do vetor $\underline{p}$, dado por (10.9), em relação a cada uma das bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ também são diferentes (veja (10.19) e (10.20)).*

Conclusão: *o vetor $\underline{p}$, dado por (10.9), pode ter representações diferentes em termos de bases diferentes do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.*

10.3 Propriedades

Inciaremos com a:

Proposição 10.3.1 *Sejam $(V, +, \cdot)$ espaço vetorial real (ou complexo) finitamente gerado, o conjunto $\mathcal{B} \doteq \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou complexo).*

Então, a matriz das coordenadas do vetor $u + v$, em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, será igual a soma das matrizes coordenadas dos vetores u e v, em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, isto é,

$$[u + v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}} + [v]_{\mathcal{B}}. \tag{10.21}$$

Além disso, a matriz das coordenadas do vetor $\lambda \cdot u$, em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, será igual a multiplicação do escalar λ pela matriz coordenadas dos vetor u, em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, isto é,

$$[\lambda \cdot u]_{\mathcal{B}} = \lambda [u]_{\mathcal{B}}. \tag{10.22}$$

Resolução:

Como o conjunto $\mathcal{B}$ é base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ e $u, v \in V$, da Definição 8.2.1, podemos encontrar únicos escalares

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \ \beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}),$$

$$u = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \tag{10.23}$$

$$\text{e} \quad v = \beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_n \cdot v_n. \tag{10.24}$$

Com isto temos que

$$u+v \overset{(10.23),(10.24)}{=} (\alpha_1\cdot u_1+\cdots+\alpha_n\cdot u_n)+(\beta_1\cdot u_1+\cdots+\beta_n\cdot u_n)$$
$$\overset{(4.6),(4.7),(4.11)}{=} (\alpha_1+\beta_1)\cdot u_1+\cdots+(\alpha_n+\beta_n)\cdot u_n \tag{10.25}$$

e

$$\lambda\cdot u \overset{(10.23)}{=} \lambda\cdot(\alpha_1\cdot u_1+\cdots+\alpha_n\cdot u_n)$$
$$\overset{(4.11),(4.10)}{=} (\lambda\,\alpha_1)\cdot u_1+\cdots+(\lambda\,\alpha_n)\cdot u_n \tag{10.26}$$

Desta forma, da Definição 10.2.1, segue que:

$$[u]_{\mathcal{B}} \overset{(10.23)}{=} \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}, \tag{10.27}$$

$$[v]_{\mathcal{B}} \overset{(10.24)}{=} \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} \tag{10.28}$$

$$[u+v]_{\mathcal{B}} \overset{(10.25)}{=} \begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix} \tag{10.29}$$

$$\text{e} \qquad [\lambda\cdot u]_{\mathcal{B}} \overset{(10.26)}{=} \begin{pmatrix}\lambda\,\alpha_1\\ \vdots\\ \lambda\,\alpha_n\end{pmatrix}. \tag{10.30}$$

Notemos que:

$$[u+v]_{\mathcal{B}} \overset{(10.29)}{=} \begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}$$
$$\overset{(2.8)}{=} \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$$
$$\overset{(10.27)\text{ e }(10.28)}{=} [u]_{\mathcal{B}}+[v]_{\mathcal{B}}, \tag{10.31}$$

mostrando a validade de (10.21).

Por outro lado,

$$[\lambda \cdot u]_{\mathcal{B}} \overset{(10.30)}{=} \begin{pmatrix} \lambda\, \alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\, \alpha_n \end{pmatrix} \overset{(2.20)}{=} \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \overset{(10.28)}{=} \lambda\, [u]_{\mathcal{B}}\,, \tag{10.32}$$

mostrando a validade de (10.22) e completando a demonstração do resultado.

□

Observação 10.3.1 *A Proposição 10.3.1 acima, nos diz, em relação a uma base (ordenada) fixada em um espaço vetorial real (ou complexo), podemos obter a soma de vetores e a multiplicação de escalar por vetores, utilizando as análogas operações sobre as respectivas matrizes coordenadas dos vetores envolvidos, em relação à base (ordenada) fixada.*

Podemos estender a Proposição acima para um número finito de vetores e escalares, mais precisamente, temos o:

Corolário 10.3.1 *Sejam $(V\,,+\,,\cdot)$ espaço vetorial real finitamente gerado, o conjunto $\mathcal{B} \doteq \{v_1\,,\cdots\,,v_n\}$ uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, $u_1\,,\cdots\,,u_m \in V$ e $\lambda_1\,,\cdots\,,\lambda_m \in \mathbb{R}$.*

Então, a matriz das coordenadas do vetor $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot u_i$, em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, será igual a soma das matrizes coordenadas dos vetores u_i, em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, para $i \in \{1\,,\cdots\,,m\}$ isto é,

$$\left[\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot u_i\right]_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, [u_i]_{\mathcal{B}}\,. \tag{10.33}$$

Resolução:

Basta aplicar indução finita, utilizando-se a Proposição 10.3.1.

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

□

Temos também a:

Proposição 10.3.2 *Sejam $(V\,,+\,,\cdot)$, $(M_{n\times 1}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot_{\mathbb{R}})$ espaços vetoriais reais, com*

$$\mathcal{B} \doteq \{v_1\,,\cdots\,,v_n\} \tag{10.34}$$

base (ordenada) do espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$ e $u_1\,,\cdots\,,u_m \in U$.

O conjunto $\{u_1\,,\cdots\,,u_m\}$ é L.I. no espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$ se, e somente se, o conjunto $\{[u_1]_{\mathcal{B}}\,,\cdots\,,[u_m]_{\mathcal{B}}\}$ é L.I. no espaço vetorial real $(M_{n\times 1}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot_{\mathbb{R}})$.

Demonstração:

Como o conjunto $\mathcal{B}$, dado por (10.34), é uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ e, para cada $j \in \{1, \cdots, m\}$, temos que $u_j \in U$, segue que , da Definição 8.2.1, podemos encontrar únicos escalares

$$\alpha_{1j}, \cdots, \alpha_{nj} \in \mathbb{R},$$

$$\text{tais que} \quad u_j = \alpha_{1j} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{nj} \cdot v_n, \tag{10.35}$$

$$\text{e assim, pela Definição 10.2.1, teremos:} \quad [u_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}. \tag{10.36}$$

Logo o conjunto de vetores $\{u_1, \cdots, u_m\}$ será L.I. no espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ se, e somente se,

$$\beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_m \cdot u_m = O,$$

$$\text{implicar, necessariamente, que} \quad \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0,$$

$$\text{que é equivalente a} \quad [\beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_m \cdot u_m]_{\mathcal{B}} = \underbrace{[O]_{\mathcal{B}}}_{=O \in M_{n1}(\mathbb{R})},$$

$$\text{implicar, necessariamente, que} \quad \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0, \tag{10.37}$$

Notemos que, do Corolário 10.3.1, teremos:

$$[\beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_m \cdot u_m]_{\mathcal{B}} = \beta_1 [u_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + \beta_m [u_m]_{\mathcal{B}}. \tag{10.38}$$

Logo, de (10.37) e (10.38), o conjunto de vetores $\{u_1, \cdots, u_m\}$ será L.I.espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ se, e somente se,

$$\beta_1 [u_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + \beta_m [u_m]_{\mathcal{B}} = O_{n1}$$

$$\text{implicar, necessariamente, que} \quad \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0,$$

que é o mesmo que dizer que o conjunto $\{[u_1]_{\mathcal{B}}, \cdots, [u_m]_{\mathcal{B}}\}$ é L.I. no espaço vetorial real $(M_{n\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$, completando a demonstração do resultado.

□

Vale um resultado análogo a Proposição 10.3.2 acima para o caso complexo, mais precisamente:

Proposição 10.3.3 *Sejam* $(V, +, \cdot)$, $(M_{n\times 1}(\mathbb{C}), +, \cdot_{\mathbb{C}})$ *vetoriais complexos, com*

$$\mathcal{B} \doteq \{v_1, \cdots, v_n\}$$

base (ordenada) do espaço vetorial complexo $(V, +, \cdot)$ *e* $u_1, \cdots, u_m \in V$.

O conjunto $\{u_1, \cdots, u_m\}$ *é L.I. no espaço vetorial complexo* $(V, +, \cdot)$ *se, e somente se, o conjunto* $\{[u_1]_{\mathcal{B}}, \cdots, [u_m]_{\mathcal{B}}\}$ *é L.I. no espaço vetorial complexo* $(M_{n\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot_{\mathbb{C}})$.

Demonstração:

A demonstração é análoga a da Proposição 10.3.2 e será deixada como exercício para o leitor.

□

Como consequência dos resultado acima, temos o:

Corolário 10.3.2 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (ou complexo) finitamente gerado, o conjunto*

$$\mathcal{B} \doteq \{v_1, \cdots, v_n\}$$

uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ *e os vetores* $u_1, \cdots, v_n \in V$.

O conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{u_1, \cdots, v_n\}$$

será base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ *se, e somente se,*

$$\det\left[[u_1]_{\mathcal{B}} \cdots [u_n]_{\mathcal{B}}\right] \neq 0. \tag{10.39}$$

Demonstração:

Trataremos do caso de espaços vetoriais reais.

O caso de espaços vetoriais complexos e análogo e será deixado como exercício para o leitor.

Notemos que, da Proposição 10.3.2 acima, temos que o conjunto $\{u_1, \cdots, v_n\}$ é L.I. no espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ se, e somente se, o conjunto $\{[u_1]_{\mathcal{B}}, \cdots, [v_n]_{\mathcal{B}}\}$ é L.I. no espaço vetorial real $(M_{n\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$, ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} & \beta_1 [v_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + \beta_m [v_m]_{\mathcal{B}} = O_{n1}, \\ \text{implicar que} \quad & \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0. \end{aligned} \tag{10.40}$$

Utilizando a notação da demonstração da Proposição 10.3.2 acima (a saber, (10.35) e (10.36)), teremos que (10.40) é equivalente a (utilizaremos produto de matrizes):

$$\begin{aligned} & \underbrace{\beta_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \beta_n \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}}_{\overset{(2.29)}{=} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \text{implicar que} \quad & \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0, \\ \text{isto é,} \quad & \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \text{implicar que} \quad & \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0. \end{aligned} \tag{10.41}$$

Observemos que, do Teorema 3.7.1 (com $b \doteq O_{n1}$), a situação (10.41) acima, é equivalente a dizerr que a matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

é uma matriz inversível, ou ainda (também pelo Teorema 3.7.1) que,

$$\det\left[[u_1]_{\mathcal{B}} \cdots [u_n]_{\mathcal{B}}\right] \overset{(10.36)}{=} \det\left[\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}\right] \neq 0,$$

completando a demonstração do resultado.

□

10.4 Exercícios

Exercício 10.4.1 *Determinar as coordenadas e a matriz das coordenadas do vetor*

$$u \doteq (-1\,,8\,,5) \in \mathbb{R}^3\,,$$

em relação a cada uma das bases abaixo, do espaço vetorial real $\left(\mathbb{R}^3 + , \cdot\right)$, *munido das operações usuais de soma de ternas ordenadas e multiplicação de número real por terna ordenada:*

1. *base (ordenada) canônica* $\mathcal{B}$;
2. $\mathcal{C} \doteq \{(0\,,0\,,1)\,,(0\,,1\,,1)\,,(1\,,1\,,1)\}$;
3. $\mathcal{D} \doteq \{(1\,,2\,,1)\,,(0\,,3\,,2)\,,(1\,,1\,,4)\}$.

Exercício 10.4.2 *Determinar as coordenadas a matriz das coordenadas do vetor* $p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, *dado por*

$$p(x) = 10 + x^2 + 2\,x^3\,,\ \ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

em relação as seguintes bases do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, *munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função:*

1. *base (ordenada) canônica* $\mathcal{B}$;
2. $\mathcal{C} \doteq \{p_o\,,p_1\,,p_2\,,p_3\}$ *onde*

$$p_o(x) \doteq 1\,,\ \ p_1(x) \doteq 1 + x\,,\ \ p_2(x) \doteq 1 + x + x^2\,,\ \ p_3(x) \doteq 1 + x + x^2 + x^3\,,\ \ \forall x \in \mathbb{R}\,;$$

3. $\mathcal{D} \doteq \{r_o\,,r_1\,,r_2\,,r_3\}$ *onde*

$$r_o(x) \doteq 4 + x\,, p_1(x) \doteq 12\,, p_2(x) \doteq 2 - x^2\,,\ \ p_3(x) \doteq x + x^3\,,\ \ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício 10.4.3 *Determinar as coordenadas a matriz das coordenadas do vetor*

$$u \doteq \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

em relação as seguintes bases do espaço vetorial real $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, *munido das operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz:*

1. *base (ordenada) canônica* $\mathcal{B}$;
2. $\mathcal{C} \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercício 10.4.4 *Verifique que a matriz das coordenadas do vetor* $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ *com relação à base (ordenada) canônica* $\mathcal{B}$, *do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$, *munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função, será dada por:*

$$\begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \frac{1}{2!}p''(0) \\ \vdots \\ \frac{1}{n!}p^{(n)}(0) \end{pmatrix},$$

onde, para cada $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $p^{(k)}(0)$ *representa a* k*-ésima derivada da função* p, *calculada no ponto* $x = 0$.

Capítulo 11

Matriz mudança de base (ordenada) em um espaço vetorial

11.1 Introdução

Como vimos no Exemplo 10.2.2 a matriz das coordenadas de um vetor de um espaço vetorial real (ou complexo) podem variar quando consideramos bases (ordenadas) distintas do espaço vetorial real (ou complexo) em questão.

O que passaremos a estudar neste capítulo é como esta mudança ocorre, ou seja, como é possível encontrar a matriz das coordenadas de um vetor em relação a uma base (ordenada) conhendo-se sua a matriz das coordenadas em relação a uma outra base (ordenada) do mesmo espaço vetorial real (ou complexo).

11.2 Definições e exemplos

Para tanto, seja $(V\,,+\,,\cdot)$ um espaço vetorial real (ou complexo) finitamente gerado.

Consideremos

$$\mathcal{B} \doteq \{b_1, \cdots, b_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{c_1, \cdots, c_n\}$$

bases de $(V\,,+\,,\cdot)$.

Como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) de $(V\,,+\,,\cdot)$, podemos escrever cada um dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{C}$ como combinação linear dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{B}$, isto é, para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$ podemos encontrar escalares

$$\begin{aligned} & \alpha_{1j}\,, \alpha_{2j}\,, \cdots, \alpha_{nj} \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})\,, \\ \text{de modo que} \quad & c_j = \alpha_{1j} \cdot b_1 + \cdots + \alpha_{nj} \cdot b_n\,, \end{aligned} \tag{11.1}$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{array}{rcl} c_1 & = & \alpha_{11} \cdot b_1 + \cdots + \alpha_{n1} \cdot b_n \\ & \vdots & \\ c_n & = & \alpha_{1n} \cdot b_1 + \cdots + \alpha_{nn} \cdot b_n. \end{array}.$$

Desta forma, para cada $j \in \{1\,, 2\,, \cdots, n\}$, a matriz das coordenadas do vetor c_j em realação à base (ordenada) $\mathcal{C}$, será dada por:

$$[c_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix},$$

ou seja, a matriz das coordenadas de cada um dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{C}$ (isto é, dos vetores $c_1, c_2, \cdots, c_n$) em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$ serão, respectivamente,

$$[c_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, [c_n]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Com estas informações sobre as coordenadas de cada um dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{C}$, em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, podemos construir a seguinte matriz quadrada de ordem $\underline{n}$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \tag{11.2}$$

cujas <u>colunas</u> são formadas pelas coordenadas de cada um dos vetores

$$c_1, c_2, \cdots, c_n$$

em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$.

Com isto podemos introduzir a:

Definição 11.2.1 *A matriz (11.2), será denominada de* **<u>matriz mudança de base (ordenada), da base (ordenada) $\mathcal{B}$ para a base (ordenada)</u>** *$\mathcal{C}$ e denotada por $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ (ou por $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$) , ou seja,*

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \doteq \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \tag{11.3}$$

$$\text{ou seja,} \qquad c_j = \alpha_{1j} \cdot b_1 + \cdots + \alpha_{nj} \cdot b_n, \tag{11.4}$$

para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ (veja (11.1)).

Observação 11.2.1 *Para obter a matriz de mudança de base (ordenada), da base (ordenada) $\mathcal{B}$, para a base (ordenada) $\mathcal{C}$, precisamos escrever os vetores da <u>base (ordenada) $\mathcal{C}$</u>, como combinação linear dos vetores da <u>base (ordenada) $\mathcal{B}$</u> e com os respectivos coeficientes construimos as <u>colunas</u> da matriz de mudança de base (ordenada) $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$.*

Antes de encontrarmos uma relação que existe entre a matriz de mundança da base (ordenada) $\mathcal{B}$ para a base (ordenada) $\mathcal{C}$, isto é, a matriz $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$, e as coordenadas de um dado vetor com relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, vejamos como podemos encontrar a matriz de mudança de base (ordenada) no seguinte exemplo:

Exemplo 11.2.1 *Seja* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *espaço vetorial real, munido das operações usuais.*

Consideremos as bases

$$\mathcal{B} \doteq \{\underbrace{(1,0,1)}_{\doteq b_1}, \underbrace{(1,1,1)}_{\doteq b_2}, \underbrace{(1,1,2)}_{\doteq b_3}\} \quad e \quad \mathcal{C} \doteq \{\underbrace{(1,0,0)}_{\doteq c_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{\doteq c_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{\doteq c_3}\} \tag{11.5}$$

de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Encontre a matriz de mudança da base (ordenada) $\mathcal{B}$, *para a base (ordenada)* $\mathcal{C}$, *isto é,* $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$.

Resolução:

Sabemos que $\mathcal{C}$ é uma base (ordenada) de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ (é a base (ordenada) canônica de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$).

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que o conjunto de vetores $\mathcal{B}$ também é uma base (ordenada) de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Para encontrar a matriz de mudança da base (ordenada) $\mathcal{B}$ para a base (ordenada) $\mathcal{C}$, precisamos escrever cada um dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{C}$, como uma combinação linear dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{B}$, isto é, precisamos encontrar escalares

$$\begin{aligned} &\alpha_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \text{para cada} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \\ \text{de modo que} \quad & c_j = \alpha_{1j} \cdot b_1 + \alpha_{2j} \cdot b_2 + \alpha_{3j} \cdot b_3, \end{aligned} \tag{11.6}$$

ou seja, de (11.5), precisamos resolver o seguinte sistema matricial:

$$\begin{aligned} (1,0,0) &= \alpha_{11} \cdot (1,0,1) + \alpha_{21} \cdot (1,1,1) + \alpha_{31} \cdot (1,1,2), \\ &= (\alpha_{11}, 0, \alpha_{11}) + (\alpha_{21}, \alpha_{21}, \alpha_{21}) + (\alpha_{31}, \alpha_{31}, 2\,\alpha_{31}) \\ &= (\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31},\ \alpha_{21} + \alpha_{31},\ \alpha_{11} + \alpha_{21} + 2\,\alpha_{31}) \qquad (11.7) \\ (0,1,0) &= \alpha_{12} \cdot (1,0,1) + \alpha_{22} \cdot (1,1,1) + \alpha_{32} \cdot (1,1,2) \\ &= (\alpha_{12}, 0, \alpha_{12}) + (\alpha_{22}, \alpha_{22}, \alpha_{22}) + (\alpha_{32}, \alpha_{32}, 2\,\alpha_{32}) \\ &= (\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32},\ \alpha_{22} + \alpha_{32},\ \alpha_{12} + \alpha_{22} + 2\,\alpha_{32}) \qquad (11.8) \\ (0,0,1) &= \alpha_{13} \cdot (1,0,1) + \alpha_{23} \cdot (1,1,1) + \alpha_{33} \cdot (1,1,2) \\ &= (\alpha_{13}, 0, \alpha_{13}) + (\alpha_{23}, \alpha_{23}, \alpha_{23}) + (\alpha_{33}, \alpha_{33}, 2\,\alpha_{33}) \\ &= (\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33},\ \alpha_{23} + \alpha_{33},\ \alpha_{13} + \alpha_{23} + 2\,\alpha_{33}), \qquad (11.9) \end{aligned}$$

ou, equivalentemente:

$$(1,0,0) = (\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31},\ \alpha_{21} + \alpha_{31},\ \alpha_{11} + \alpha_{21} + 2\,\alpha_{31}) \tag{11.10}$$

$$(0,1,0) = (\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32},\ \alpha_{22} + \alpha_{32},\ \alpha_{12} + \alpha_{22} + 2\,\alpha_{32}) \tag{11.11}$$

$$(0,0,1) = (\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33},\ \alpha_{23} + \alpha_{33},\ \alpha_{13} + \alpha_{23} + 2\,\alpha_{33}). \tag{11.12}$$

Um momento de reflexão nos poupará um pouco de trabalho para a resolução do sistema vetorial acima.

Notemos que cada uma das equações vetoriais (11.10), (11.11) ou (11.12), pode ser representada por um sistema linear de três equações, com três incógnitas e que, a matriz associada a cada um destas é a mesma, a saber, a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \tag{11.13}$$

O que muda em cada um dos sistemas lineares associados às equações vetoriais a (11.10), (11.11) ou (11.12), são os nomes das variáveis, além dos respectivos segundos membros em questão, a saber

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \tag{11.14}$$

respectivamente.

Para ver isto, notemos que o sistema linear associado a equação vetorial (11.10), será:

$$\begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31} = 1 \\ \alpha_{21} + \alpha_{31} = 0 \\ \alpha_{11} + \alpha_{21} + 2\,\alpha_{31} = 0 \end{cases}$$

cuja equação matricial associada será: $\quad A \cdot x_1 = b_1 \,,$

$$\text{onde} \quad A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \; x_1 \doteq \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b_1 \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Para as equações vetoriais (11.11) e (11.12), algo do mesmo tipo ocorrerá.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Utilizando-se como variáveis

$$x \,, y \,, z \in \mathbb{R} \,,$$

basta resolvermos a seguinte a equação matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} , \tag{11.15}$$

$$\text{onde} \quad a \,, b \,, c \in \mathbb{R} \,,$$

serão escolhidos de acordo com os respectivos segundos membros dos sistemas de equações vetoriais (11.10), (11.11) ou (11.12) (ou seja, (11.14)).

Utilizando-se escalonamento de matrizes (veja a Definição 3.3.5 do capítulo 3) podemos verificar que a equação matricial (11.15) acima, é equivalente a seguinte equação matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c - a \end{pmatrix} , \tag{11.16}$$

pois a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é a forma escalonada reduzida por linhas associada a matriz (11.13) (veja a Definição 3.3.5 do capítulo 3).

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que a única solução da equação matricial 11.16, é dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} a-b \\ a+b-c \\ c-a \end{pmatrix}. \tag{11.17}$$

Assim para encontrar uma (única) solução do sistema de equações lineares (11.10), basta considerarmos:

$$(a\,,b\,,c) = (1\,,0\,,0)\,,$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11.18}$$

e, por (11.17), obter a seguinte solução:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} \overset{(11.17)\ \text{e}\ (11.18)}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou ainda,} \quad (\alpha_{11}\,,\alpha_{21}\,,\alpha_{31}) = (1\,,1\,,-1)\,, \tag{11.19}$$

será a única solução da equação vetorial (11.10).

Para encontrar uma (única) solução do sistema (11.11), basta considerarmos

$$(a\,,b\,,c) = (0\,,1\,,0)\,,$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11.20}$$

e, por (11.17), obter a seguinte solução:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \overset{(11.17)\ \text{e}\ (11.20)}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou ainda,} \quad (\alpha_{12}\,,\alpha_{22}\,,\alpha_{32}) = (-1\,,1\,,0)\,, \tag{11.21}$$

será a única solução da equação vetorial (11.11).

Finalmente, para encontrar uma (única) solução do sistema (11.12), basta considerarmos

$$(a\,,b\,,c) = (0\,,0\,,1)\,,$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11.22}$$

e, por (11.17), obter a seguinte solução:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} \overset{(11.17)\text{ e }(11.20)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou ainda,} \quad (\alpha_{13}\,,\alpha_{23}\,,\alpha_{33}) = (0\,,1\,,-1)\,, \tag{11.23}$$

será a única solução da equação vetorial (11.12).

Desta forma, da Definição 11.2.1, de (11.19), (11.21) e (11.23), obtemos que a matriz de mudança da base (ordenada) $\mathcal{B}$, para a base (ordenada) $\mathcal{C}$ será dada por:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

completando a resolução.

□

Temos também o

Exemplo 11.2.2 *Com as notações do Exemplo 11.2.1 acima, encontre a matriz de mudança da base (ordenada) $\mathcal{C}$ para a base (ordenada) $\mathcal{B}$ (isto é, $M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$).*

Resolução:

Para encontrar a matriz de mudança da base (ordenada) $\mathcal{C}$ para a base (ordenada) $\mathcal{B}$, precisaremos escrever cada um dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{B}$, como combinação linear dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{C}$, ou seja, precisaremois encontrar

$$\beta_{ij} \in \mathbb{R}\,, \quad \text{para cada} \quad i\,,j \in \{1\,,2\,,3\}\,,$$

$$\text{de modo que} \quad b_j = \beta_{1j} \cdot c_1 + \beta_{2j} \cdot c_2 + \beta_{3j} \cdot c_3\,,$$

ou seja, de (11.5), precisamos resolver o seguinte sistema vetorial:

$$(1\,,0\,,1) = \beta_{11} \cdot (1\,,0\,,0) + \beta_{21} \cdot (0\,,1\,,0) + \beta_{31} \cdot (0\,,0\,,1)\,, \tag{11.24}$$

$$(1\,,1\,,1) = \beta_{12} \cdot (1\,,0\,,0) + \beta_{22} \cdot (0\,,1\,,0) + \beta_{32} \cdot (0\,,0\,,1)\,, \tag{11.25}$$

$$(1\,,1\,,2) = \beta_{13} \cdot (1\,,0\,,0) + \beta_{23} \cdot (0\,,1\,,0) + \beta_{33} \cdot (0\,,0\,,0)\,, \tag{11.26}$$

que é uma tarefa simples já que:

$$(1\,,0\,,1) = 1 \cdot (1\,,0\,,0) + 0 \cdot (0\,,1\,,0) + 1 \cdot (0\,,0\,,1)$$

$$(1\,,1\,,1) = 1 \cdot (1\,,0\,,0) + 1 \cdot (0\,,1\,,0) + 1 \cdot (0\,,0\,,1)$$

$$(1\,,1\,,2) = 1 \cdot (1\,,0\,,0) + 1 \cdot (0\,,1\,,0) + 2 \cdot (0\,,0\,,0)\,.$$

Portanto, da Definição 11.2.1, de (11.24), (11.25) e (11.26), temos que a matriz de mudança da base (ordenada) $\mathcal{C}$ para a base (ordenada) $\mathcal{B}$ será dada por:

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observação 11.2.2 *Notemos que, dos Exemplos 11.2.1 e 11.2.2 acima, temos que:*

$$\begin{aligned} & M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = I_3 \,, \\ \textit{ou seja,} \qquad & M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1} \,. \end{aligned}$$

Deixaremos a verificação deste fato como exerício para o leitor.

11.3 Propriedades de matriz de mudança de base e aplicações

Vejamos agora como as matrizes das coordenadas de um vetor se relacionam, em respeito a duas bases, de um mesmos espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita.

Sejam

$$\mathcal{B} \doteq \{b_1, b_2, \cdots, b_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{c_1, c_2, \cdots, c_n\},$$

bases de um espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ de dimensão finita.

Dado um vetor $v \in V$, sejam

$$[v]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{11.27}$$

$$\text{e} \qquad [v]_{\mathcal{C}} \doteq \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{11.28}$$

as matrizes das coordenadas do vetor $\underline{v}$ em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente, ou seja, pela Definição 10.2.1 (veja (10.1)), é o mesmo que escrevermos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i\, b_i &\overset{(11.27)}{=} v \\ &\overset{(11.28)}{=} \sum_{j=1}^{n} y_j\, c_j \,. \end{aligned} \tag{11.29}$$

Suponhamos que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = (\alpha_{ij}) \in M_n \,, \tag{11.30}$$

denota a matriz de mudança da base (ordenada) $\mathcal{B}$ para base (ordenada) $\mathcal{C}$.

Por ser a matriz mudança de base (ordenada), da base (ordenada) $\mathcal{B}$ para a base (ordenada) $\mathcal{C}$, segue que, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, teremos (veja 11.4):

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, b_i \,. \tag{11.31}$$

Logo, (11.29) e (11.31), segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i\, b_i &\overset{(11.29)}{=} v \\
&\overset{(11.29)}{=} \sum_{j=1}^{n} y_j\, c_j \\
&\overset{(11.31)}{=} \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, b_i \right) \\
&\overset{\text{distributiva, comutativa e assossiativa em } \mathbb{R}}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, y_j \right) b_i \,.
\end{aligned} \tag{11.32}$$

Como os vetores

$$b_1, b_2, \cdots, b_n$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$ (pois são elementos de uma base (ordenada) de $(V, +, \cdot)$), da Proposição 8.3.2, segue-se que o vetor $\underline{v}$ pode ser representado, de modo único, como combinação linear destes vetores.

Isto, juntamente com(11.32), implicarão que, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, teremos

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, y_j \,.$$

Porém, estas $\underline{n}$ equações de um sistema linear, podem ser escritas na seguinte fórmula matricial (veja a Observação 3.2.1 do capítulo 3):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{11.33}$$

Portanto, de (11.27), (11.30) e (11.28), a equação matricial (11.33), pode ser escrita na forma:

$$[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\, [v]_{\mathcal{C}} \,.$$

Com isto acabamos de demonstrar a:

Proposição 11.3.1 *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de um espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ de dimensão finita.*

Se

$$[v]_{\mathcal{B}} \quad e \quad [v]_{\mathcal{C}} \,,$$

representam as matrizes das coordenadas de um dado vetor $v \in V$, em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente, e se $M_{\mathcal{BC}}$ é a matriz de mudança de base (ordenada) , da base (ordenada) $\mathcal{B}$ para a base (ordenada) $\mathcal{C}$, então teremos a seguinte identidade

$$[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{BC}}\,[v]_{\mathcal{C}}\,. \tag{11.34}$$

Apliquemos a Proposição 11.3.1 acima ao:

Exemplo 11.3.1 *Seja $(\mathbb{R}^2 +, \cdot)$ espaço vetorial real, munido das operações usuais*
Fixado $\theta_o \in \mathbb{R}$, consideremos os vetores

$$u_1 \doteq (\cos(\theta_o)\,,\,\mathrm{sen}(\theta_o)) \qquad e \qquad u_2 \doteq (-\,\mathrm{sen}(\theta_o)\,,\cos(\theta_o))\,. \tag{11.35}$$

Pede-se:

1. *mostrar que o conjunto*
$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,,u_2\}$$
é uma base (ordenada) de $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$.

2. *encontrar a matriz de mudança de base (ordenada), da base (ordenada) $\mathcal{B}$ para a base (ordenada) $\mathcal{C} \doteq \{e_1, e_2\}$, onde*
$$e_1 \doteq (1\,,0) \qquad e \qquad e_2 \doteq (0\,,1)\,. \tag{11.36}$$

3. *se $a\,,b \in \mathbb{R}$ estão fixados, encontrar a matriz das coordenadas do vetor*
$$u \doteq a \cdot e_1 + b \cdot e_2 \tag{11.37}$$
em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$.

Resolução:
Do item 1. :

Como
$$\dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2\,,$$
basta mostrarmos que os vetores do conjunto $\mathcal{B}$ são L.I. em $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$.

Para isto, sejam $\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$ escalares, tais que

$$\begin{aligned}
(0\,,0) &= \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 \\
&\overset{(11.35)}{=} \alpha \cdot (\cos(\theta_o)\,,\,\mathrm{sen}(\theta_o)) + \beta \cdot (-\,\mathrm{sen}(\theta_o)\,,\cos(\theta_o)) \\
&= (\alpha\cos(\theta_o)\,,\alpha\,\mathrm{sen}(\theta_o)) + (-\beta\,\mathrm{sen}(\theta_o)\,,\beta\cos(\theta_o)) \\
&= (\alpha\cos(\theta_o) - \beta\,\mathrm{sen}(\theta_o)\,,\alpha\,\mathrm{sen}(\theta_o) + \beta\cos(\theta_o)),
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente, $\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$ serão as soluções do sistema linear

$$\begin{cases} \alpha\cos(\theta_o) - \beta\,\mathrm{sen}(\theta_o) = 0 \\ \alpha\,\mathrm{sen}(\theta_o) + \beta\cos(\theta_o) = 0 \end{cases}\,. \tag{11.38}$$

Observemos que matriz dos coeficiente do sistema linear (11.38), dada pela matriz:

$$A \doteq \begin{pmatrix} \cos(\theta_o) & -\operatorname{sen}(\theta_o) \\ \operatorname{sen}(\theta_o) & \cos(\theta_o) \end{pmatrix}$$

cujo determinante igual a $1 \neq 0$.

Logo, da Proposição 2.6.9 (ver capítulo 2), o sistema linear (11.38) acima, só admite a solução trivial, isto é,

$$\alpha = \beta = 0\,,$$

são as únicas solução do sistema linear (11.38) acima e assim, da Definição 7.2.1 , os vetores $u_1\,, u_2$ são L.I. em $(\mathbb{R}^2\,, +\,, \cdot)$.

Como

$$\dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2\,,$$

segue que que o conjunto $\mathcal{B} = \{u_1\,, u_2\}$ (veja (11.35)) é uma base (ordenada) de $(\mathbb{R}^2\,, +\,, \cdot)$.

Do item 2. :

A matriz de mudança da base (ordenada) $\mathcal{B}$ para a base (ordenada) $\mathcal{C}$ (isto é, $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$), pela Definição 11.2.1, será obtida escrevendo-se cada um dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{C}$, como combinação linear dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{B}$.

Mais precisamente, esta matriz, que denotaremos por

$$(\alpha_{ij})_{i,j\in\{1,2\}}\,,$$

deverá ter seus elementos satisfazendo:

$$\begin{aligned} (1\,,0) &= \alpha_{11} \cdot (\cos(\theta_o)\,,\, \operatorname{sen}(\theta_o)) + \alpha_{21} \cdot (-\operatorname{sen}(\theta_o)\,, \cos(\theta_o)) \\ (0\,,1) &= \alpha_{12} \cdot (\cos(\theta_o)\,,\, \operatorname{sen}(\theta_o)) + \alpha_{22} \cdot (-\operatorname{sen}(\theta_o)\,, \cos(\theta_o)), \end{aligned}$$

que é equivalente a:

$$\begin{aligned} (1\,,0) = &\ (\alpha_{11} \cos(\theta_o) - \alpha_{21} \operatorname{sen}(\theta_o)\,, \alpha_{11} \operatorname{sen}(\theta_o) + \alpha_{21} \cos(\theta_o)) \\ (0\,,1) = &\ (\alpha_{12} \cos(\theta_o) - \alpha_{22} \operatorname{sen}(\theta_o)\,, \alpha_{12} \operatorname{sen}(\theta_o) + \alpha_{22} \cos(\theta_o)), \end{aligned}$$

que por sua vez pode ser colocada na forma da seguinte equação matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta_o) & -\operatorname{sen}(\theta_o) \\ \operatorname{sen}(\theta_o) & \cos(\theta_o) \end{pmatrix}}_{\doteq A} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{11.39}$$

onde $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ será igual a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz A é inversível (pois $\det(A) = 1 \neq 0$), da Proposição 2.6.9 (ver capítulo 2) segue que a (única) solução da equação matricial acima será dada por:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cos(\theta_o) & -\operatorname{sen}(\theta_o)\\ \operatorname{sen}(\theta_o) & \cos(\theta_o)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\ &\overset{\text{exercício}}{=} \begin{pmatrix}\cos(\theta_o) & \operatorname{sen}(\theta_o)\\ -\operatorname{sen}(\theta_o) & \cos(\theta_o)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}x\cos(\theta_o)+y\operatorname{sen}(\theta_o)\\ y\cos(\theta_o)-x\operatorname{sen}(\theta_o)\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{11.40}$$

Fazendo-se

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

em (11.40), obteremos:

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\\alpha_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta_o)\\-\operatorname{sen}(\theta_o)\end{pmatrix}. \tag{11.41}$$

Fazendo-se

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

em (11.40), obteremos:

$$\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\\alpha_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\operatorname{sen}(\theta_o)\\\cos(\theta_o)\end{pmatrix}. \tag{11.42}$$

Assim, de (11.39), (11.41) e (11.42), segue que a matriz de mudança de base (ordenada), da base (ordenada) $\mathcal{B}$ para a base (ordenada) $\mathcal{C}$ (veja a Definição 11.2.1), será dada por:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}\cos(\theta_o) & \operatorname{sen}(\theta_o)\\ -\operatorname{sen}(\theta_o) & \cos(\theta_o)\end{pmatrix}. \tag{11.43}$$

Do item 3. :

Notemos que se $[u]_{\mathcal{B}}$, denotar a matriz das coordenadas do

$$u = a\cdot e_1 + b\cdot e_2\,,$$

em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, pela Definição 10.2.1, teremos:

$$[u]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}. \tag{11.44}$$

Logo, se $[u]_{\mathcal{C}}$ representa a matriz das coordenadas do mesmo vetor, em relação à base (ordenada) $\mathcal{C}$, pela Proposição 11.3.1, temos que:

$$
\begin{aligned}
[u]_{\mathcal{B}} &\overset{(11.34) \text{ e } (11.44)}{=} M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\,[u]_{\mathcal{C}} \\
&\overset{(11.43)}{=} \begin{pmatrix} \cos(\theta_o) & \operatorname{sen}(\theta_o) \\ -\operatorname{sen}(\theta_o) & \cos(\theta_o) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\cos(\theta_o) + b\operatorname{sen}(\theta_o) \\ b\cos(\theta_o) - a\operatorname{sen}(\theta_o) \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a\cos(\theta_o) + b\operatorname{sen}(\theta_o) \\ b\cos(\theta_o) - a\operatorname{sen}(\theta_o) \end{pmatrix},
$$

completando a resolução.

□

Observação 11.3.1 *Notemos que, como foi visto na Geometria Analítica, a matriz $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ produz, geometricamente, uma rotação do ângulo θ_o, no sentido horário.*

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Outro resultado importante é dado pela:

Proposição 11.3.2 *Sejam $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ bases de um espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ de dimensião finita.*

Temos que

$$
M_{\mathcal{B}\mathcal{D}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\, M_{\mathcal{C}\mathcal{D}}\,. \tag{11.45}
$$

Demonstração:

Suponhamos que

$$
\begin{aligned}
&\dim(V) = n\,, \\
&\mathcal{B} \doteq \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}\,, \\
&\mathcal{C} \doteq \{c_1, c_2, \cdots, c_n\} \\
\text{e} \quad &\mathcal{D} \doteq \{d_1, d_2, \cdots, d_n\}\,,
\end{aligned} \tag{11.46}
$$

sejam as base (ordenada) de $(V, +, \cdot)$.

Além disso, suponhamos também que

$$
M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \doteq (\alpha_{ij})\,, \tag{11.47}
$$

$$
M_{\mathcal{C}\mathcal{D}} \doteq (\beta_{jk}) \tag{11.48}
$$

$$
\text{e} \quad M_{\mathcal{B}\mathcal{D}} \doteq (\gamma_{ik})\,. \tag{11.49}
$$

Logo, de (11.47), (11.48), (11.49), e da definição de matriz de mudança de base (ordenada), ou seja, a Definição 11.2.1, segue que, para cada

$$
j, k \in \{1, 2,, \cdots, n\}\,,
$$

teremos:

$$c_j \overset{(11.4) \text{ e } (11.47)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, b_i\,, \tag{11.50}$$

$$d_k \overset{(11.4) \text{ e } (11.48)}{=} \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk}\, c_j\,, \tag{11.51}$$

$$d_k \overset{(11.4) \text{ e } (11.49)}{=} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik}\, b_i\,. \tag{11.52}$$

Assim, de (11.51) e (11.51), teremos:

$$\begin{aligned} d_k &\overset{(11.51)}{=} \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} \underbrace{c_j}_{\overset{(11.50)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_i} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, b_i \right) \\ &\overset{\text{distributiva, associativa e comutativa em } \mathbb{R}}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, \beta_{jk} \right) b_i\,. \end{aligned} \tag{11.53}$$

Como os vetores

$$b_1\,, b_2\,, \cdots\,, b_n$$

são L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$ (pois fazem parte de uma base), para cada $k \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, da Proposição 8.3.2, o vetor d_k deverá ser escrito de modo único, como combinação linear dos vetores $b_1\,, b_2\,, \cdots\,, b_n$.

Logo, igualando as expressões (11.52) e (11.53), obteremos:

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, \beta_{jk}\,, \quad \text{para} \quad i\,,k \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,. \tag{11.54}$$

Observemos que o lado direito da expressão (11.54) acima, representa o elemento da i-ésima linha e da k-ésima coluna da matriz $M_{\mathcal{BC}}\, M_{\mathcal{CD}}$ (veja a Definição 2.3.4 do capítulo 2).

Portanto, a identidade (11.54) acima, nos diz que

$$M_{\mathcal{BD}} = M_{\mathcal{BC}}\, M_{\mathcal{CD}}\,,$$

como queríamos demonstrar.

□

Como consequência da Proposição 11.3.2 acima, podemos estender o que ocorreu na Observação 11.2.2, mais precisamente temos a:

Proposição 11.3.3 *Sejam $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ bases de um espaço vetorial real (ou complaxo) $(V\,,+\,,\cdot)$ de dimensão finita.*

Então a matriz de mudança de base (ordenada) , da base (ordenada) $\mathcal{B}$ para a base (ordenada) $\mathcal{C}$ (isto é, $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$), é uma matriz inversível e a sua matriz inversa é dada pela matriz de mudança de base (ordenada) , da base (ordenada) $\mathcal{C}$ para a base (ordenada) $\mathcal{B}$ (isto é, $M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$), ou seja,

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}{}^{-1} = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \,. \tag{11.55}$$

Demonstração:

Pela Proposição 11.3.2 temos que:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} \overset{(11.45)}{=} M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\, M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \tag{11.56}$$

$$\text{e} \qquad M_{\mathcal{C}\mathcal{C}} \overset{(11.45)}{=} M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\, M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \,. \tag{11.57}$$

Logo, basta mostrarmos que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = M_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = I_n = (\delta_{ij}) \,,$$

onde

$$\delta_{ij} \doteq \begin{cases} 1\,, & \text{para} \quad i = j \\ 0\,, & \text{caso contrário} \end{cases} \,,$$

ou seja, I_n é a matriz identidade de ordem $\underline{n}$.

Mostremos que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I_n \,.$$

De fato, se

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n\}$$

$$\text{e} \qquad M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = (\alpha_{ij}) \tag{11.58}$$

então, para cada $j \in \{1\,, 2\,, \cdots, n\}$, de (11.58) e a Definição 11.2.1 (veja (11.4)), deveremos ter:

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, u_i \,. \tag{11.59}$$

Como os vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n$$

são L.I. em $(V\,, +\,, \cdot)$, para cada $j \in \{1\,, 2\,, \cdots, n\}$, o vetor u_j, da Proposição 8.3.2, deverá ser escrito de modo único, como combinação linear dos vetores $u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n$, mas,

$$u_j = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{j-1} + 1 \cdot u_j + 0 \cdot u_{j+1} + \cdots + 0 \cdot u_n \,,$$

$$\text{ou seja,} \qquad \alpha_{ij} = \begin{cases} 1\,, & \text{para} \quad i = j \\ 0\,, & \text{caso contrário,} \end{cases} \,,$$

ou ainda, para cada $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, teremos:

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij} \,,$$

$$\text{ou seja,} \qquad M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I_n \,,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 11.3.2 *Em particular, da demonstração da Proposição 11.3.3 acima, segue que a matriz de mudança de base (ordenada) , da base (ordenada) $\mathcal{B}$ para a própria base (ordenada) $\mathcal{B}$, será a matriz identidade, ou seja,*

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I_n \,. \tag{11.60}$$

Apliquemos as idéias acima para resolver o:

Exemplo 11.3.2 *Utilize a Proposição 11.3.3 acima para refazer o Exemplo 11.2.2.*

Resolução:

Basta ver que

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}{}^{-1} \,.$$

□

Para finalizar, temos o seguinte resultado:

Proposição 11.3.4 *Seja $\mathcal{B}$ uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$ de dimensão finita e $M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ (ou $M_n(\mathbb{C})$) uma matriz inversível.*

Se, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, definirmos o vetor

$$v_j \doteq \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, u_i \,. \tag{11.61}$$

Então o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_n\}\,, \tag{11.62}$$

será uma base (ordenada) de $(V\,,+\,,\cdot)$.

Além disso, teremos

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = M \,. \tag{11.63}$$

Demonstração:

Notemos que, para cada $j_o \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, de (11.61) e da Definição 10.2.1, segue que

$$[v_{j_o}] = \begin{pmatrix} a_{1j_o} \\ a_{2j_o} \\ \vdots \\ a_{nj_o} \end{pmatrix} \,. \tag{11.64}$$

Como, por hipótese, a matriz quadrada $M = (a_{ij})$ é inversível, da Proposição 2.6.9, segue que

$$\begin{aligned} 0 &\neq \det(M) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &\overset{(11.64)}{=} \det\left([v_1]\,[v_2]\cdots[v_n]\right) \,. \end{aligned}$$

Logo, do Corolário 10.3.2, segue que o conjunto

$$\mathcal{C} = \{v_1 \,, v_2 \,, \cdots \,, v_n\}\,,$$

será uma base (ordenada) de $(V\,,+\,,\cdot)$.

Além disso, de (11.61) e da definição de matriz mudança de base (ordenada) (ou seja, da Definição 11.2.1), segue (11.63), completando a demonstração.

□

11.4 Exercícios

Exercício 11.4.1 *Sejam*

$$\mathcal{B} \doteq \{\,(1\,,0)\,,(0\,,1)\,\}\,,\quad \mathcal{C} \doteq \{\,(-1\,,1)\,,(1\,,1)\,\}\,,\quad \mathcal{D} \doteq \{\,(\sqrt{3}\,,1)\,,(\sqrt{3}\,,-1)\,\}$$

bases (ordenadas) do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$*, munido das operações usuais. Pede-se:*

1. *determinar as coordenadas do vetor* $v \doteq (3\,,2)$ *em relação à base (ordenada)* $\mathcal{B}$*, em relação à* $\mathcal{C}$ *e em relação à base (ordenada)* $\mathcal{D}$*.*

2. *encontrar as matrizes de mudança da base (ordenada)* $\mathcal{B}$*, para a base (ordenada)* $\mathcal{C}$*, isto é,* $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$*; da base (ordenada)* $\mathcal{C}$*, para a base (ordenada)* $\mathcal{D}$*, isto é,* $M_{\mathcal{C}\mathcal{D}}$ *e da base (ordenada)* $\mathcal{B}$*, para a base (ordenada)* $\mathcal{D}$*, isto é,* $M_{\mathcal{B}\mathcal{D}}$*.*

3. *existe alguma relação entre as matrizes de mudança de bases (ordenadas) encontradas no item acima? Qual?*

Exercício 11.4.2 *Seja* $\mathcal{B}$ *é uma base (ordenada) de um espaço vetorial real* $(V\,,+\,,\cdot)$*. Qual é a matriz de mudança da base (ordenada)* $\mathcal{B}$*, para a base (ordenada)* $\mathcal{B}$*, isto é,* $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ *?*

Exercício 11.4.3 *Sejam* $TS \doteq \{A \in M_2(\mathbb{R})\,;\, A$ *é uma matriz triangular superior*$\}$*, que é um (mostre!) subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R})\,,+\,\cdot)$*, munido das operações usuais, e*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad e \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

duas bases (ordenadas) do espaço vetorial real $(TS\,,+\,,\cdot)$*. Pede-se:*

1. *encontre as coordenadas do vetor* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$*, em relação às base (ordenada)* $\mathcal{B}$ *e em relação à base* $\mathcal{C}$*.*

2. *encontre as matrizes de mudança da base (ordenada)* $\mathcal{B}$*, para a base (ordenada)* $\mathcal{C}$*, e a da base* $\mathcal{C}$*, para a base (ordenada)* $\mathcal{B}$*.*

Exercício 11.4.4 *A matriz de mudança de uma base (ordenada) $\mathcal{B}$ do espaço vetorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, munido das operações usuais, para a base (ordenada) $\mathcal{C} \doteq \{(1,1), (0,2)\}$, desse mesmo espaço vetorial real, é dada por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determine os vetores da base (ordenada) $\mathcal{B}$.*

Exercício 11.4.5 *A matriz de mudança da base (ordenada) $\mathcal{B} \doteq \{p_o, p_1, p_2\}$ para uma base (ordenada) $\mathcal{C}$, ambas de um mesmo subespaço W do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, munido das operações usuais, é dada por: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, onde*

$$p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq 1 + x, \quad p_2(x) \doteq 1 - x^2, \ \textit{para } x \in \mathbb{R}.$$

Determine os vetores da base (ordenada) $\mathcal{C}$.

Exercício 11.4.6 *Considere as bases (ordenadas) $\mathcal{B} \doteq \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\mathcal{C} \doteq \{g_1, g_2, g_3\}$ de um espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$, relacionadas da seguinte forma:*

$$\begin{cases} g_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ g_2 = 2\,e_2 + 3e_3 \\ g_3 = 3\,e_1 + e_3 \end{cases}$$

Pede-se:

1. *determine as matrizes mudança da base (ordenada) $\mathcal{B}$, para a base $\mathcal{C}$, isto é, $M_{\mathcal{BC}}$, e da base $\mathcal{C}$, para a base $\mathcal{B}$, isto é, $M_{\mathcal{CB}}$.*
2. *se a matriz das coordenadas do vetor $v \in V$ em relação a base (ordenada) $\mathcal{B}$, isto é, $[v]_{\mathcal{B}}$, é dada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, encontrar a matriz das coordenadas do vetor v, em relação a base $\mathcal{C}$, isto é, $[v]_{\mathcal{C}}$.*
3. *se a matriz das coordenadas do vetor $v \in V$, em relação a base (ordenada) $\mathcal{C}$, isto é, $[v]_{\mathcal{C}}$, é dada por $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, encontre a matriz das coordenadas do vetor v, em relação a base (ordenada) $\mathcal{B}$, isto é, $[v]_{\mathcal{B}}$.*

Exercício 11.4.7 *Considerar as bases (ordenadas) $\mathcal{B} \doteq \{p_o, p_1, p_2\}$ e $\mathcal{C} \doteq \{q_o, q_1, q_2\}$ do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, munido das operações usuais, onde*

$$\begin{aligned} & p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(t) \doteq 1 + x, \quad p_2(x) \doteq 1 + x^2 \\ \textit{e} \quad & q_o(x) \doteq x^2, \quad q_1(x) \doteq x, \quad q_2(x) \doteq 1, \ \textit{para } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pede-se:

1. *encontrar as matrizes de mudança da base (ordenada) $\mathcal{B}$, para a base (ordenada) $\mathcal{C}$, isto é $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$, e da base $\mathcal{C}$, para a base (ordenada) $\mathcal{B}$, isto é $M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$.*

2. *se* $[v]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, *encontrar* $[v]_C$.

3. *se* $[v]_{\mathcal{C}} \doteq \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, *encontrar* $[v]_{\mathcal{B}}$.

4. *se a base* $D \doteq \{r_o\,, r_1\,, r_2\}$ *é a base canônica do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$, *encontrar as matrizes de mudança da base (ordenada) $\mathcal{B}$, para a base $\mathcal{D}$, e da base (ordenada) $\mathcal{D}$, para a base $\mathcal{C}$, isto é, $M_{\mathcal{B}\mathcal{D}}$ e $M_{\mathcal{D}\mathcal{C}}$, respectivamente.*

Exercício 11.4.8 *Considere W o seguinte subespaço vetorial do espaço vetorial real $(M_2(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$, munido das operações usuais:*

$$W \doteq \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2\,;\, x - y - z = 0 \right\}.$$

1. *Mostre que os conjuntos*

$$\mathcal{B} \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

são bases (ordenadas) do subespaço vetorial W.

2. *Encontre as matrizes de mudança da base (ordenada) $\mathcal{B}$, para a base (ordenada) $\mathcal{C}$, e da base $\mathcal{C}$, para a base (ordenada) $\mathcal{B}$, isto é, $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ e $M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$, respectivamente.*

3. *Encontre uma base (ordenada) $\mathcal{D}$, do subsepaço vetorial W, de modo que a matriz*

$$P \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

seja a matriz de mudança da base (ordenada) $\mathcal{D}$, para a base $\mathcal{B}$, isto é, $P = M_{\mathcal{D}\mathcal{B}}$.

Capítulo 12

Transformações lineares entre espaços vetoriais

12.1 Introdução

Até o momento estudamos os espaços vetoriais reais (ou complexos) e seus subespaços, introduzimos os conceitos como dependência e independência linear e, a partir disto, pudemos descrevê-los de maneira mais simples usando para isto geradores e, mais especificamente, bases e dimensão, para espaços vetoriais reais (ou complexos) e seus subespaços finitamente gerados.

De certa forma já temos em mãos tudo o que precisamos para trabalhar com espaços vetoriais reais (ou complexos).

O leitor já deve estar familiarizado com o conceito de funções, principalmente com aquelas que estão definidas em um subconjunto dos números reais e cujo contradomínio seja, eventualmente, um outro subconjunto dos números reais.

Nosso próximo passo é estudar uma classe de "funções especiais", que têm como domínio um espaço vetorial real (ou complexo) e cujo contradomínio seja, eventualmente um outro espaço vetorial real (ou complexo).

Estaremos interessados em funções que *preservam* as operações existentes no espaço vetorial real (ou complexo), que atua como o seu domínio, e aquelas do espaço vetorial real (ou complexo), que age como contra-domínio.

Por exemplo, preservar a adição de vetores entendemos que ao tomar dois vetores no domínio da função, o valor que esta deve ter para a soma destes dois vetores, deverá ser igual a soma dos valores que ela possui para cada um dos vetores no contradomínio.

De maneira semelhante a função deverá preservar o produto por escalar.

A próxima seção introduziremos esta noção de modo preciso e, nas próximas seções, passaremos ao estudo mais aprofundado desta "funções especiais".

12.2 Definições e exemplos

Funções com as propriedades mencionada acima, serão denominadas de transformações lineares, mais precisamente, temos a:

Definição 12.2.1 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos).*

Diremos que uma função $T : U \to V$ *é uma* **transformação linear de $(U\,,+\,,\cdot)$ em $(V\,,+\,,\cdot)$**, *se forem verificadas as seguintes condições:*

$$T(u+v) = T(u) + T(v)\,, \quad \textit{para cada} \quad u\,,v \in U\,; \tag{12.1}$$

$$T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T(u)\,, \quad \textit{para cada} \quad u \in U \quad \textit{e} \quad \lambda \in \mathbb{R} \ \textit{(ou } \mathbb{C}\textit{)}\,. \tag{12.2}$$

Observação 12.2.1

1. *Se indicarmos as operações de* V, *por* $+_V$ *e* $\cdot_V$, *e as operações de* U, *por* $+_u$ *e* $\cdot_u$, *então as propriedades acima podem ser escritas, de modo rigoroso, como:*

$$T\,(u +_u v) = T(u) +_V T(v)\,, \quad \textit{para cada} \quad u\,,v \in U\,; \tag{12.3}$$

$$T\,(\lambda \cdot_u u) = \lambda \cdot_V T(u)\,, \quad \textit{para cada} \quad u \in U \quad \textit{e} \quad \lambda \in \mathbb{R} \ \textit{(ou } \mathbb{C}\textit{)}\,. \tag{12.4}$$

   Por uma questão de facilidade evitaremos escrever as sentenças acima e consideraremos entendidas as identidades (12.1) *e* (12.2) *da Definição 12.2.1 acima.*

2. *Supondo que* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *são espaços vetoriais reais (ou complexos), notemos que* $T : U \to V$ *é uma transformação linear se, e somente se,*

$$T(u + \lambda \cdot v) = T(u) + \lambda \cdot T(v)\,, \tag{12.5}$$

   para cada $u\,,v \in U$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*).*

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

3. *Notemos que, pela propriedade* (12.2). *da Definição 12.2.1 e o item 2. da Proposição 4.3.1, temos que*

$$\begin{aligned} T(O_u) &\overset{\textit{item 2. da Proposição 4.3.1}}{=} T(0 \cdot O_u) \\ &\overset{\textit{propriedade (12.2) da Definição 12.2.1}}{=} 0 \cdot T(O_u) \\ &\overset{\textit{item 2. da Proposição 4.3.1}}{=} O_V\,, \end{aligned}$$

$$\textit{ou seja,} \qquad T(O_u) =)_V\,, \tag{12.6}$$

   onde O_u *denota o vetor nulo do espaço vetorial real (ou complexo)* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* O_V *denota o vetor nulo do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$, *ou seja, toda transformação linear de* $(U\,,+\,,\cdot)$ *em* $(V\,,+\,,\cdot)$, *leva o vetor nulo do espaço vetorial real (ou complexo)* $(U\,,+\,,\cdot)$, *no vetor nulo do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Resumindo:

$$T(O_u) = O_V \,. \tag{12.7}$$

4. *Além disso, na situação da Definição 12.2.1, temos que*

$$T(-u) = -T(u)\,, \quad \textit{para cada} \quad u \in U\,, \tag{12.8}$$

ou seja, uma transformação linear de $(U, +, \cdot)$ *em* $(V, +, \cdot)$, *leva o vetor oposto do espaço vetorial real (ou complexo)* $(U, +, \cdot)$, *no vetor oposto do espaço vetorial real (ou complexo)* $(V, +, \cdot)$.

De fato,

$$\begin{aligned} T(-u) + T(u) &\overset{\text{propriedade (12.1) da Definição 12.2.1}}{=} T(-u+u) \\ &= T(O_u) \\ &\overset{(12.7)}{=} O_V \,. \end{aligned}$$

Logo, da Proposição 4.2.2, segue que

$$T(-u) = -T(u)\,.$$

5. *Como consequência do item 4., se* $u, v \in U$, *teremos*

$$T(u - v) = T(u) - T(v)\,. \tag{12.9}$$

De fato, pois

$$\begin{aligned} T(u-v) &\overset{(4.24)}{=} T[u + (-v)] \\ &\overset{12.1}{=} T(u) + T(-v) \\ &\overset{12.8}{=} T(u) + T(-v)\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (12.9).

6. *Finalmente, na situação da Definição 12.2.1 acima, se*

$$\begin{aligned} & u_1, u_2, \cdots, u_n \in U \\ \textit{e} \quad & \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R} \ (\textit{ou } \mathbb{C}), \\ \textit{então} \quad & T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot T(u_i)\,. \end{aligned} \tag{12.10}$$

A verificação deste fato pode ser feita por indução sobre o número de parcelas e fatores, utilizando-se (12.1) *e* (12.2), *para o caso de duas parcelas e fatores.*

Seus detalhes serão deixados como exercício para o leitor.

7. *O conjunto formado por todas as transformações lineares de* $(U, +, \cdot)$ *em* $(V, +, \cdot)$ *será denotado por* $\mathcal{L}(U; V)$*, isto é,*

$$\mathcal{L}(U; V) \doteq \{T : U \to V ; T \text{ é uma transformação linear}\} . \tag{12.11}$$

8. *Na situação da Definição 12.2.1, se*

$$V = U ,$$

diremos que $\underline{T}$ *é um* **operador linear em** $(U, +, \cdot)$.

O conjunto formado por todos os operadores lineares definidos em $(U, +, \cdot)$ *em será denotado por* $\mathcal{L}(U)$*, isto é,*

$$\mathcal{L}(U) \doteq \{T : U \to U ; T \text{ é um operador linear}\} . \tag{12.12}$$

9. *Na situação da da Definição 12.2.1, se*

$$V = \mathbb{R} ,$$

ou seja, é o espaço vetorial real $(\mathbb{R}, +, \cdot)$*, munido das operações usuais de* $\mathbb{R}$*, diremos que* $\underline{T}$ *é um* **funcional linear (real) em** U.

10. *Na situação da da Definição 12.2.1, se*

$$V = \mathbb{C} ,$$

ou seja, é o espaço vetorial real (ou complexo) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$*, munido das operações usuais de* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), diremos que* $\underline{T}$ *é um* **funcional linear real (ou complexo) em** U.

11. *O conjunto formado por todos os funcionais lineares definidos em* $(U, +, \cdot)$ *será denotado por*

$$U'$$

isto é,

$$U' \doteq \{T : U \to \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) ; T \text{ é uma transformação linear}\} . \tag{12.13}$$

A seguir listamos alguns exemplos de transformações lineares definidas e tomando vários espaços vetoriais reais (ou complexos).

Começaremos pelo:

Exemplo 12.2.1 *Sejam* $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) e* $T : U \to V$ *dada por*

$$T(u) = O_V , \quad \text{para cada} \quad u \in U . \tag{12.14}$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *é uma transformação linear de* $(U, +, \cdot)$ *em* $(V, +, \cdot)$.

A transformação linear T *será chamada de* **transformação nula**.

Resolução:

Utilizaremos o item 2. da Observação 12.2.1 (veja (12.5)), para mostrar que T é uma transformação linear de $(U\,,+\,,\cdot)$ em em $(V\,,+\,,\cdot)$.

Notemos que se $u\,,v \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned} T(u+\lambda\cdot v) &\overset{(12.14)}{=} O_V \\ &\overset{O_V \text{ é elementpo neutro em } (V\,,+\,,\cdot)}{=} O_V + \underbrace{O_V}_{\overset{(4.81)}{=}\lambda\cdot O_V} \\ &= \underbrace{O_V}_{\overset{(12.14)}{=}T(u)} + \lambda\cdot \underbrace{O_V}_{\overset{(12.14)}{=}T(v)} \\ &= T(u)+\lambda\cdot T(v)\,, \end{aligned}$$

ou seja, T, dado por (12.14), é uma transformação linear de $(U\,,+\,,\cdot)$ em $(V\,,+\,,\cdot)$, completando a resolução.

□

Outro caso interessante é dado pelo:

Exemplo 12.2.2 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *espaço vetorial real (ou complexo) e* $I_U : U \to U$ *dada por*

$$I_U(u) = u\,, \quad \textit{para cada} \quad u \in U\,. \tag{12.15}$$

Mostre que a aplicação $\underline{I_U}$ *é um operador linear em* $(U\,,+\,,\cdot)$*, isto é,* $I_U \in \mathcal{L}(U)$*.*

O operador linear $\underline{I_U}$ *é chamado de* **operador identidade em** $(U\,,+\,,\cdot)$**.**

Resolução:

Utilizaremos o item 2. da Observação 12.2.1 (veja (12.5)), a aplicação $\underline{T}$ é um operador linear em $(U\,,+\,,\cdot)$.

Observemos que se

$$u\,,v \in U \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{R}\ (\text{ou } \mathbb{C})\,,$$

teremos:

$$\begin{aligned} I_U(u+\lambda\cdot v) &\overset{(12.15)}{=} \underbrace{u}_{\overset{(12.15)}{=}I_U(u)} + \lambda\cdot \underbrace{v}_{\overset{(12.15)}{=}I_V(v)} \\ &= I_U(u)+\lambda\cdot I_U(v)\,, \end{aligned}$$

ou seja, a aplicação $\underline{I_U}$, dado por (12.15), é um operador linear em $(U\,,+\,,\cdot)$, completando a resolução.

□

Observação 12.2.2 *Notemos que se* I_U *e* I_V*, são o operadores lineares identidade no espaço vetorial real (ou complexo)* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e em* $(V\,,+\,,\cdot)$*, respectivamente, para* $T \in (U\,;V))$*, temos que*

$$T\circ I_U = T \tag{12.16}$$

$$\textit{e} \qquad I_V\circ T = T\,. \tag{12.17}$$

Deixaremos a verficação destes fatos como exercício para o leitor.

Outro caso importante é dado pelo:

Exemplo 12.2.3 *Sejam* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$, $\left(\mathbb{R}^{n+1}, +, \cdot\right)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operaçoes usuais de* $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ *e de* $\mathbb{R}^{n+1}$*, respectivamente) e a aplicação* $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$*, dada por*

$$T(p) \doteq (a_o, a_1, \cdots, a_n), \quad \textit{para} \quad p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}), \tag{12.18}$$

$$\textit{onde} \qquad p(x) = a_o + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{12.19}$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *é uma transfromação linear de* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *em* $\left(\mathbb{R}^{n+1}, +, \cdot\right)$*, isto é,* $T \in \mathcal{L}\left(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}); \mathbb{R}^{n+1}\right)$.

Resolução:

Utilizaremos o item 2. da Observação 12.2.1, para mostrar que a aplicação $\underline{T}$ é uma transformação linear de $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ em $\left(\mathbb{R}^{n+1} +, \cdot\right)$.

Notemos que se $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{e} \qquad p, q \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$$

$$\text{de (4.38), podemos encontrar} \qquad a_o, a_1, \cdots, a_n, b_o, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R},$$

$$\text{de modo que} \qquad p(x) = a_o + a_1 x + \cdots + a_n x^n \tag{12.20}$$

$$\text{e} \qquad q(x) = b_o + b_1 x + \cdots + b_n x^n, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{12.21}$$

Logo, para $x \in \mathbb{R}$ fixado, teremos:

$$\begin{aligned} (p + \lambda \cdot q)(x) &= (a_o + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + \lambda (b_o + b_1 x + \cdots + b_n x^n) \\ &\overset{\text{propriedades de } \mathbb{R}}{=} (a_o + \lambda b_o) + (a_1 + \lambda b_1) x + \cdots + (a_n + \lambda b_n) x^n. \end{aligned} \tag{12.22}$$

Logo

$$\begin{aligned} T(p + \lambda \cdot q) &\overset{(12.18) \text{ e } (12.22)}{=} (a_o + \lambda b_o, \cdots, a_n + \lambda b_n) \\ &\overset{(4.26), \text{ com } n \doteq n+1}{=} (a_o, \cdots, a_n) + (\lambda b_o, \cdots, \lambda b_n) \\ &\overset{(4.27), \text{ com } n \doteq n+1}{=} \underbrace{(a_o, \cdots, a_n)}_{(12.18) \text{ e } (12.20) \, = \, T(p)} + \lambda \cdot \underbrace{(b_o, \cdots, b_n)}_{(12.18) \text{ e } (12.21) \, = \, T(q)} \\ &= T(p) + \lambda \cdot T(q), \end{aligned}$$

ou seja, a aplicação $\underline{T}$, dada por (12.18), é uma transformação linear de $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ em $\left(\mathbb{R}^{n+1}, +, \cdot\right)$.

□

Um outro importante é dado pelo:

Exemplo 12.2.4 *Sejam* $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ *uma matriz fixada e* $(M_{n1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operaçoes usuais de* $M_{n1}(\mathbb{R})$*).*

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} &T : M_{n1}(\mathbb{R}) \to M_{m1}(\mathbb{R}) \\ \textit{dada por:} \qquad &T(u) \doteq Au\,, \quad \textit{para} \quad u \in M_{n1}(\mathbb{R})\,. \end{aligned} \tag{12.23}$$

Mostre que a aplicação T *é uma transformação linear de* $(M_{n1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *em* $(M_{m1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$*, ou seja,* $T \in \mathcal{L}(M_{n1}(\mathbb{R}); M_{m1}(\mathbb{R}))$*.*

Resolução:

Utilizaremos o item 2. da Observação 12.2.1, para mostrar que a aplicação T é transformação linear de $(M_{n1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ em $(M_{m1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Para isto, notemos que,

$$\text{se} \qquad u, v \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \qquad \text{e} \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

teremos:

$$\begin{aligned} T(u + \lambda \cdot v) &\overset{(12.23)}{=} A \cdot (u + \lambda \cdot v) \\ &\overset{(2.8)\text{ e }(2.20)}{=} Au + A(\lambda \cdot v) \\ &= \underbrace{Au}_{\overset{(12.23)}{=} T(u)} + \lambda \underbrace{(Av)}_{\overset{(12.23)}{=} T(v)} \\ &= T(u) + \lambda \cdot T(v), \end{aligned}$$

ou seja, a aplicação T, dada por (12.23), é transformação linear de $(M_{n1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ em $(M_{m1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

□

Observação 12.2.3 *Se, no Exemplo 12.2.4 acima, tivermos* $m = n$ *então segue que* $T \in (M_{n1}(\mathbb{R}))$*, ou seja,* T *será um operador linear em* $(M_{n1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$*.*

Temos também o:

Exemplo 12.2.5 *Sejam* $(\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R}), +, \cdot)$ *e* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operaçoes usuais de* $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ *e de* $\mathbb{R}$*, respectivamente) e a aplicação* $T : \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$T(f) \doteq \int_0^1 f(x)\,dx\,, \quad \textit{para} \quad f \in \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})\,. \tag{12.24}$$

Mostre que a aplicação T *é um funcional linear em* $(\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R}), +, \cdot)$*, isto é,* $T \in \mathcal{L}(\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})\,;\mathbb{R}) = [\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})]'$*.*

Resolução:

Utilizaremos o item 2. da Observação 12.2.1, para mostrar que a aplicação T é um funcional linear em $(\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Notemos que, se

$$f, g \in \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

teremos:

$$\begin{aligned} T(f+\lambda\cdot g) &\overset{(12.24)}{=} \int_0^1 (f+\lambda\, g)(x)\, dx \\ &\overset{\text{Propriedades de integrais definidas}}{=} \underbrace{\int_0^1 f(x)\, dx}_{\overset{(12.24)}{=} T(f)} + \lambda \underbrace{\int_0^1 g(x)\, dx}_{\overset{(12.24)}{=} T(g)} \\ &= T(f) + \lambda\cdot T(g), \end{aligned}$$

ou seja, a aplicação $\underline{T}$, dada por (12.24), é um funcional linear em $(\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$.

□

Outro caso importante é dado pelo:

Exemplo 12.2.6 *Sejam* $\left(\mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot\right)$ *e* $(\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde + e · são as operações usuais de* $\mathcal{F}([0,1];\mathbb{R})$*) e a aplicação* $T : \mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R}) \to \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$*, dada por*

$$T(f) \doteq f', \quad \textit{para} \quad f \in \mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R}). \tag{12.25}$$

Mostre que a aplicaçao $\underline{T}$ *é uma transformação linear de* $\mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ *em* $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$*, isto é,* $T \in \mathcal{L}\left(\mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R});\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})\right)$.

Resolução:

Utilizaremos o item 2. da Observação 12.2.1, para mostrar que a aplicação $\underline{T}$ é uma transformação linear de $\mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ em $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$.

Notemos que, se $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{e} \quad f, g \in \mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R}),$$

teremos:

$$\begin{aligned} T(f+\lambda\cdot g) &\overset{(12.25)}{=} (f+\lambda\, g)' \\ &\overset{\text{Propriedades de derivadas}}{=} \underbrace{f'}_{\overset{(12.25)}{=} T(f)} + \lambda \underbrace{g'}_{\overset{(12.25)}{=} T(g)} \\ &= T(f) + \lambda\cdot T(g), \end{aligned}$$

ou seja, a aplicação $\underline{T}$, dada por (12.25), é uma transformaçao linear de $\mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ em $(\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$.

□

A seguir exobremos alguns casos de funções entre espaços vetoriais reais (ou complexos) que <u>**não**</u> são transformações lineares.

Começaremos pelo:

Exemplo 12.2.7 *Sejam* $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$ *e* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as respectivas operaçoes usuais) e a aplicação* $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$*, dada por*

$$T(x\,,y\,,z)=x+y+z+1\,,\quad \textit{para}\quad (x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3\,. \tag{12.26}$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *não é uma transformação linear de* $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$ *em* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$*.*

Resolução:

De fato, notemos que

$$\begin{aligned} T(0\,,0\,,0) &\overset{(12.26)}{=} 0+0+0+1 \\ &\neq 0\,. \end{aligned}$$

Logo, do item 3. da Observação 12.2.1, segue que a aplicação $\underline{T}$, dada por (12.26), **<u>não</u>** é uma transformação linear de $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$ em $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$.

$\square$

Temos também o:

Exercício 12.2.1 *Sejam* $(\mathscr{C}([0,1]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *e* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as respectivas operaçoes usuais) e a aplicação* $T:\mathscr{C}([0\,,1]\,;\mathbb{R})\to\mathbb{R}$*, dada por*

$$T(f)\doteq\int_0^1|f(x)|\,dx\,,\quad \textit{para}\quad f\in\mathscr{C}([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,. \tag{12.27}$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *não é uma transformação linear de* $(\mathscr{C}([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *e* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$*.*

Resolução:

Se a aplicação $\underline{T}$, dada por (12.27), fosse uma transformação linear, do item 4. da Observaçao 12.2.1, deveríamos ter

$$T(-f)=-T(f)\,,$$

para toda função $f\in\mathscr{C}([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,.$

Para ver que isto não ocorre, basta, por exemplo, considerar a função $f_o:[0\,,1]\to\mathbb{R}$ dada por

$$f_o(x)\doteq 1\,,\quad \text{para}\quad x\in[0\,,1]\,. \tag{12.28}$$

Notemos que $f_o\in\mathscr{C}([0\,,1]\,;\mathbb{R})$ e (ou seja é uma função contínua em $[0\,,1]$) e, neste caso, teremos:

$$\begin{aligned} T(-f_o) &\overset{(12.27)}{=} \int_0^1|f(x)|\,dx \\ &\overset{(12.27)}{=} \int_0^1|-1|\,dx \\ &\overset{\text{exercício}}{=} 1\,. \end{aligned} \tag{12.29}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} -T(f) &\overset{(12.27)}{=} -\int_0^1 |f(x)|\,dx \\ &\overset{(12.28)}{=} -\int_0^1 |1|\,dx \\ &\overset{\text{exercício}}{=} -1\,. \end{aligned} \tag{12.30}$$

Portanto, de (12.29) e (12.30), segue que

$$T(-f) \neq -T(f)\,,$$

ou seja, a aplicação $\underline{T}$ **não** é uma transformação linear de $\mathscr{C}([0,1]\,;\mathbb{R})$ em $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$.

□

Temos também o:

Exemplo 12.2.8 *Sejam* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais) e a aplicação* $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, dada por*

$$T(x) \doteq x^2\,, \quad \textit{para} \quad x\in\mathbb{R}\,. \tag{12.31}$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *não é um operador linear em* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$.

Resolução:

De fato, observemos que

$$\begin{aligned} T(-1) &\overset{(12.31)}{=} (-1)^2 \\ &= 1\,. \end{aligned} \tag{12.32}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} -T(1) &\overset{(12.31)}{=} -(1)^2 \\ &= -1\,. \end{aligned} \tag{12.33}$$

Portanto, de (12.32) e (12.33), segue que

$$T(-f) \neq -T(f)\,,$$

e assim, do item 4. da Observação 12.2.1, segue que a aplicação $\underline{T}$, dada por (12.31), **não** é um operador linear em $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$.

□

Podemos estender o Exemplo 12.2.8 acima a seguinte situação:

Exemplo 12.2.9 *Sejam* $n_o\in\{2\,,3\,,\cdots\}$ *fixado,* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais) e a aplicação* $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, dada por*

$$T(x) = x^{n_o}\,, \quad \textit{para} \quad x\in\mathbb{R}\,. \tag{12.34}$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *não é um operador linear em* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$.

Resolução:

De fato, observemos que, se $n_o \in \{2, 3, \cdots\}$ é par, teremos:

$$\begin{aligned} T(-1) &\overset{(12.34)}{=} (-1)^{n_o} \\ &\overset{n_o \text{ é par}}{=} 1 . \end{aligned} \tag{12.35}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} -T(1) &\overset{(12.34)}{=} -(1)^{n_o} \\ &= -1 . \end{aligned} \tag{12.36}$$

Portanto, de (12.35) e (12.36), segue que

$$T(-f) \neq -T(f) ,$$

e assim, do item 4. da Observação 12.2.1, segue que, se $n_o \in \{2, 3, \cdots\}$ é par, então a aplicação $\underline{T}$, dada por (12.31), **não** é um operador linear em $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Por outro lado, se se $n_o \in \{2, 3, \cdots\}$ é ímpar, teremos:

$$T(1+1) \overset{(12.34)}{=} (2)^{n_o} . \tag{12.37}$$

e

$$\begin{aligned} T(1) + T(1) &\overset{(12.34)}{=} (1)^{n_o} + 1^{n_o} \\ &2 . \end{aligned} \tag{12.38}$$

Como $n_o \geq 2$, teremos: $\quad 2^{n_o} \neq 2 ,$

e, deste, fato, (12.37) e (12.38), segue que $\quad T(1+1) \neq T(1) + T(1) .$

Logo da Definição 12.2.1 (veja (12.1)), segue que a aplicação $\underline{T}$, dada por (12.34), **não** é um operador linear em $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

□

12.3 Propriedades de transformações lineares

Um resultado importante é dado pela:

Proposição 12.3.1 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos), onde o conjunto*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

é uma base (ordenada) de $(U, +, \cdot)$ *e*

$$v_1, v_2, \cdots, v_n \in V .$$

Então, existe uma única $T : U \to V$ *transformação linear de* $(U, +, \cdot)$ *em* $(V, +, \cdot)$*, satisfazendo:*

$$T(u_i) \doteq v_i , \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\} . \tag{12.39}$$

Demonstração:

Dado $u \in U$, como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) de $(U, +, \cdot)$, da Definição 8.2.1, segue que existem únicos escalares

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{)}$$

tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \,. \tag{12.40}$$

Definamos a aplicação $T : U \to V$, por:

$$T(u) \doteq \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \,, \tag{12.41}$$

ou seja, de (12.40): $\quad T(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) \doteq \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \,.$

Afirmamos que a aplicação $\underline{T}$, dada por (12.41), é uma transformação linear de $(U, +, \cdot)$ em $(V, +, \cdot)$ e satisfaz (12.39).

Comecemos mostrando a identidade acima, isto é, (12.39).

Como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) de $(U, +, \cdot)$ e, para cada $i \in \{1, 2, \cdots n\}$, temos que $u_i \in U$ e, além disso, da Proposição 8.3.2, podemos escrever:

$$u_i = \underbrace{0}_{\doteq \alpha_1} \cdot u_1 + \cdots + \underbrace{0}_{\doteq \alpha_{i-1}} \cdot u_{i-1} + \underbrace{1}_{\doteq \alpha_i} \cdot u_i + \underbrace{0}_{\doteq \alpha_{i+1}} \cdot u_{i+1} + \cdots + \underbrace{0}_{\doteq \alpha_n} \cdot u_n \,, \tag{12.42}$$

de modo único (pois $\mathcal{B}$ é base).

Logo, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, de (12.41), segue que:

$$\begin{aligned}
T(u_i) &\overset{(12.42)}{=} T(\underbrace{0}_{\doteq \alpha_1} \cdot u_1 + \cdots + \underbrace{0}_{\doteq \alpha_{i-1}} \cdot u_{i-1} + \underbrace{1}_{\doteq \alpha_i} \cdot u_i + \underbrace{0}_{\doteq \alpha_{i+1}} \cdot u_{i+1} + \cdots + \underbrace{0}_{\doteq \alpha_n} \cdot u_n) \\
&\overset{(12.41)}{=} \underbrace{\overbrace{0}^{\alpha_1 \overset{(12.42)}{=}} \cdot v_1 + \cdots + \overbrace{0}^{\alpha_{i-1} \overset{(12.42)}{=}} \cdot v_{i-1}}_{=O} + \underbrace{\overbrace{1}^{\alpha_i \overset{(12.42)}{=}} \cdot v_i}_{=v_i} + \underbrace{\overbrace{0}^{\alpha_{i+1} \overset{(12.42)}{=}} \cdot v_{i+1} + \cdots + \overbrace{0}^{\alpha_n \overset{(12.42)}{=}} \cdot v_n}_{=O} \\
&= O + v_i + O \\
&= v_i \,,
\end{aligned}$$

mostrando a validade de (12.39).

Mostremos que a aplicação $\underline{T}$ é uma transformação linear de $(U, +, \cdot)$ em $(V, +, \cdot)$.

Para isto utilizaremos o item 2. da Observação 12.2.1.

Notemos que,

$$\begin{aligned}
&\text{se} \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{)}\,, \\
&\text{e} \quad u, w \in U
\end{aligned}$$

então, como o conjunto $\mathcal{B}$ é base (ordenada) de $(U, +, \cdot)$, da Definição 8.2.1, segue que existem únicos escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{)}\,,$$

$$\text{tais que} \quad u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \tag{12.43}$$

$$\text{e} \quad w = \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n \,. \tag{12.44}$$

Com isto temos:

$$\begin{aligned} T(u) &\overset{(12.43)}{=} T[\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n] \\ &\overset{(12.41)}{=} \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n\,, \end{aligned} \tag{12.45}$$

e

$$\begin{aligned} T(w) &\overset{(12.44)}{=} T[\beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n] \\ &\overset{(12.41)}{=} \beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_n \cdot v_n\,, \end{aligned} \tag{12.46}$$

Logo

$$\begin{aligned} u + \lambda \cdot w &\overset{(12.43)\text{ e }(12.44)}{=} [\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n] + \lambda \cdot [\beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n] \\ &\overset{(4.12),(4.7),(4.6),(4.10)}{=} (\alpha_1 + \lambda\,\beta_1) \cdot u_1 + \cdots + (\alpha_n + \lambda\,\beta_n) \cdot u_n\,. \end{aligned} \tag{12.47}$$

Logo da definição da aplicação T, isto é, de (12.41), segue que

$$\begin{aligned} T(u + \lambda \cdot w) &\overset{(12.47)}{=} T\,[(\alpha_1 + \lambda\,\beta_1) \cdot u_1 + \cdots + (\alpha_n + \lambda\,\beta_n) \cdot u_n] \\ &\overset{(12.41)}{=} (\alpha_1 + \lambda\,\beta_1) \cdot v_1 + \cdots + (\alpha_n + \lambda\,\beta_n) \cdot v_n \\ &\overset{(4.12),(4.7),(4.6),(4.10)}{=} \underbrace{[\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n]}_{\overset{(12.45)}{=} T(u)} + \lambda \cdot \underbrace{[\beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_n \cdot v_n]}_{\overset{(12.46)}{=} T(w)} \\ &= T(u) + \lambda \cdot T(w)\,, \end{aligned}$$

mostrando que (veja (12.5)) a aplicação T é uma transformação linear de $(U\,,+\,,\cdot)$ em $(V\,,+\,,\cdot)$.

Finalmente, mostremos que se S e T são transformações lineares de $(U\,,+\,,\cdot)$ em $(V\,,+\,,\cdot)$, satisfazendo (12.39), ou seja,

$$T(u_i) = v_i = S(u_i)\,, \quad \text{para} \quad i \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}, \tag{12.48}$$

então deveremos ter

$$S = T\,.$$

Para isto, basta ver que se $u \in U$, como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) de $(U\,,+\,,\cdot)$, da Definição 8.2.1, segue que existem únicos escalares

$$\begin{aligned} &\alpha_1\,, \cdots\,, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})\,, \\ \text{tais que} \qquad &u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n\,. \end{aligned} \tag{12.49}$$

Logo

$$\begin{aligned} S(u) &\overset{(12.49)}{=} S(\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) \\ &\overset{S \text{ é transformação linear, logo vale } (12.10)}{=} \alpha_1 \cdot S(u_1) + \cdots + \alpha_n \cdot S(u_n) \\ &\overset{(12.48)}{=} \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \\ &\overset{(12.41)}{=} T(u)\,, \end{aligned}$$

ou seja, $\quad S(u) = T(u)\,, \quad \text{para} \quad u \in U\,,$

isto é,

$$S = T,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 12.3.1 *A Proposição 12.3.1 acima, nos diz que uma transformação linear definida em um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita fica, completa e unicamente determinada, conhecendo-se os seus valores em uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) do domínio.*

Apliquemos as ideias acima ao:

Exercício 12.3.1 *Seja* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*).*

Encontre um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$T[(1,2)] \doteq (3,-1) \tag{12.50}$$

$$e \qquad T[(0,1)] \doteq (1,2). \tag{12.51}$$

Resolução:

Notemos que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{\underbrace{(1,2)}_{\doteq u_1}, \underbrace{(0,1)}_{\doteq u_2}\} \tag{12.52}$$

é uma base (ordenada) de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ (pois é L.I. em $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$).

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Logo, se

$$u \doteq (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

da Definição 8.2.1, podemos escrevê-lo como combinação linear dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{B}$, isto é, existem

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

tais que

$$\begin{aligned} u &= (x, y) \\ &= \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha . u_2 \qquad (12.53) \\ &\overset{(12.52)}{=} \alpha_1 \cdot (1,2) + \alpha_2 \cdot (0,1) \\ &= (\alpha_1, 2\,\alpha_1 + \alpha_2), \end{aligned}$$

isto é, $$\begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = 2\,\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases},$$

ou ainda, $$\begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = y - 2\,x \end{cases}. \tag{12.54}$$

Com isto, teremos:

$$\begin{aligned} u &= (x\,,y) \\ &\overset{(??)}{=} \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 \\ &\overset{(12.54)}{=} x \cdot (1\,,2) + (y - 2\,x) \cdot (0\,,1)\,. \end{aligned} \tag{12.55}$$

Deste modo, o operador linear $\underline{T}$ procurado, deverá satisfazer:

$$\begin{aligned} T(x\,,y) &\overset{(12.55)}{=} \underbrace{T[x \cdot (1,2) + (y - 2x) \cdot (0,1)]}_{T(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2)]} \\ &\overset{\text{T é transformação linear, logo vale (12.10)}}{=} \overbrace{x \cdot \underbrace{T[(1\,,2)]}_{\overset{(12.50)}{=}(3\,,-1)} + (y - 2\,x) \cdot \underbrace{T[(0\,,1)]}_{\overset{(12.50)}{=}(1\,,2)}}^{=\alpha_1 \cdot \overbrace{T(u_1)}^{=v_1} + \alpha_2 \cdot \overbrace{T(u_2)}^{=v_2}} \\ &= x \cdot (3\,,-1) + (y - 2\,x) \cdot (1\,,2) \\ &= (x + y\,, 2\,y - 5\,x)\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,, \end{aligned}$$

ou seja, o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ procurado, será dado por:

$$T(x\,,y) = (x + y\,, 2\,y - 5\,x)\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{12.56}$$

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que a aplicação $\underline{T}$, definida por (12.56) é um operador linear em $\left(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot\right)$ e satisfaz (12.50).

□

12.4 O espaço vetorial real (ou complexo) $\mathcal{L}(U\,;\,V)$

Nesta seção exibiremos algumas propriedades importantes do espaço vetorial real (ou complexo) $\mathcal{L}(U\,;\,V)$.

Para tanto temos a:

Observação 12.4.1

1. *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos).*

   Como vimos nos itens 7. e 8. da Observação 12.2.1 , o conjunto formado por todas as transformações lineares $T : U \to V$ *é denotado por*

   $$\begin{aligned} &\mathcal{L}(U\,,V) \\ \textit{e se} \quad &U = V\,, \end{aligned}$$

   usaremos a notação

   $$\mathcal{L}(U) \doteq \mathcal{L}(U\,;\,U)\,.$$

2. *Dadas* $T, S \in \mathcal{L}(U; V)$, *definimos* $T + S : U \to V$ *como sendo dada por*

$$(T+S)(u) \doteq T(u) + S(u)\,, \quad \textit{para} \quad u \in U\,. \tag{12.57}$$

Na situação acima, temos que

$$(T+S) \in \mathcal{L}(U; V)\,,$$

ou seja, é uma transformação linear de $(U, +, \cdot)$ *em* $(V, +, \cdot)$.

De fato, se

$$u, v \in U \quad \textit{e} \quad \lambda \in \mathbb{R} \textit{ (ou } \mathbb{C}\textit{)}\,,$$

teremos:

$$\begin{aligned}
(T+S)(u+\lambda\cdot v) &\overset{(12.57)}{=} \underbrace{T(u+\lambda\cdot v)}_{T\in\mathcal{L}(U;V)\,\textit{e o item 2. da Observação 12.2.1}\atop = T(u)+\lambda\cdot T(v)} + \underbrace{S(u+\lambda\cdot v)}_{S\in\mathcal{L}(U;V)\,\textit{e o item 2. da Observação 12.2.1}\atop = S(u)+\lambda\cdot S(v)} \\
&= [T(u) + \lambda\cdot T(v)] + [S(u) + \lambda\cdot S(v)] \\
&\overset{(4.6),(4.7),(4.12)}{=} [T(u) + S(u)] + \lambda\cdot[T(v) + S(v)] \\
&\overset{(12.57)}{=} (T+S)(u) + \lambda\cdot[(T+S)(v)]\,.
\end{aligned}$$

Logo, do item 2. da Observação 12.2.1, segue que $T+S$ *é uma transformação linear de* $(U; +, \cdot)$ *em* $(V, +, \cdot)$, *ou seja,* $(T+S) \in \mathcal{L}(U; V)$, *como queríamos mostrar.*

3. *Se* $T \in \mathcal{L}(U; V)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), definiremos* $\lambda \cdot T : U \to V$ *como sendo dada por*

$$(\lambda\cdot T)(u) \doteq \lambda\cdot T(u)\,, \quad \textit{para} \quad u \in U\,. \tag{12.58}$$

Na situação acima, teremos

$$(\lambda\cdot T) \in \mathcal{L}(U, V)\,,$$

ou seja, é uma transformação linear de $(U, +, \cdot)$ *em* $(V, +, \cdot)$.

De fato,

$$\begin{aligned}
&\textit{se} \quad u, v \in U \\
&\textit{e} \quad \beta \in \mathbb{R} \textit{ (ou } \mathbb{C}\textit{)}\,,
\end{aligned}$$

segue que:

$$\begin{aligned}
(\lambda\cdot T)(u+\lambda\cdot v) &\overset{(12.58)}{=} \lambda\cdot T(u+\beta\cdot v) \\
&\overset{T\in\mathcal{L}(U;V)\,\textit{e o item 2. da Observação 12.2.1}}{=} \lambda\cdot[T(u) + \beta\cdot T(v)] \\
&\overset{(4.12),(4.10)}{=} \lambda\cdot T(u) + \beta\cdot[\lambda\cdot T(v)] \\
&\overset{(12.58)}{=} (\lambda\cdot T)(u) + \beta\cdot[(\lambda\cdot T)(v)]\,.
\end{aligned} \tag{12.59}$$

Logo, do item 2. da Observação 12.2.1, segue que $\lambda\cdot T$ *é uma transformação linear de* $(U, +, \cdot)$ *em* $(V, +, \cdot)$, *ou seja,* $(\lambda\cdot T) \in \mathcal{L}(U; V)$, *como queríamos mostrar.*

4. *Utilizando-se os itens 2. e 3. acima, segue que*

$$(\mathcal{L}(U;V), +, \cdot)$$

será um espaço vetorial real (ou complexo).

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

5. *Notemos que o vetor nulo de $\mathcal{L}(U;V)$, será a transformação linear nula, isto é, $O_{UV}: U \to V$, dada por*

$$O_{UV}(u) \doteq O_V, \quad \textit{para cada} \quad u \in U.$$

Além disso, se $T \in \mathcal{L}(U;V)$, o vetor oposto de $\underline{T}$, será a transformação linear $-T: U \to V$ dada por

$$(-T)(u) \doteq -T(u), \quad \textit{para} \quad u \in U. \tag{12.60}$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Registraremos isto na:

Proposição 12.4.1 *$(\mathcal{L}(U;V), +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações introduzidas acima) é um espaço vetorial real (ou complexo).*

Demonstração:

Veja os itens da Observação 12.4.1 acima.

□

Definição 12.4.1 *Seja $(U, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real (ou complexo).*

Definimos o **espaço dual (algébrico) de U**, *que será denotado por U' (veja o item 9. da Observação 12.2.1), como sendo*

$$U' \doteq \mathcal{L}(U; , \mathbb{R}) \quad (\textit{ou} \quad \mathcal{L}(U; , \mathbb{C})), \tag{12.61}$$

isto é, U' é o conjunto formado por todos os funcionais lineares definidos em $(U, +, \cdot)$.

Temos a:

Teorema 12.4.1 *Seja $(U, +, \cdot)$ um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão $\underline{n}$ e $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão $\underline{m}$.*

Então, $(\mathcal{L}(U;V), +, \cdot)$ tem dimensão $m\,n$, ou seja,

$$\begin{aligned} \textit{se} \quad & \dim(U) = n \\ \textit{e} \quad & \dim(V) = m, \\ \textit{então} \quad & \dim[\mathcal{L}(U;V)] = m\,n. \end{aligned} \tag{12.62}$$

Demonstração:

Sejam

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \tag{12.63}$$

uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(U, +, \cdot)$ e

$$\mathcal{C} \doteq \{v_1, v_2, \cdots, v_m\} \tag{12.64}$$

uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.

Para cada

$$\begin{aligned} & i \in \{1, 2, \cdots, n\} \\ \text{e} \qquad & j \in \{1, 2, \cdots, m\}, \\ \text{definamos a aplicação:} \qquad & T_{ij} : U \to V, \end{aligned}$$

da seguinte maneira: se $u \in U$, como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) para $(U, +, \cdot)$, da Proposição 8.3.2, segue que podemos encontrar únicos escalares

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}),$$

tais que

$$\begin{aligned} u &= x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + \cdots + x_n \cdot u_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot u_k . \end{aligned} \tag{12.65}$$

Com isto, definiremos

$$T_{ij}(u) \doteq x_i \cdot v_j , \tag{12.66}$$

ou seja, de (12.65) e (12.66), temos que:

$$T_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot u_k\right) \doteq x_i \cdot v_j . \tag{12.67}$$

Notemos que, para cada $m \in \{1, 2, \cdots, n\}$ fixado, teremos:

$$\begin{aligned} T_{ij}(u_m) &\overset{\text{Proposição 8.3.2}}{=} T_{ij}\,(0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{m-1} + 1 \cdot u_m + 0 \cdot u_{m+1} + \cdots + 0 \cdot u_n) \\ &\overset{(12.66)}{=} \begin{cases} v_j, & \text{se} \quad i = m \\ O, & \text{se} \quad i \neq m \end{cases} . \end{aligned} \tag{12.68}$$

Afirmamos que, para cada

$$\begin{aligned} & i_o \in \{1, 2, \cdots, n\} \\ \text{e} \qquad & j_o \in \{1, 2, \cdots, m\} \ \text{ fixados}, \\ \text{teremos:} \qquad & T_{i_o j_o} \in \mathcal{L}(U; V) . \end{aligned} \tag{12.69}$$

De fato, se

$$u, v \in U,$$

como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) para $(U,+,\cdot)$, da Proposição 8.3.2, segue que existem únicos escalares

$$\begin{aligned} & x_1\,, x_2\,, \cdots, x_n\,, y_1\,, y_2\,, \cdots, y_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})\,, \\ \text{tais que} \quad & u = x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_n \cdot u_n \qquad (12.70) \\ \text{e} \quad & v = y_1 \cdot u_1 + \cdots + y_n \cdot u_n\,. \qquad (12.71) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} u + \lambda \cdot v & \overset{(12.70) \text{ e } (12.71)}{=} [x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_n \cdot u_n] + \lambda \cdot [y_1 \cdot u_1 + \cdots + y_n \cdot u_n] \\ & \overset{(4.12),(4.7),(4.6)}{=} (x_1 + \lambda\, y_1) \cdot u_1 + \cdots + (x_n + \lambda\, y_n) \cdot u_n\,. \qquad (12.72) \end{aligned}$$

Assim teremos:

$$\begin{aligned} T_{i_o j_o}(u + \lambda \cdot v) & \overset{(12.72)}{=} T_{i_o j_o}[(x_1 + \lambda y_1) \cdot u_1 + \cdots + (x_i + \lambda y_i) \cdot u_i + \cdots + (x_n + \lambda y_n) \cdot u_n] \\ & \overset{(12.66)}{=} (x_{i_o} + \lambda\, y_{i_o}) \cdot v_{j_o} \\ & \overset{(4.12),(4.11)}{=} \underbrace{x_{i_o} \cdot v_{j_o}}_{\overset{(12.66)}{=} T_{i_o j_o}(x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_{i_o} \cdot u_{i_o} + \cdots + x_n \cdot u_n)} + \lambda \cdot \Big(\underbrace{y_{i_o} \cdot v_{j_o}}_{\overset{(12.66)}{=} T_{i_o j_o}(y_1 \cdot u_1 + \cdots + y_{i_o} \cdot u_{i_o} + \cdots + y_n \cdot u_n)} \Big) \\ & = T_{i_o j_o}(x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_{i_o} \cdot u_{i_o} + \cdots + x_n \cdot u_n) \\ & \qquad + \lambda \cdot T_{i_o j_o}(y_1 \cdot u_1 + \cdots + y_{i_o} \cdot u_{i_o} + \cdots + y_n \cdot u_n) \\ & \overset{(12.70)}{=} T_{i_o j_o}(u) + \lambda \cdot T_{i_o j_o}(v) \qquad (12.73) \end{aligned}$$

Logo, de (12.73) e do item 2. da Observação 12.2.1, segue que

$$T_{i_o j_o} \in \mathcal{L}(U\,;\,V)\,, \quad \text{para cada} \quad i_o \in \{1\,,2\,,\cdots,n\} \text{ e } j_o \in \{1\,,2\,,\cdots,m\}\,.$$

Mostremos que o conjunto

$$\mathcal{D} \doteq \{T_{ij}\,; \text{ para } i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\} \text{ e } j \in \{1\,,2\,,\cdots,m\}\} \qquad (12.74)$$

é uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(\mathcal{L}(U\,;\,V)\,,+\,,\cdot)$.

Afirmamos que o conjunto $\mathcal{D}$ é L.I. em $(\mathcal{L}(U\,;\,V)\,,+\,,\cdot)$.

De fato,

$$\text{se} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot T_{ij} = O \in \mathcal{L}(U\,;\,V)\,, \tag{12.75}$$

$$\text{então, para cada} \quad k \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,,$$

segue que:

$$\begin{aligned} O &= O(u_k) \\ &\overset{(12.75)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot T_{ij}(u_k) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \underbrace{T_{ij}(u_k)}_{\overset{(12.68)}{=} O\,,\ \text{se } i \neq k} \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_{kj} \cdot \underbrace{T_{kj}(u_k)}_{\overset{(12.68)}{=} v_j} \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_{kj} \cdot v_j\,. \end{aligned} \tag{12.76}$$

Como os vetores

$$v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_m$$

são L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$ (pois o conjunto $\mathcal{C}$, dado por (12.64), é uma base (ordenada) de $(V\,,+\,,\cdot)$), segue-se que

$$a_{k1} = \cdots = a_{km} = 0,$$

para cada $k \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, ou seja,

$$a_{ij} = 0, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1,\cdots,n\} \quad \text{e} \quad j \in \{1,\cdots,m\}\},$$

mostrando que o conjunto $\mathcal{D}$, dado por (12.74), é um conjunto L.I. em $(\mathcal{L}(U\,;\,V)\,,+\,,\cdot)$.

Afirmamos que

$$[\mathcal{D}] = \mathcal{L}(U\,;\,V)\,.$$

De fato, se

$$T \in \mathcal{L}(U\,;\,V)\,,$$

para cada $u \in U$, como o conjunto $\mathcal{B}$, dado por (12.33), é uma base (ordenada) de $(U\,,+\,,\cdot)$, segue que existem únicos escalares

$$x_1\,,x_2\,,\cdots x_n \in \mathbb{R} \ (\text{ou } \mathbb{C})\,,$$

tais que

$$u = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + \cdots + x_n \cdot u_n\,. \tag{12.77}$$

Como a aplicação $\underline{T}$ é uma transformação linear de $(U\,,+\,,\cdot)$ em $(V\,,+\,,\cdot)$, segue que

$$\begin{aligned}T(u) &\overset{(12.77)}{=} T(x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + \cdots + x_n \cdot u_n)\\ &\overset{T\in\mathcal{L}(U;V)\text{ e }(12.10)}{=} x_1 \cdot T(u_1) + x_2 \cdot T(u_2) + \cdots + x_n \cdot T(u_n)\,. \end{aligned} \tag{12.78}$$

Como, para cada $i_o \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, temos que

$$T(u_{i_o}) \in V$$

e o conjunto $\mathcal{C}$, dado por (12.64), é base (ordenada) de $(V\,,+\,,\cdot)$, para cada

$$i_o \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,,$$

existem únicos escalares

$$\alpha_{ji_o} \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})\,, \quad \text{para} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m\}\,,$$

tais que

$$T(u_{i_o}) = \alpha_{1i_o} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{mi_o} \cdot v_m\,. \tag{12.79}$$

Lembremos que, para cada

$$i_o \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\} \quad \text{e} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m\}\,,$$

de (12.66), temos que

$$T_{i_oj}(u) = x_i \cdot v_j\,.$$

Logo, para cada $u \in U$, de (12.78), (12.79) e (12.68), obteremos

$$\begin{aligned}T(u) &\overset{(12.78)}{=} x_1 \cdot T(u_1) + \cdots + x_n \cdot T(u_n)\\ &\overset{(12.79)\text{ com }i_o\in\{1,\cdots,n\}}{=} x_1 \cdot (\alpha_{11} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{m1} \cdot v_m) + \cdots + x_n \cdot (\alpha_{1n} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot v_m)\\ &\overset{(4.12),(4.11),(4.6),(4.7)}{=} \alpha_{11} \cdot (x_1 \cdot v_1) + \cdots + \alpha_{m1} \cdot (x_1 \cdot v_m) + \cdots\\ &\qquad + \alpha_{1n} \cdot (x_n \cdot v_1) + \cdots + \alpha_{mn} \cdot (x_n \cdot v_m)\\ &\overset{(12.68)}{=} \alpha_{11} \cdot T_{11}(u) + \cdots + \alpha_{m1} \cdot T_{1m}(u) + \cdots + \alpha_{1n} \cdot T_{n1}(u) + \cdots + \alpha_{mn} \cdot T_{nm}(u)\,,\end{aligned}$$

ou seja,

$$T = \alpha_{11} \cdot T_{11} + \cdots + \alpha_{m1} \cdot T_{1m} + \cdots + \alpha_{1n} \cdot T_{1n} + \cdots + \alpha_{mn} \cdot T_{nm}\,,$$

mostrando que $T \in \mathcal{L}(U\,;\,V)$, pode ser escrito como combinação linear dos elementos do conjunto $\mathcal{D}$, isto é, o conjunto $\mathcal{D}$, dado por (12.74), gera $\mathcal{L}(U\,;\,V)$.

Portanto o conjunto $\mathcal{D}$, dado por (12.74), é uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(\mathcal{L}(U\,;\,V)\,,+\,,\cdot)$ e como o número de elementos da base (ordenada) $\mathcal{D}$, dado por (12.74), é $\underline{m\,n}$, segue que

$$\dim[\mathcal{L}(U, V)] = m\,n\,,$$

finalizando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o:

Corolário 12.4.1 *Seja* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão* $\underline{n}$. *Então o espaço dual associado a* $(U, +, \cdot)$, *tem dimensão* $\underline{n}$, *isto é,*

$$\dim(U') = n\,. \tag{12.80}$$

Demonstração:

De fato,

$$\text{como} \qquad U' = \mathcal{L}(U\,;\,\mathbb{R}) \tag{12.81}$$
$$\text{e} \qquad \dim(\mathbb{R}) = 1\,, \tag{12.82}$$

segue, do Teorema 12.4.1 acima, que

$$\dim(U') \overset{(12.81),(12.82)\text{ e }(12.62)}{=} n \cdot 1 = n\,,$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 12.4.2

1. *A base (ordenada)* $\mathcal{D}$, *dado por* (12.74), *do espaço vetorial real (ou complexo)* $\mathcal{L}(U, V)$, *obtida na demonstração do Teorema 12.4.1 acima, será denominada* **base (ordenada) de** $\mathcal{L}(U\,;\,V)$**, associada às bases** $\mathcal{B}$ **e** $\mathcal{C}$ *de* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$, *respectivamente.*

2. *Pelo Corolário 12.4.1, se o espaço vetorial real (ou complexo)* $(U, +, \cdot)$ *tem dimensão finita, então o seu espaço dual, ou seja* U', *terá a mesma dimensão (veja* (12.80)*).*

3. *Na stituação do Corolário 12.4.1, seguindo os passos da demonstração do Teorema 12.4.1, se o conjunto*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

é uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(U, +, \cdot)$ *e o conjunto*

$$\mathcal{C} \doteq \{1\}$$

é uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, *para cada*

$$j \in \{1, 2, \cdots, n\},$$

considerando-se o funcional linear $T_j : U \to \mathbb{R}$ *(veja* (12.66)*), dado por*

$$T_j(u) = T_j(x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_n \cdot u_n) \doteq x_j\,, \tag{12.83}$$
$$\textit{onde} \qquad u = x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_n \cdot u_n \in U\,, \tag{12.84}$$

o conjunto

$$\mathcal{D} \doteq \{T_1, T_2, \cdots, T_n\}$$

será uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(U', +, \cdot)$.

Esta base (ordenada) é chamada de **base (ordenada) dual**, *associada às bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *de* $(U, +, \cdot)$ *e* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, *respectivamente.*

4. *Na stituação do Corolário 12.4.1, no caso complexo, se o conjunto*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n\}$$

é uma base (ordenada) do espaço vetorial complexo $(U\,,+\,,\cdot)$ *e o conjunto*

$$\mathcal{C} \doteq \{1\}$$

é base (ordenada) do espaço vetorial complexo $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot)$*, para cada*

$$j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,,$$

se considerarmos o funcional linear $T_j : U \to \mathbb{R}$ *(veja (12.66)), dado por*

$$T_j(u) = T_j(x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_n \cdot u_n) \doteq x_j\,, \tag{12.85}$$

$$\text{onde} \qquad u = x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_n \cdot u_n \in U\,, \tag{12.86}$$

o conjunto

$$\mathcal{D} \doteq \{T_1\,, T_2\,, \cdots\,, T_n\}$$

será uma base (ordenada) do espaço vetorial complexo $(U'\,,+\,,\cdot)$*.*

Esta base (ordenada) é chamada de <u>**base (ordenada) dual**</u>*, associada às bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *de* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot)$*, respectivamente.*

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 12.4.1 *Sejam* $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ *e* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}$*, respectivamente).*

Considere a base (ordenada)

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,, u_2\,, u_3\}$$

de $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$*, onde*

$$u_1 \doteq (1\,,1\,,1)\,, \tag{12.87}$$

$$u_2 \doteq (1\,,1\,,0)\,, \tag{12.88}$$

$$u_3 \doteq (1\,,0\,,0) \tag{12.89}$$

$$\text{e} \qquad \mathcal{C} = \{v_1\}\,,$$

$$\text{onde} \qquad v_1 \doteq 1\,, \tag{12.90}$$

uma base (ordenada) do espaço vetorial real $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$*.*

Encontre a base (ordenada) para o espaço dual de $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$*, associada às bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *de* $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ *e* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$*, respectivamente.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que o conjunto $\mathcal{B}$ é base (ordenada) de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Utilizaremos as idéias do item 2. da Observação 12.4.2 acima.

Observemos que se

$$(x\,, y\,, z) \in \mathbb{R}^3\,,$$

como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) de $(\mathbb{R}^3\,, +\,, \cdot)$, segue que existem únicos escalares

$$x_1\,, x_2\,, x_3 \in \mathbb{R}\,,$$

tais que

$$\begin{aligned} u &= (x\,, y\,, z) && (12.91)\\ &= x_1 \cdot \underbrace{u_1}_{\overset{(12.87)}{=}(1\,,1\,,1)} + x_2 \cdot \underbrace{u_2}_{\overset{(12.88)}{=}(1\,,1\,,0)} + x_3 \cdot \underbrace{u_3}_{\overset{(12.89)}{=}(1\,,0\,,0)} \\ &= x_1 \cdot (1\,,1\,,1) + x_2 \cdot (1\,,1\,,0) + x_3 \cdot (1\,,0\,,0) && (12.92)\\ &\overset{(4.26),(4.27),\text{ com } n \doteq 3}{=} (x_1 + x_2 + x_3\,, x_1 + x_2\,, x_1)\,, \end{aligned}$$

ou seja, $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = x \\ x_1 + x_2 = y \\ x_1 = z \end{cases}$,

cuja solução será (exercício): $\begin{cases} x_1 = z \\ x_2 = y - z \\ x_3 = x - y \end{cases}$. (12.93)

Portanto

$$\begin{aligned} u &\overset{(12.91)}{=} (x\,, y\,, z) \\ &\overset{(12.92)\text{ e }(12.93)}{=} z \cdot (1\,,1\,,1) + (y - z) \cdot (1\,,1\,,0) + (x - y) \cdot (1\,,0\,,0)\,. && (12.94) \end{aligned}$$

Lembremos que, de (12.85), segue que os funcionais lineares que formarão a base (ordenada) dual, associada às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, que indicaremos por

$$T_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \quad \text{para} \quad j \in \{1, 2, 3\}\,,$$

serão dadas por: $T_j(u) \doteq x_j\,,$ (12.95)

onde $u = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + x_3 \cdot u_3\,.$ (12.96)

Deste modo, vimos na demonstração do Teorema 12.4.1, que uma base (ordenada) , que indicaremos por $\mathcal{D}$, para o espaço dual de $(\mathbb{R}^3\,, +\,, \cdot)$, associada às base (ordenada) $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, será formada pelos funcionais lineares $T_1, T_2, T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dados por:

$$
\begin{aligned}
T_1(x\,,y\,,z) &\overset{(12.94)}{=} T_1[\underbrace{z\cdot(1\,,1\,,1)}_{=x_1\cdot u_1}+(y-z)\cdot(1\,,1\,,0)+(x-y)\cdot(1\,,0\,,0)]\\
&\overset{(12.95)}{=} x_1\\
&\overset{(12.93)}{=} z\,,\\
T_2(x\,,y\,,z) &\overset{(12.94)}{=} T_2[z\cdot(1\,,1\,,1)+\underbrace{(y-z)\cdot(1\,,1\,,0)}_{=x_2\cdot u_2}+(x-y)\cdot(1\,,0\,,0)]\\
&\overset{(12.95)}{=} x_2\\
&\overset{(12.93)}{=} y-z\,,\\
T_3(x\,,y\,,z) &\overset{(12.94)}{=} T_3[z\cdot(1\,,1\,,1)+(y-z)\cdot(1\,,1\,,0)+\underbrace{(x-y)\cdot(1\,,0\,,0)}_{=(x-y)\cdot u_3}]\\
&\overset{(12.95)}{=} x_3\\
&\overset{(12.93)}{=} x-y\,,
\end{aligned}
$$

para cada $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
T_1(x\,,y\,,z) &\doteq z\,,\\
T_2(x\,,y\,,z) &\doteq y-z\\
T_3(x\,,y\,,z) &\doteq x-y\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3\,.
\end{aligned}
\tag{12.97}
$$

Desta forma o conjunto

$$\mathcal{D} \doteq \{T_1\,, t_2\,, T_3\}$$

onde, para cada $j \in \{1\,,2\,,3\}$, $T_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3\,;\,\mathbb{R})$ é dado por (12.97), é uma base (ordenada) de $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^3\,;\,\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, associada às bases (ordenadas) $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ e $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$, respectivamente, finalizando a resolução.

□

Observação 12.4.3 *Como consequência do Exemplo 12.4.1 acima e da Proposição 8.3.2, segue que todo funcional linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, pode ser escrito, de modo único, como combinação linear dos funcionais lineares $T_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, para $j \in \{1\,,2\,,3\}$, dados por (12.97).*

Temos também a:

Proposição 12.4.2 *Sejam $(U\,,+\,,\cdot)$, $(V\,,+\,,\cdot)$ e $(W\,,+\,,\cdot)$ espaços vetoriais reais (ou complexos).*

Se $T \in \mathcal{L}(U\,;\,V)$ e $S \in \mathcal{L}(V\,;\,W)$ então

$$(S \circ T) \in \mathcal{L}(U\,;\,W)\,.$$

Demonstração:

De fato, se

$$u, v \in U$$
$$\text{e} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}),$$

temos que:

$$\begin{aligned}
(S \circ T)(u + \lambda \cdot v) &\overset{\text{definição de composição de funções}}{=} S[T(u + \lambda \cdot v)] \\
&\overset{T \text{ é transformação linear e } (12.5)}{=} S[T(u) + \lambda \cdot T(v)] \\
&\overset{S \text{ é transformação linear e } (12.5)}{=} S[T(u)] + \lambda \cdot S[T(v)] \\
&\overset{\text{definição de composição de funções}}{=} (S \circ T)(u) + \lambda \cdot [(S \circ T)(v)],
\end{aligned}$$

Logo, do item 2. da Observação 12.2.1 , segue que $S \circ T$ é uma transformação linear de $(U, +, \cdot)$ em $(W, +, \cdot)$, ou seja,

$$(S \circ T) \in \mathcal{L}(U; W),$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 12.4.4 *Em resumo, a Proposição 12.4.2 acima, nos diz que a composta de transformações lineares será uma transformação linear.*

O resultado a seguir é um fato básico de funções em geral, que nos diz que a operação de composição de funções é associativa, mais precisamente:

Proposição 12.4.3 *Sejam U, V, W e X conjuntos não vazios e $T : U \to V$, $S : V \to W$ e $R : W \to X$ funções.*

Então

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T). \tag{12.98}$$

Demonstração:

Notemos que, para cada $u \in U$, temos

$$\begin{aligned}
[(R \circ S) \circ T](u) &\overset{\text{definição de composição de funções}}{=} (R \circ S)[T(u)] \\
&\overset{\text{definição de composição de funções}}{=} R\{S[T(u)]\}.
\end{aligned} \tag{12.99}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
[R \circ (S \circ T)](u) &\overset{\text{definição de composição de funções}}{=} R\{[S \circ T](u)\} \\
&\overset{\text{definição de composição de funções}}{=} R\{S[T(u)]\}.
\end{aligned} \tag{12.100}$$

Logo, de (12.99) e (12.100), segue a validade de (12.98), completando a demonstração do resultado.

□

Temos também a:

Proposição 12.4.4 *Sejam* U *conjunto não vazio,* $(V\,,+\,,\cdot)$*,* $(W\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) e* $S\,,T : U \to V$ *funções e* $R \in \mathcal{L}(V\,;\,W)$ *.*

Então

$$R \circ (S + T) = R \circ S + R \circ T\,. \tag{12.101}$$

Demonstração:

Notemos que, para cada $u \in U$, temos

$$\begin{aligned}
[R \circ (S + T)](u) &\overset{\text{definição de composição de funções}}{=} R[(S + T)(u)] \\
&\overset{\text{definição de somao de funções}}{=} R[S(u) + T(u)] \\
&\overset{R \text{ é transformação linear}}{=} R[S(u)] + R[T(u)] \\
&\overset{\text{definição de composição de funções}}{=} [R \circ S](u) + [R \circ T](u) \\
&\overset{\text{definição de soma de funções}}{=} [R \circ S + R \circ T](u)\,,
\end{aligned}$$

mostrando a validade de (12.101) e completando a demonstração do resultado.

$\square$

Voltando as trasnsformação lineares:

Proposição 12.4.5 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$*,* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos).*

Se $T \in \mathcal{L}(U\,;\,V)$ *e* $I_V \in \mathcal{L}(V)$ *é o operador linear identidade em* $(V\,,+\,,\cdot)$*, isto é,*

$$I_V(v) \doteq v\,, \quad \textit{para} \quad v \in V \tag{12.102}$$

e $I_U \in \mathcal{L}(U)$ *é o operador linear identidade em* $(U\,,+\,,\cdot)$*,isto é,*

$$I_U(u) \doteq u\,, \quad \textit{para} \quad u \in U\,, \tag{12.103}$$

então

$$I_V \circ T = T \tag{12.104}$$

$$\textit{e} \qquad T \circ I_U = T\,. \tag{12.105}$$

Demonstração:

Notemos que, para cada $u \in U$, temos

$$\begin{aligned}
(I_V \circ T)(u) &\overset{\text{definição de soma de funções}}{=} I_V[T(u)] \\
&\overset{(12.102)}{=} T(u)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[T \circ I_U](u) &\overset{\text{definição de soma de funções}}{=} T[I_U(u)] \\
&\overset{(12.103)}{=} T(u)\,,
\end{aligned}$$

mostrando (12.104) e (12.105), completando a demonstração do resultado.

$\square$

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 12.4.2 *Seja* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*).*

Consideremos $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ *dadas por*

$$\begin{aligned} & T(x,y) \doteq (x+y, 0) && (12.106)\\ e \quad & S(x,y) \doteq (x, 2y), && (12.107) \end{aligned}$$

para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*.*

Encontre

$$T \circ S \quad e \quad S \circ T.$$

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que

$$T, S \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Notemos que, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$\begin{aligned} (T \circ S)(x,y) &\overset{\text{definição de composição de funções}}{=} T[S(x,y)\\ &\overset{(12.107)}{=} T(x, 2y)\\ &\overset{(12.106)}{=} (x+2y, 0), \qquad (12.108) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (S \circ T)(x,y) &\overset{\text{definição de composição de funções}}{=} S[T(x,y)]\\ &\overset{(12.106)}{=} S(x+y, 0)\\ &\overset{(12.107)}{=} (x+y, 0), \qquad (12.109) \end{aligned}$$

finalizando a resolução.

□

Observação 12.4.5 *Notemos que, no Exemplo 12.4.2, temos (veja (12.108) e (12.109)):*

$$T \circ S \neq S \circ T.$$

Vamos introduzir a:

Definição 12.4.2 *Seja* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (ou complexo).*

Se $T \in \mathcal{L}(U)$*, definiremos*

$$\begin{aligned} & T^o \doteq I_U,\\ & T^1 \doteq T\\ e \quad & T^n \doteq T \circ T^{n-1}, \quad para \quad n \in \{2, 3, \cdots\}, && (12.110) \end{aligned}$$

onde $I_U : U \to U$ *é o operador linear identidade em* $(U, +, \cdot)$*, isto é,*

$$I_U(u) \doteq u, \qquad para\ cada \quad u \in U.$$

Com isto podemos introduzir a

Definição 12.4.3 *Seja* $(U\,,+\,,\cdot)$ *espaço vetorial real (ou complexo).*

Um operador linear $T \in \mathcal{L}(U)$ *será dito* **nilpotente** *, se existir* $n \in \mathbb{N}$*, de modo que*

$$T^n = O \in \mathcal{L}(U)\,, \tag{12.111}$$

isto é, o operador linear T^n*, é o operador linear nulo em* $(U\,,+\,,\cdot)$*.*

Observação 12.4.6 *Um exemplo simples de operador nilpotente definido em um espaço vetorial real (ou complexo) é o operador linear nulo, ou seja,* $O : U \to U$*, dada por*

$$O(u) \doteq O_U \quad \textit{para} \quad u \in U\,,$$

onde O_U *denota o vetor nulo do espaço vetorial real (ou complexo)* $(U\,,+\,,\cdot)$*.*

A verificação deste fato é imediata.

Um exemplo (não trivial) de um operador linear nilpotente, é dado pelo:

Exemplo 12.4.3 *Seja* $\left(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot\right)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*).*

Mostre que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x\,,y) \doteq (0\,,x)\,, \quad \textit{para} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,, \tag{12.112}$$

é um operador nilpotente em $\left(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot\right)$*.*

Resolução:

Observemos que, para cada $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, teremos

$$\begin{aligned} T^2(x\,,y) &\overset{(12.110)}{=} T[T(x\,,y)] \\ &\overset{(12.112)}{=} T(0\,,x) \\ &\overset{(12.112)}{=} (0\,,0)\,, \\ \text{assim,} \qquad T^2 &= O\,, \end{aligned}$$

mostrando que o operador linear T é nilpotente em $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ (no caso, $n = 2$), completando a resolução

□

Passaremos a estudar questões ligadas a função inversão associada a uma transformação ou operador linear, entre espaços vetoriais reais (ou complexos).

Para tanto temos a:

Definição 12.4.4 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos).*

Diremos que $T \in \mathcal{L}(U\,V;\,)$ **possui uma transformação inversa***, se existir uma função* $S : V \to U$*, tal que*

$$(S \circ T)(u) = u\,, \qquad \textit{para} \qquad u \in U \tag{12.113}$$

$$\textit{e} \qquad (T \circ S)(v) = v\,, \qquad \textit{para} \qquad v \in V\,. \tag{12.114}$$

Em outras palavras,

$$\text{se} \qquad T \circ S = I_V \tag{12.115}$$
$$\text{e} \qquad S \circ T = I_U\,, \tag{12.116}$$

onde $I_U : U \to U$ *é o operador linear identidade em* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $I_V : V \to V$ *é o operador linear identidade em* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Com isto temos a:

Proposição 12.4.6 *Sejam* $(U,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos).*

Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ *possui uma transformação inversa, então esta transformação inversa será única.*

Demonstração:

Suponhamos que $T \in \mathcal{L}(U\,;\,V)$ possua como transformações inversas as funções

$$R\,,S : V \to U\,.$$

Logo, da Definição 12.4.4, segue que

$$I_V = T \circ R \tag{12.117}$$
$$\text{e} \qquad I_U = S \circ T\,. \tag{12.118}$$

Com isto teremos:

$$\begin{aligned} S &\overset{(12.17)}{=} S \circ I_V \\ &\overset{(12.117)}{=} S \circ (T \circ R) \\ &\overset{\text{composição de funções é associativa}}{=} (S \circ T) \circ R \\ &\overset{(12.118)}{=} I_U \circ R \\ &\overset{(12.16)}{=} R\,, \end{aligned}$$

mostrando que

$$S = R$$

e completando a demonstração do resultado.

□

Podemos agora introduzir a:

Definição 12.4.5 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) e* $T \in \mathcal{L}(U\,;\,V)$ *que possui uma transformação inversa.*

A Proposição 12.4.6 acima garante que esta será única, ou seja, existe uma única função $S : V \to U$*, que satisfaz* (12.115) *e* (12.116)*.*

Esta função S*, associada a transformação linear* T*, será denotada por* T^{-1}*, isto é,*

$$T^{-1} \doteq S\,.$$

.

Observação 12.4.7 *Na situação da Definição 12.4.5 e utilizando-se a Definição 12.4.4, teremos:*

$$(T^{-1}\circ T)(u) = u\,, \quad \textit{para} \quad u \in U \tag{12.119}$$

$$\textit{e} \quad (T\circ T^{-1})(v) = v\,, \quad \textit{para} \quad v \in V\,, \tag{12.120}$$

$$\textit{ou ainda,} \quad v = T(u) \tag{12.121}$$

$$\textit{se, e somente se,} \quad u = T^{-1}(v)\,. \tag{12.122}$$

Lembremos das questões relacionadas a injetividade, sobrejetividade e bijetividade de funções que podem ser aplicadas as transformações ou operadores lineares entre espaços vetoriais reais (ou complexos).

Mais precisamente temos a:

Definição 12.4.6 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos).*

Uma transformação linear $T : U \to V$ *será dita*

1. **injetora**,

$$\begin{aligned} \textit{se para} \quad & u_1\,,u_2 \in U\,,\\ \textit{satisfazendo} \quad & T(u_1) = T(u_2)\,,\\ \textit{implicar que} \quad & u_1 = u_2\,. \end{aligned} \tag{12.123}$$

2. **sobrejetora**,

$$\begin{aligned} \textit{se para cada} \quad & v \in V\,,\\ \textit{podemos encontrar} \quad & u \in U\,,\\ \textit{de modo que} \quad & T(u) = v\,. \end{aligned} \tag{12.124}$$

3. **bijetora**, *se ela for injetora e sobrejetora.*

Observação 12.4.8 *Na verdade, a Definição 12.4.6 acima, é para funções em geral, não necessariamente, transformações lineares entre espaços vetoriais.*

Temos um resultado geral e básico de funções que diz:

Proposição 12.4.7 *Sejam* $U\,,V$ *conjuntos não vazios.*

A função $T : U \to V$ *possui uma função inversa se, e somente se, a função* $\underline{T}$ *é bijetora.*

Demonstração:

Suponhamos que a função $\underline{T}$ possua uma função inversa.

Logo

$$\text{se} \qquad T(u_1) = T(u_2)\,, \tag{12.125}$$

segue que

$$\begin{aligned} u_1 &\overset{(12.119)}{=} T^{-1}[T(u_1)] \\ &\overset{(12.125)}{=} T^{-1}[T(u_2)] \\ &\overset{(12.119)}{=} u_2\,. \end{aligned}$$

Portanto, do item 1. da Definição 12.4.6 acima, segue que a função $\underline{T}$ será injetora.

Dado $v \in V$, considerando-se

$$u \doteq T^{-1}(v) \in U\,, \tag{12.126}$$

segue que

$$\begin{aligned} T(u) &\overset{(12.126)}{=} T(T^{-1}(v)) \\ &\overset{(12.119)}{=} v\,. \end{aligned}$$

Logo, do item 2. da Definição 12.4.6 acima, segue que a função $\underline{T}$ também será sobrejetora.

Portanto, do item 3. da Definição 12.4.6 acima, segue que a função $\underline{T}$ será bijetora.

Reciprocamente, suponhamos que a função $\underline{T}$ seja bijetora.

Dado $v \in V$, como a função $\underline{T}$ é bijetora, do item 3. da Definição 12.4.6 acima, segue que ela será, em particular, sobrejetora.

Logo, do item 2. da Definição 12.4.6 acima, podemos encontrar um $u_v \in U$, tal que

$$v = T(u_v)\,. \tag{12.127}$$

Notemos que, do item 1. da Definição 12.4.6 acima, segue que o $u_v \in U$ obtido acima será único.

Deixaremos a verificação deste fato como exerrcício para o leitor.

Definamos a função $S : V \to U$, por

$$S(v) \doteq u_v\,, \quad \text{para cada} \quad v \in U\,. \tag{12.128}$$

Mostremos que a função $\underline{S}$ é a função inversa associada à função $\underline{T}$.

Para isto, notemos que, se $v \in V$ teremos:

$$\begin{aligned} T[S(v)] &\overset{(12.128)}{=} T(u_v) \\ &\overset{(12.127)}{=} v\,, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \qquad T \circ S = I_V\,. \tag{12.129}$$

Por outro lado, se $u \in U$, teremos que

$$S[T(u)] \in U\,,$$

pela definição da função $\underline{S}$ (ver (12.127) e (12.128)), será o único elemento $u_V \in U$ tal que

$$T(u_v) = T(u)\,.$$

Como,por hipótese, a função $\underline{T}$ é injetora, , do item 1. da Definição 12.4.6 acima, teremos

$$u_v = u$$

e, assim, segue que

$$S[T(u)] = u\,,$$

$$\text{ou seja,} \qquad S \circ T = I_U\,. \tag{12.130}$$

Portanto, de (12.129), (12.130) e a Definição 12.4.4 (e a Proposição 12.4.6), que a função $\underline{S}$ é uma transformação inversa associada à função $\underline{T}$, completando a demonstração do resultado.

□

Voltando as transformações lineares, temos a:

Proposição 12.4.8 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos).*

Se $T \in \mathcal{L}(U\,;\,V)$ *possui transformação inversa* $T^{-1} : V \to U$*, então* $T^{-1} : V \to U$ *será uma transformação linear de* $(V\,,+\,,\cdot)$ *em* $(U\,,+\,,\cdot)$*, ou seja,*

$$T^{-1} \in \mathcal{L}(V\,;\,U)\,. \tag{12.131}$$

Demonstração:

Devemos mostrar que $T^{-1} : V \to U$ é uma transformação linear de $(V\,,+\,,\cdot)$ em $(U\,,+\,,\cdot)$.

Para isto sejam

$$v_1\,,v_2 \in V$$

$$\text{e} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})\,.$$

Como a transformação linear $\underline{T}$ admite transformação inversa, pela Proposição 12.4.7, ela será bijetora, em particular, sobrejetora (veja os itens 3. e 2. da Definição 12.4.6).

Logo, do item 2. da Definição 12.4.6, podemos encontrar

$$u_1\,,u_2 \in U\,,$$

$$\text{tais que} \qquad T(u_1) = v_1 \tag{12.132}$$

$$\text{e} \qquad T(u_2) = v_2\,, \tag{12.133}$$

$$\text{ou, de (12.122), equivalentemente:} \qquad T^{-1}(v_1) = u_1 \tag{12.134}$$

$$\text{e} \qquad T^{-1}(v_2) = u_2\,. \tag{12.135}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
T^{-1}(v_1 + \lambda \cdot v_2) &\overset{(12.132)}{=} T^{-1}\,[T(u_1) + \lambda \cdot T(u_2)] \\
&\overset{T \text{ é transformação linear e } (12.5)}{=} T^{-1}[T(u_1 + \lambda \cdot u_2)] \\
&\overset{T^{-1} \circ T = I_U}{=} u_1 + \lambda \cdot u_2 \\
&\overset{(12.134) \text{ e } (12.135)}{=} T^{-1}(v_1) + \lambda \cdot T^{-1}(v_2)\,.
\end{aligned}$$

Logo, do item 2. da da Observação 12.2.1, segue que $T^{-1} \in \mathcal{L}(V, U)$, completando a demonstração do resultado.

□

Para finalizar temos a:

Proposição 12.4.9 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos).*

Uma transformação linear $T : U \to V$ *é injetora se, e somente se, a **<u>única</u>** solução de*

$$T(u) = O_V$$

é o vetor nulo, isto é,

$$\begin{array}{rl} \textit{se} & u \in U \\ \textit{satisfaz} & T(u) = O_V\,, \\ \textit{deveremos ter} & u = O_U\,. \end{array} \tag{12.136}$$

Demonstração:

Suponhamos que

$$T \in \mathcal{L}(U\,;V)$$

seja injetora e que

$$T(u) = O_V\,. \tag{12.137}$$

Do item 3. da Observação 12.2.1 (ou ainda, (12.6)), segue que

$$\begin{array}{rl} & O_V = T(O_U)\,, \\ \text{que, juntamente com (12.137), teremos:} & T(u) = T(O_U)\,. \end{array} \tag{12.138}$$

Como a transformação <u>T</u> é uma função injetora (veja o item 1. da Observação 12.4.6), deveremos ter

$$u = O_U\,,$$

isto é, a única solução de

$$\begin{array}{rl} & T(u) = O_V\,, \\ \text{deverá ser} & u = O_U\,, \end{array}$$

mostrando (12.136).

Reciprocamente, suponhamos que (12.136) ocorre, isto é, a única solução de

$$\begin{array}{rl} & T(w) = O_V\,, \\ \text{deverá ser} & w = O_U\,. \end{array} \tag{12.139}$$

Logo, para $u\,, v \in U$, se

$$\begin{array}{rl} & T(u) = T(v)\,, \\ \text{ou, equivalentemente,} & \underbrace{T(u) - T(v)}_{T \text{ é transformação linear e (12.9)} \atop = T(u-v)} = O_V\,, \\ \text{ou seja,} & T(u - v) = O_V\,. \end{array}$$

Logo, de (12.139) (com $w \doteq u - v$), deveremos ter

$$u - v = w = O_U\,,$$

que, de (4.91), implicará que: $\quad u = v\,,$

mostrando, pelo o item 1. da Observação 12.4.6, que a transformação linear T é injetora, completando a demonstração do resultado.

□

12.5 Imagem e núcleo de uma transformação linear

Começaremos com a

Definição 12.5.1 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) e* $T : U \to V$ *uma transformação linear.*

1. *Se* $X \subseteq U$*, definimos a* **imagem do conjunto** X**, pela transformação linear** T*, indicada por* $T(X)$*, como sendo o conjunto*

$$T(X) \doteq \{T(x)\,;\, x \in X\} \subseteq V\,. \tag{12.140}$$

2. *Se* $Y \subseteq V$*, definimos a* **imagem inversa do conjunto** Y**, pela transformação linear** T*, indicada por* $T^{-1}(Y)$*, como sendo o conjunto*

$$T^{-1}(Y) \doteq \{u \in U\,;\, T(u) \in Y\} \subseteq U\,. \tag{12.141}$$

Observação 12.5.1 *Notemos que no item 2 da Definição 12.5.1 acima,*

$$T^{-1}(Y)$$

não *tem nada a ver com a transformação inversa, associada à transformação linear* T *que pode, eventualmente, nem existir.*

Temos agora a:

Proposição 12.5.1 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) de modo que*

$$\dim(V) = 1\,. \tag{12.142}$$

Se $T : U \to V$ *é um transformação linear, não identicamente nula, então a transformação linear* T *será sobrejetora.*

Demonstração:

Como a transformação linear T é não nula, segue que existe $u_o \in U$, tal que

$$T(u_o) \neq O_V\,.$$

Como o espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$ tem igual a dimensão $\underline{1}$, então qualquer base (ordenada) do mesmo, será constituída por um vetor não nulo.

Logo o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{T(u_o)\}$$

será uma base (ordenada) do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$, pois $T(u_o) \in V$ é um vetor não nulo e $\dim(V) = 1$, por hipótese.

Assim, dado $v \in V$, como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) de $(V, +, \cdot)$, segue que podemos encontrar um único escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tal que

$$v = \alpha \cdot T(u_o) \overset{\text{T é transformação linear (ou ainda, (12.2))}}{=} T(\alpha \cdot u_o)\,,$$

ou seja, pelo item 2. da Definição 12.4.6, a transformação linear $\underline{T}$ é sobrejetora, como queríamos demonstrar.

□

Observação 12.5.2 *Na situação da Proposição 12.5.1 acima, utilizando* (12.141), *podemos concluir que*

$$\begin{array}{rl} \textit{se} & v_o \in V\,, \\ \textit{satisfaz} & v_o \neq O_V\,, \\ \textit{então} & T^{-1}(\{v_o\}) = U\,, \end{array}$$

ou seaj, a imagem inversa do conjunto $\{v_o\}$, *pela aplicação* T, *será o conjunto* U.

Como consequência temos o:

Corolário 12.5.1 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais em* $\mathbb{R}$*).*

Se $\underline{T}$ *é um funcional linear definido em* $(U, +, \cdot)$, *não identicamente nulo, então o funcional linear* $\underline{T}$ *será sobrejetor.*

Demonstração:

Como

$$\dim(\mathbb{R}) = 1$$

da Proposição 12.5.1 acima, segue a conclusão do resultado, completando a demonstração.

□

Observação 12.5.3 *Vale um resultado análogo ao Corolário 12.5.1 acima, trocando-se o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *pelo espaço vetorial complexo* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *e* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial complexo.*

Temos também a:

Proposição 12.5.2 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) e* $T : U \to V$ *uma transformação linear.*

1. *Se* W *é um subespaço vetorial de* $(U\,,+\,,\cdot)$*, então* $T(W)$ *será um subespaço vetorial de* $(V\,,+\,,\cdot)$.

2. *Se* Y *é um subespaço vetorial de* $(V\,,+\,,\cdot)$*, então o conjunto* $T^{-1}(Y)$ *será um subespaço vetorial de* $(U\,,+\,,\cdot)$.

Demonstração:
Do item 1. :
Seja W um subespaço vetorial de $(U\,,+\,,\cdot)$, logo, de (5.1)

$$\begin{aligned}
\text{teremos} \quad & O_U \in W\,. \\
\text{Logo, de , segue que:} \quad & T(O_U) \overset{T \text{ é transformação linear (veja (12.6))}}{=} O_V\,, \\
\text{ou seja} \quad & O_V \in T(W)\,.
\end{aligned}$$

Sejam $v_1\,, v_2 \in T(W)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
Notemos que, se

$$v_1\,, v_2 \in T(W)\,,$$

de (12.140), segue que, podemos encontrar $w_1\,, w_2 \in W$ tais que

$$\begin{aligned}
& v_1 = T(w_1) \\
\text{e} \quad & v_2 = T(w_2)\,.
\end{aligned} \tag{12.143}$$

Como W é um subespaço vetorial de $(U\,,+\,,\cdot)$, do item 2. da Observação 12.2.1, segue que

$$(w_1 + \lambda \cdot w_2) \in W\,.$$

Logo

$$\begin{aligned}
v_1 + \lambda \cdot v_2 & \overset{(12.143)}{=} T(w_1) + \lambda \cdot T(w_2) \\
& \overset{T \text{ é transformação linear (ou ainda, (12.5))}}{=} T \underbrace{(w_1 + \lambda \cdot w_2)}_{\in W, \text{ pois } W \text{ é subespaço vetorial}} \in T(W)\,.
\end{aligned}$$

Logo, do item 2. da Observação 12.2.1, segue que o conjunto $T(W)$ é um subespaço vetorial de $(V\,,+\,,\cdot)$.
Do item 2. :
Seja Y um subespaço vetorial de $(V\,,+\,,\cdot)$.
Notemos que

$$\begin{aligned}
& T(O_U) \overset{T \text{ é transformação linear (veja (12.6))}}{=} O_V\,, \\
\text{e} \quad & O_U \in Y\,,
\end{aligned}$$

pois Y é subespaço vetorial de $(V\,,+\,,\cdot)$.

Logo, do fato acima e de (12.141), segue que

$$O_U \in T^{-1}(Y) .$$

Se

$$\begin{aligned} & u_1 , u_2 \in T^{-1}(Y) \\ \text{e} \quad & \lambda \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{)} , \\ \text{de (12.141), segue que} \quad & T(u_1) , T(u_2) \in Y . \end{aligned}$$

Como Y é um subespaço vetorial de $(V , + , \cdot)$, do fato acima e do item 2. da Observação 12.2.1, teremos:

$$T(u_1) + \lambda \cdot T(u_2) \in Y . \tag{12.144}$$

Mas

$$\begin{aligned} T(u_1 + \lambda \cdot u_2) & \overset{T \text{ é transformação linear (veja (12.5))}}{=} T(u_1) + \lambda \cdot T(u_2) \\ & \overset{(12.144)}{\in} Y , \\ \text{logo, de (12.141), segue que} \quad & (u_1 + \lambda \cdot u_2) \in T^{-1}(Y) . \end{aligned}$$

Logo, do item item 2. da Observação 12.2.1, segue que o conjunto $T^{-1}(Y)$ é um subespaço vetorial de $(U , + , \cdot)$, completando a demonstração do resultado.

□

Podemos agora introduzir a:

Definição 12.5.2 *Sejam* $(U , + , \cdot)$ *e* $(V , + , \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) e* $T : U \to V$ *uma transformação linear.*

Definimos o **núcleo da transformação linear** T*, indicado por* $\mathcal{N}(T)$*, como sendo o subconjunto de* U*, dado por* $T^{-1}(\{O_V\})$*, ou seja,*

$$\mathcal{N}(T) \doteq \{u \in U \,;\, T(u) = O_V\} . \tag{12.145}$$

Corolário 12.5.2 *Na situação da Definição 12.5.2, temos que núcleo da transformação linear* T*, ou seja,* $\mathcal{N}(T)$*, é um subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo)* $(U , + , \cdot)$ *.*

Demonstração:

Como

$$\mathcal{N}(T) = T^{-1}(\{O_V\}) ,$$

do item 2. da Proposição 12.5.2, segue que $\mathcal{N}(T)$, é um subespaço vetorial do espaço vetorial real (ou complexo) $(U , + , \cdot)$, completando a demonstração.

□

Como consequência da Proposição 12.4.9, temos o

Corolário 12.5.3 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) e* $T : U \to V$ *uma transformação linear.*

A transformação linear $\underline{T}$ *é injetora se, e somente se,*

$$\mathcal{N}(T) = \{O_U\}. \tag{12.146}$$

Demonstração:

Veja a Proposição 12.4.9.

□

Temos também a:

Proposição 12.5.3 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (ou complexo) e* $T \in \mathcal{L}(U)$. *Então*

$$\begin{aligned} & T^2 = O \\ \textit{se, e somente se,} \quad & T(U) \subseteq \mathcal{N}(T). \end{aligned} \tag{12.147}$$

Demonstração:

Suponhamos que

$$T^2 = O. \tag{12.148}$$

Logo, se $v \in T(U)$, de (12.140), segue que podemos encontrar

$$\begin{aligned} & u \in U, \\ \text{de modo que} \quad & v = T(u). \end{aligned} \tag{12.149}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T(v) & \overset{(12.149)}{=} T[T(u)] \\ & = T^2(u) \\ & \overset{(12.148)}{=} O_V, \\ \text{que, de (12.145), é o mesmo que escrever:} \quad & v \in \mathcal{N}(T). \\ \text{Portanto:} \quad & T(U) \subseteq \mathcal{N}(T). \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que

$$T(U) \subseteq \mathcal{N}(T). \tag{12.150}$$

Dado $u \in U$, como

$$T(u) \in T(U) \overset{(12.150)}{\subseteq} \mathcal{N}(T), \tag{12.151}$$

segue que

$$\begin{aligned} T^2(u) & = T[\underbrace{T(u)}_{\overset{(12.151)}{\in} \mathcal{N}(T) \text{ e } (12.145)}] \\ & = O_V, \\ \text{ou seja,} \quad T^2 & = O, \end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

□

Consideremos agora o:

Exercício 12.5.1 *Sejam* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*) e* $\theta_o \in \mathbb{R}$ *fixado.*

Encontre o núcleo do operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x, y) \doteq (x\cos(\theta_o) - y\,\mathrm{sen}(\theta_o), x\,\mathrm{sen}(\theta_o) + y\cos(\theta_o)), \quad \textit{para} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{12.152}$$

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Pela Definição 12.5.2 (veja (12.145)), temos que

$$(x, y) \in \mathcal{N}(T)$$

$$\text{se, e somente se,} \qquad T(x, y) = O_{\mathbb{R}^2} = (0, 0),$$

que, de (12.152), é equivalentemente a:

$$(x\cos(\theta_o) - y\,\mathrm{sen}(\theta_o), x\,\mathrm{sen}(\theta_o) + y\cos(\theta_o)) = (0, 0),$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} x\cos(\theta_o) - y\,\mathrm{sen}(\theta_o) = 0 \\ x\,\mathrm{sen}(\theta_o) + y\cos(\theta_o) = 0 \end{cases},$$

$$\text{ou ainda,} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta_o) & -\mathrm{sen}(\theta_o) \\ \mathrm{sen}(\theta_o) & \cos(\theta_o) \end{pmatrix}}_{\det=1\neq 0, \text{ e o Corolário } 3.7.1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{ou, equivalentemente, teremos:} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{isto é,} \qquad (x, y) = (0, 0).$$

Portanto,

$$\mathcal{N}(T) = \{(0, 0)\},$$

completando a resolução.

□

Observação 12.5.4

1. *Em particular, pela Proposição 12.5.3, segue que o operador linear* $\underline{T}$*, dado por (12.152), é injetor.*

2. *Geometricamente, o operador linear* T*, do pelo Exemplo 12.5.1 (dado por (12.152)) acima, leva um vetor não nulo, em uma rotação do ângulo* θ_o*, no sentido anti-horário.*

   Deixaremos a verificação deste fato exercício para o leitor.

Podemos agora enunciar e demonstrar o:

Teorema 12.5.1 (Teorema do núcleo e da imagem) *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) e* $T : U \to V$ *uma transformação linear.*

Se

$$\dim(U) = n < \infty \,, \tag{12.153}$$

$$\textit{teremos:} \qquad \dim(U) = \dim[\mathcal{N}(T)] + \dim[T(U)] \,. \tag{12.154}$$

Demonstração:

Do Corolário 12.5.2, temos que

$$\mathcal{N}(T)$$

é subespaço vetorial de $(U, +, \cdot)$

$$\text{e como} \qquad \dim(U) = n < \infty \,,$$

$$\text{de (9.9), segue que} \qquad p \doteq \dim[\mathcal{N}(T)] \leq n < \infty \,. \tag{12.155}$$

Consideremos primeiramente o caso

$$p = 0 \,,$$

$$\text{isto é,} \qquad \mathcal{N}(T) = \{O\} \,. \tag{12.156}$$

Como,por hipótese,

$$\dim(U) = n < \infty \,,$$

segue que podemos encontrar um conjunto de vetores

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1 \,, u_2 \,, \cdots \,, u_n\} \tag{12.157}$$

que é uma base (ordenada) de $(U, +, \cdot)$.

Afirmamos que o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{T(u_1) \,, T(u_2) \,, \cdots \,, T(u_n)\} \tag{12.158}$$

formam uma base (ordenada) do subespaço vetorial $T(U)$ (veja o item 1. da Proposição 12.5.2), do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.

De fato, se $w \in T(U)$ (veja (12.140)), segue que podemos encontrr

$$u \in U \,,$$

$$\text{de modo que} \qquad T(u) = w \,. \tag{12.159}$$

Como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) de $(U, +, \cdot)$, segue que podemos encontrar escalares

$$\alpha_1 \,, \alpha_2 \,, \cdots \,, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \,,$$

$$\text{tais que} \qquad u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \,. \tag{12.160}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
w &= T(u) \\
&\overset{(12.160)}{=} T(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) \\
&\overset{T \text{ é transformação linear e temos } (12.10)}{=} \alpha_1 \cdot T(u_1) + \alpha_2 \cdot T(u_2) + \cdots + \alpha_n \cdot T(u_n)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{ou seja,} \quad & w \in [T(u_1)\,, T(u_2)\,, \cdots, T(u_n)]\,, \\
\text{ou ainda,} \quad & T(U) = [T(u_1)\,, T(u_2)\,, \cdots, T(u_n)]\,.
\end{aligned}
$$

Portanto o conjunto de vetores $\mathcal{C}$ gera o subespaço vetorial $(T(U)\,, +\,, \cdot)$.
Mostremos que o conjunto de vetores $\mathcal{C}$ é L.I. em $(V\,, +\,, \cdot)$.
Para isto, notemos que,

$$
\text{se} \quad \alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \ (\text{ou } \mathbb{C})\,,
$$

são tais que

$$
\begin{aligned}
O &= \alpha_1 \cdot T(u_1) + \alpha_2 \cdot T(u_2) + \cdots + \alpha_n \cdot T(u_n) \\
&\overset{T \text{ é transformação linear e temos } (12.10)}{=} T(\alpha_1 \cdot u_1 \alpha_2 \cdot u_2 + + \cdots + \alpha_n \cdot u_n)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{teremos:} \quad & (\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) \in \mathcal{N}(T) \overset{(12.156)}{=} \{O\}, \\
\text{isto é,} \quad & \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = O\,.
\end{aligned}
$$

Como o conjunto de vetores

$$
\mathcal{B} = \{u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n\}
$$

é L.I. em $(U\,, +\,, \cdot)$ (pois, de (12.157), é uma base (ordenada) de $(U\,, +\,, \cdot)$), segue que

$$
\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,
$$

mostrando que o conjunto de vetores

$$
\mathcal{C} = \{T(u_1)\,, T(u_2)\,, \cdots, T(u_n)\}
$$

é L.I. em $(V\,, +\,, \cdot)$.

Portanto o conjunto de vetores $\mathcal{C}$ gera e é L.I. em $(T(U)\,, +\,, \cdot)$, logo será uma base (ordenada) para o espaço vetorial real (ou complexo) $(T(U)\,, +\,, \cdot)$.

Em particular, teremos

$$
\dim[T(U)] = n\,. \tag{12.161}
$$

Logo podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
\dim(U) &\overset{(12.153)}{=} n \\
&= \underbrace{0}_{\overset{(12.156)}{=} \dim[\mathcal{N}(T)]} + \underbrace{n}_{\overset{(12.161)}{=} \dim[T(U)]} \\
&= \dim[\mathcal{N}(T)] + \dim[T(U)]\,,
\end{aligned}
$$

ou seja, vale a identidade (12.154), quando

$$\dim[\mathcal{N}(T)] = 0\,.$$

Tratemos agora do caso

$$p = \dim[\mathcal{N}(T)] \geq 1\,. \tag{12.162}$$

Seja

$$\mathcal{B}_1 \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_p\} \tag{12.163}$$

uma base (ordenada) de $(\mathcal{N}(T)\,, +\,, \cdot)$.

Pelo Teorema do completamento (isto é, Teorema 9.4.1), segue que podemos encontrar $q \in \mathbb{N}$,vetores

$$w_1\,, w_2\,, \cdots\,, w_q \in U$$

tais que o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_p\,, w_1\,, w_2\,, \cdots\,, w_q\} \tag{12.164}$$

é uma base (ordenada) de $(U\,, +\,, \cdot)$.

Desta forma teremos que

$$\dim(U) = p + q\,. \tag{12.165}$$

Como

$$\dim[\mathcal{N}(T)] = p\,,$$

para obtermos a identidade (12.154), resta mostrar que

$$\dim[T(U)] = q\,. \tag{12.166}$$

Para isto, mostraremos que o conjunto de vetores

$$\mathcal{D} \doteq \{T(w_1)\,, T(w_2)\,, \cdots\,, T(w_q)\}\,, \tag{12.167}$$

é uma base (ordenada) de $(T(U)\,, +\,, \cdot)$.

Afirmamos, primeiramente, que o conjunto de vetores $\mathcal{D}$ é L.I. em $(V\,, +\,, \cdot)$.

De fato,

$$\text{se} \qquad \alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots\,, \alpha_q \in \mathbb{R}\ (\text{ou } \mathbb{C})\,,$$

$$\text{são tais que}$$

$$\begin{aligned} O &= \alpha_1 \cdot T(w_1) + \alpha_2 \cdot T(w_2) + \cdots + \alpha_q \cdot T(w_q) \\ &\overset{T \text{ é transformação linear e temos } (12.10)}{=} T(\alpha_1 \cdot w_1 + \cdots + \alpha_q \cdot w_q) \end{aligned}$$

$$\text{isto é, teremos:} \qquad (\alpha_1 \cdot w_1 + \cdots + \alpha_q \cdot w_q) \in \mathcal{N}(T)\,.$$

Como o conjunto o conjunto de vetores $\mathcal{B}$, dado por (12.163), é uma base (ordenada) de $(\mathcal{N}(T)\ +\ \cdot)$, segue que podemos encontrar escalares

$$\begin{aligned} & \beta_1\,, \beta_2\,, \cdots\,, \beta_p \in \mathbb{R}\ (\text{ou } \mathbb{C})\,, \\ \text{de modo que} \quad & \alpha_1 \cdot w_1 + \alpha_2 \cdot w_2 + \cdots + \alpha_q \cdot w_q = \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_p \cdot u_p\,, \\ \text{isto é,} \quad & \alpha_1 \cdot w_1 + \alpha_2 \cdot w_2 + \cdots + \alpha_q \cdot w_q - \beta_1 \cdot u_1 - \beta_2 \cdot u_2 - \cdots - \beta_p \cdot u_p = O\,. \end{aligned}$$

Como o conjunto de vetores $\mathcal{C}$ formam uma base (ordenada) de $(U\,,+\,,\cdot)$ (veja (12.164)), segue que o conjunto $\mathcal{C}$ será L.I. em $(U\,,+\,,\cdot)$.

Portanto, deveremos ter

$$\begin{aligned} & \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_q = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0\,, \\ \text{em particular,} \quad & \alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0\,, \end{aligned}$$

o que mostra que o conjunto de vetores

$$\mathcal{D} = \{T(w_1)\,, T(w_2)\,, \cdots\,, T(w_q)\}$$

é L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$.

Mostremos que o conjunto de vetores $\mathcal{D}$, gera o espaço vetorial real (ou complexo) $(T(U), +, \cdot)$.

Notemos que,

$$\begin{aligned} \text{se} \quad & v \in T(U)\,, \\ \text{podemos encontrar,} \quad & u \in U\,, \\ \text{tal que} \quad & T(u) = v\,. \end{aligned} \tag{12.168}$$

Como o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} = \{u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_p\,, w_1\,, w_2\,, \cdots\,, w_q\}$$

é uma base (ordenada) de $(U\,,+\,,\cdot)$ (veja (12.164)), podemos encontrar escalares

$$\begin{aligned} & \alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots\,, \alpha_p\,, \beta_1\, \beta_2\,, \cdots\,, \beta_p \in \mathbb{R} \text{ ou } (\mathbb{C})\,, \\ \text{de modo que} \quad & u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p + \beta_1 \cdot w_1 + \cdots + \beta_q \cdot w_q\,, \end{aligned} \tag{12.169}$$

com isto teremos:

$$\begin{aligned} v & \overset{(12.168)}{=} T(u) \\ & \overset{(12.169)}{=} T(\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p + \beta_1 \cdot w_1 + \cdots + \beta_q \cdot w_q) \\ & \overset{T \text{ é transformação linear e temos } (12.10)}{=} \alpha_1 \cdot \underbrace{T(u_1)}_{u_1 \overset{(12.163)}{\in} \mathcal{N}(T) \atop = O} + \cdots + \alpha_p \cdot \underbrace{T(u_p)}_{u_p \overset{(12.163)}{\in} \mathcal{N}(T) \atop = O} + \beta_1 \cdot T(w_1) + \cdots + \beta_q \cdot T(w_q) \\ & = \beta_1 \cdot T(w_1) + \cdots + \beta_q \cdot T(w_q)\,. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} & v \in [T(w_1), \cdots, T(w_q)]\,, \\ \text{ou seja,} \quad & T(U) = [T(w_1), \cdots, T(w_q)]\,, \end{aligned}$$

ou ainda, o conjunto de vetores

$$\mathcal{D} = \{T(w_1), \cdots, T(w_q)\}$$

gera o espaço vetorial real (ou complexo) $(T(U), +, \cdot)$.

Assim, o conjunto de vetores $\mathcal{D}$, dado por (12.167), é uma base (ordenada) de $(T(U), +, \cdot)$.

Em particular, teremos

$$\dim[T(U)] = q\,. \tag{12.170}$$

Portanto, teremos

$$\begin{aligned}\dim(U) &\overset{(12.165)}{=} \underbrace{p}_{\overset{(12.162)}{=}\dim[\mathcal{N}(T)]} + \underbrace{q}_{\overset{(12.170)}{=}\dim[T(U)]}\\ &= \dim[\mathcal{N}(T)] + \dim[T(U)]\,,\end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o:

Corolário 12.5.4 *Sejam $(U, +, \cdot)$ e $(V, +, \cdot)$ espaços vetoriais reais (ou complexos) de dimensões finita tais que*

$$\dim(U) = \dim(V) \tag{12.171}$$

e $T : U \to V$ uma transformação linear.

As seguintes condições são equivalentes:

1. *A transformação linear T é sobrejetora;*

2. *A transformação linear T é injetora;*

3. *A transformação linear T é bijetora;*

4. *A transformação linear T leva uma base (ordenada) de $(U, +, \cdot)$ em uma base (ordenada) de $(V, +, \cdot)$, isto é, se o conjunto*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

é uma base (ordenada) de $(U, +, \cdot)$ então o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{T(u_1), T(u_2), \cdots, T(u_n)\}$$

será uma base (ordenada) de $(V, +, \cdot)$.

Demonstração:

Mostremos que 1. implicará em 2. :

Suponhamos que a transformação linear $T : U \to V$ é sobrejetora, isto é,

$$T(U) = V\,. \tag{12.172}$$

Logo, pelo Teorema 12.5.1 acima, temos que

$$\begin{aligned}
\dim(U) &\overset{(12.154)}{=} \dim[\mathcal{N}(T)] + \dim[\underbrace{T(U)}_{\overset{(12.172)}{=} V}] \\
&= \dim[\mathcal{N}(T)] + \underbrace{\dim(V)}_{\overset{(12.171)}{=} \dim(U)}\,, \\
\text{ou seja,} \quad & \dim[\mathcal{N}(T)] = 0\,, \\
\text{ou ainda,} \quad & \mathcal{N}(T) = \{O\}\,.
\end{aligned}$$

Logo, da Proposição 12.5.3, segue que a transformação linear T será injetora, mostrando que o item 2. ocorre.

Mostremos que 2. implicará em 3. :

Suponhamos que a transformação linear $T : U \to V$ é injetora.

Da Proposição 12.5.3, segue que

$$\mathcal{N}(T) = \{O\}\,,$$

$$\text{assim,} \qquad \dim[\mathcal{N}(T)] = 0\,. \tag{12.173}$$

Logo, Teorema 12.5.1 acima, segue-se que

$$\begin{aligned}
\dim(U) &\overset{(12.154)}{=} \underbrace{\dim[\mathcal{N}(T)]}_{\overset{(12.173)}{=} 0} + \dim[T(U)] \\
&= \dim[T(U)]\,,
\end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \qquad \dim(U) = \dim[T(U)]\,. \tag{12.174}$$

Como, por hipótese (veja (12.171)),

$$\dim(U) = \dim(V)\,,$$

segue, da identidade (12.174) acima, que

$$\dim[T(U)] = \dim(V)\,.$$

Logo o conjunto $T(U)$ é um subespaço do espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$ que tem a mesma dimensão de $(V\,,+\,,\cdot)$.

Portanto, do Corolário 9.5.1, segue que

$$T(U) = V\,,$$

isto é, a transformação linear T é sobrejetora.

Dessa forma, a transformação linear T que, por hipótese é injetora, será sobrejetora, logo é bijetora, mostrando que o item 3. ocorre.

Mostremos que 3. implicará em 4. :

Suponhamos que a transformação linear T seja bijetora.

Consideremos o conjunto de vetores

$$\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$$

uma base (ordenada) de $(U, +, \cdot)$.

Precisamos mostrar o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} \doteq \{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}$$

é uma base (ordenada) de $(V, +, \cdot)$.

Afirmamos que o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} \doteq \{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}$$

é L.I. em $(V, +, \cdot)$.

De fato,

$$\text{se} \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}),$$

$$\text{satisfazem} \quad O = \alpha_1 \cdot T(u_1) + \cdots + \alpha_n \cdot T(u_n) \overset{\text{T é transformação linear e temos (12.10)}}{=} T(\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n),$$

$$\text{isto é,} \quad (\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) \in \mathcal{N}(T).$$

Como a transformação linear T é injetora, da Proposição 12.5.3, segue que

$$\mathcal{N}(T) = \{O\}$$

$$\text{e, consequentemente, deveremos ter:} \quad \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O. \tag{12.175}$$

Como o conjunto de vetores $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ é uma base (ordenada) de $(U, +, \cdot)$, ele deverá ser L.I. em $(U, +, \cdot)$.

Com isto, do fato acima e de (12.175), deveremos ter

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

portanto o conjunto formado pelos vetores

$$\mathcal{C} = \{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}$$

é L.I. em $(V, +, \cdot)$.

Afirmamos que o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} = \{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}$$

gera $(V, +, \cdot)$, ou seja,

$$[\mathcal{C}] = V.$$

De fato, se

$$v \in V,$$

como a transformação linear $\underline{T}$ é sobrejetora, podemos encontrar

$$\begin{aligned} & u \in U\,, \\ \text{tal que} \quad & v = T(u)\,. \end{aligned} \tag{12.176}$$

Como o conjunto de vetores $\mathcal{B} = \{u_1\,, \cdots\,, u_n\}$ é uma base (ordenada) de $(U\,,+\,,\cdot)$, segue que podemos encontrar escalares

$$\begin{aligned} & \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})\,, \\ \text{de modo que} \quad & u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n\,. \end{aligned} \tag{12.177}$$

Com isto temos

$$\begin{aligned} v & \overset{(12.176)}{=} T(u) \\ & \overset{(12.177)}{=} T(\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) \\ & \overset{T \text{ é transformação linear e temos } (12.10)}{=} \alpha_1 \cdot T(u_1) + \cdots + \alpha_n \cdot T(u_n), \end{aligned}$$

isto é, o conjunto de vetores $\mathcal{C} = \{T(u_1)\,, \cdots\,, T(u_n)\}$ gera $(V\,,+\,,\cdot)$.

Portanto o conjunto de vetores $\mathcal{C}$ é L.I. e gera $(V\,,+\,,\cdot)$, ou seja, é uma base (ordenada) de $(V\,,+\,,\cdot)$, mostrando que o item 4. ocorre.

Observação 12.5.5 *Observe que já havíamos provado isto na demonstração da Proposição 12.3.1.*

<u>Mostremos que 4. implicará em 1. :</u>

Suponhamos que o conjunto de vetores

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\}$$

é uma base (ordenada) de $(U, +, \cdot)$.

Por hipótese, sabemos que o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}$$

é uma base (ordenada) de $(V\,,+\,,\cdot)$.

Mostremos que a transformação linear $T : U \to V$ é sobrejetora.

Para isto, consideremos $v \in V$.

Como $\mathcal{C}$ é uma base (ordenada) de $(V\,,+\,,\cdot)$, segue que podemos encontrar escalares

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})\,,$$

de modo que

$$\begin{aligned} v & = \alpha_1 \cdot T(u_1) + \cdots + \alpha_n \cdot T(u_n) \\ & \overset{T \text{ é transformação linear e temos } (12.10)}{=} T(\underbrace{\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n}_{\doteq u}), \end{aligned} \tag{12.178}$$

ou seja, podemos encontrar (veja (12.178)),

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \in U\,,$$
$$\text{tal que} \qquad T(u) = v\,,$$

ou seja, a transformação linear $\underline{T}$ é sobrejetora, ou seja, o item 1. ocorre, completando a demonstração do resultado.

□

A Q U I

Consideremos o seguinte exemplo:

Exercício 12.5.2 *Seja* $(\mathbb{R}^2\,, +\,, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*).*

Mostre que toda transformação linear bijetora

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,$$

leva retas de $\mathbb{R}^2$ *em retas de* $\mathbb{R}^2$*, isto é, a imagem de uma reta de* $\mathbb{R}^2$*, pela transformação linear bijetora* $\underline{T}$*, é uma reta de* $\mathbb{R}^2$*.*

Resolução:

Dada uma reta $\underline{r}$ no plano $\mathbb{R}^2$, usaremos a equação vetorial para representar seus pontos, isto é, um ponto

$$P \in r \quad \text{se, e somente se,} \quad P = P_o + \lambda \cdot \vec{v}\,, \tag{12.179}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, onde P_o é um ponto sobre a reta, $\vec{v} \neq O$ é um vetor direção da reta.

A imagem da reta $\underline{r}$, pela transformação linear bijetora $\underline{T}$, será dada por

$$T(r) \doteq \{T(P)\,;\, P \in r\}\,.$$

Assim, um ponto

$$S \in T(r) \quad \text{se, e somente se,} \quad S = T(P)\,,$$

para algum $P \in r$, ou seja,

$$S = T(P) \overset{(12.179)}{=} T\,(P_o + \lambda \cdot \vec{v}) \overset{T \text{ é transf. linear}}{=} T(P_o) + \lambda \cdot T\,(\vec{v})\,, \qquad (*) \tag{12.180}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como transformação linear T é injetora e $\vec{v} \neq \vec{0}$, segue que

$$T\,(\vec{v}) \neq \vec{0}\,.$$

Assim (12.180) nos fornece a equação vetorial de uma reta no plano $\mathbb{R}^2$, que passa pelo ponto $T(P_o)$ e tem a direção do vetor (não nulo) $T\,(\vec{v})$.

Portanto $T(r)$ é uma reta em $\mathbb{R}^2$, como afirmamos.

□

Exercício 12.5.3 *Sejam* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^n$*) e*

$$a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$$

não todos nulos, fixados.

Mostre que o subespaço

$$H \doteq \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \, a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}$$

tem dimensão $n-1$*, ou seja,*

$$\dim(H) = n - 1 \,.$$

Resolução:

Observemos que o $\underline{H}$ pode ser obtido como sendo o núcleo do seguinte funcional linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(x_1, \cdots, x_n) \doteq a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \,, \quad \text{para cada} \quad (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,,$$

ou seja,

$$\mathcal{N}(T) = H \,. \tag{12.181}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Em particular, o conjunto $\underline{H}$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Como nem todos os a_j são nulos, segue-se que o funcional linear $\underline{T}$ não é identicamente nulo.

Logo, do Corolário (12.5.1), segue que o funcional linear $\underline{T}$ será sobrejetor, em particular,

$$\dim[T(\mathbb{R}^n)] = \dim(\mathbb{R}) = 1 \,.$$

Deste modo, do Teorema (12.5.1), segue que

$$n = \dim(\mathbb{R}^n) \overset{(12.154)}{=} \dim[\underbrace{\mathcal{N}(T)}_{\overset{(12.181)}{=} H}] + \underbrace{\dim[T(\mathbb{R}^n)]}_{=1} = \dim(H) + 1,$$

ou seja,

$$\dim(H) = n - 1 \,,$$

como afirmamos.

□

Temos também o:

Exercício 12.5.4 *Sejam* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_2(\mathbb{R})$*),*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12.182}$$

e $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ *dada por*

$$T(X) \doteq AX - XA \,, \quad \textit{para cada} \quad X \in M_2(\mathbb{R}) \,. \tag{12.183}$$

Mostre que $\underline{T}$ é um operador linear em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Além disso, encontre o núcleo e a imagem do operador linear $\underline{T}$ e suas respectivas dimensões.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que T é um operador linear em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Núcleo de $\underline{T}$:

Observemos que

$$X \in \mathcal{N}(T) \quad \text{se, e somente se,} \quad T(X) = O\,,$$

ou, de (12.183), equivalentemente,

$$AX - XA = O\,, \quad \text{isto é,} \quad AX = XA\,. \tag{12.184}$$

Se

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

de (12.184) e (12.182), sabemos que $X \in \mathcal{N}(T)$ se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a + b \\ c & 2c + d \end{pmatrix}$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} a + 2c = a \\ b + 2d = 2a + b \\ c = c \\ d = 2c + d \end{cases} \overset{\text{(Exercício)}}{,\text{ou seja,}} \quad c = 0 \text{ e } a = d. \tag{12.185}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{N}(T) \quad \text{se, e somente se,} \quad X &\overset{(12.185)}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\doteq A_1} + b \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\doteq A_2} \\ &= a \cdot A_1 + b \cdot A_2\,. \end{aligned} \tag{12.186}$$

Dessa forma, o núcleo do operador linear $\underline{T}$ é o subespaço vetorial gerado pelos vetores A_1 e A_2, ou seja,

$$\mathcal{N}(T) = [A_1, A_2]\,. \tag{12.187}$$

Notemos que os vetores

$$A_1, A_2$$

são L.I. em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Deixaremos a verificação deste fato como exerício para o leitor.

Logo o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{A_1, A_2\}$$

gera $\mathcal{N}(T)$ e é L.I. em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, ou seja, é uma base (ordenada) para o subespaço $\mathcal{N}(T)$.

Em particular,

$$\dim[\mathcal{N}(T)] = 2\,.$$

<u>Imagem de $\underline{T}$:</u>

Observemos que

$$Y \doteq \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in T(M_2) \tag{12.188}$$

se, e somente, se existir uma matriz em $X \in M_2(\mathbb{R})$, que denotaremos por

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{12.189}$$

tal que

$$Y = T(X) \overset{(12.183)}{=} AX - XA\,, \tag{12.190}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} &\overset{(12.189) \text{ e } (12.190)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2a + b \\ c & 2c + d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2c & 2d - 2a \\ 0 & -2c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2c & 0 \\ 0 & -2c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2(d-a) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2c \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\doteq B_1} + 2(d-a) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\doteq B_2} \\
&= 2c \cdot B_1 + 2(d-a) \cdot B_2\,,
\end{aligned}$$

ou seja, a imagem do operador linear $\underline{T}$ é gerada pelos vetores B_1, B_2, isto é,

$$[B_1, B_2] = T(U)\,.$$

Notemos que o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} \doteq \{B_1, B_2\}$$

é L.I. em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo o conjunto de vetores $\mathcal{C} \doteq \{B_1, B_2\}$ será uma base (ordenada) para o subespaço $T[M_2(\mathbb{R})]$ de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Em particular,

$$\dim[T(M_2(\mathbb{R}))] = 2\,.$$

□

Observação 12.5.6 *Uma outra maneira para encontrar uma base (ordenada) da imagem do operador linear $\underline{T}$ do Exemplo acima, seria fazer uso da* **demonstração** *do Teorema (12.5.1).*

Mais precisamente, de (12.186) e (12.187), sabemos que o conjunto de vetores

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ e \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base (ordenada) do núcleo do operador linear $\underline{T}$.

Logo, do Teorema (12.5.1), podemos completá-la a uma base (ordenada) de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ introduzindo, por exemplo, os vetores:

$$A_3 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad a_4 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

isto é, o conjunto de vetores

$$\mathcal{A} \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ e \ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base (ordenada) de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

Mas

$$T(A_3) = T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{\doteq C_1} \quad e \quad T(A_4) = T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\doteq C_2}.$$

Logo, do mesmo Teorema, segue que o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} \doteq \{C_1, C_2\}$$

é uma base (ordenada) da imagem do operador linear $\underline{T}$.

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

Introduziremos agora a:

Definição 12.5.3 *Seja* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (ou complexo).*
Diremos que $T \in \mathcal{L}(U)$ *é um* **idempotente em** $(U, +, \cdot)$ *se*

$$T^2 = T. \tag{12.191}$$

A seguir exibiremos alguns exemplos de operadores lineares idempotentes.

Exemplo 12.5.1 *Seja* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (ou complexo).*
Então o operador identidade em $(U, +, \cdot)$*, isto é,* $I_U : U \to U$ *dado por*

$$I_U(u) \doteq u, \quad \text{para cada} \quad u \in U, \tag{12.192}$$

é um operador linear idempotente em $(U, +, \cdot)$*.*

Resolução:
Sabemos que o I_U é um operador linear em $(U, +, \cdot)$.
Além disso, temos

$$I_U{}^2(u) = I_U[\underbrace{I_U(u)}_{\overset{(12.192)}{=} u}] = I_U(u), \quad \text{para cada} \quad u \in U,$$

mostrando que o operador linear $\underline{I}$ é idempotente em $(U, +, \cdot)$.

□

Exemplo 12.5.2 *Sejam* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde + e · são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*) e* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x, y) \doteq (x, 0), \quad \text{para cada} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{12.193}$$

Então o operador linear $\underline{T}$ *é idempotente em* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$*.*

Resolução:
Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $\underline{T}$ é um operador linear em $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.
Notemos que, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, teremos

$$T^2(x, y) = T[\underbrace{T(x, y)}_{\overset{(12.193)}{=}(x, 0)}] = T(x, 0)$$
$$\overset{(12.193)}{=} (x, 0) \overset{(12.193)}{=} T(x, y),$$

mostrando que o operador linear $\underline{T}$ é idempotente em $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

□

Observação 12.5.7 *O operador linear do Exemplo acima é conhecido, no curso de Geometria Analítica, como sendo a projeção do vetor* $\vec{v} \doteq (x, y)$ *sobre o eixo* Ox*.*

Temos agora a:

Proposição 12.5.4 *Seja* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (ou complexo) e* $T \in \mathcal{L}(U)$.
Se o operador linear $\underline{T}$ *é idempotente então*

$$U = T(U) \oplus \mathcal{N}(T). \tag{12.194}$$

Demonstração:

Por hipótese temos que

$$T \in \mathcal{L}(U) \quad \text{e} \quad T^2 = T. \tag{12.195}$$

Observemos que, para cada $u \in U$, podemos escrever

$$u = T(u) + [u - T(u)]. \tag{12.196}$$

Notemos que,

$$T(u) \in T(U).$$

Por outro lado, temos que

$$T[u - T(u)] \overset{T \text{ é transf. linear}}{=} T(u) - \underbrace{T^2(u)}_{\overset{(12.195)}{=} T(u)} = T(u) - T(u) = O,$$

ou seja,

$$(u - T(u)) \in \mathcal{N}(T). \tag{12.197}$$

Portanto teremos:

$$u \overset{(12.196)}{=} \underbrace{T(u)}_{\in T(U)} + \underbrace{[u - T(u)]}_{\overset{(12.197)}{\in} \mathcal{N}(T)} \in T(U) + \mathcal{N}(T),$$

mostrando que

$$U = T(U) + \mathcal{N}(T). \tag{12.198}$$

Resta mostrarmos que a soma (12.198), é uma soma direta, ou seja, que

$$T(U) \cap \mathcal{N}(T) = \{O\}. \tag{12.199}$$

Para isto consideremos

$$u \in T(U) \cap \mathcal{N}(T).$$

Como $u \in T(U)$, podemos encontrar $v \in U$, de modo que

$$u = T(v). \tag{12.200}$$

Por outro lado, como $u \in \mathcal{N}(T)$ segue que

$$T(u) = O. \tag{12.201}$$

Assim, teremos

$$u \overset{(12.200)}{=} T(v) \overset{T^2=T}{=} T^2(v) = T[\underbrace{T(v)}_{\overset{(12.200)}{=} u}] = T(u) \overset{(12.201)}{=} O\,,$$

ou seja,

$$T(U) \cap \mathcal{N}(T) = \{O\}. \tag{12.202}$$

Portanto, de (12.198) e (12.202), segue que

$$U = T(U) \oplus \mathcal{N}(T)\,,$$

completando a demonstração do resultado.

□

12.6 Isomorfismo e Automorfismo

Começaremos introduzindo a

Definição 12.6.1 *Sejam $(U,+,\cdot)$ e $(V,+,\cdot)$ espaços vetoriais reais (ou complexos).*

Diremos que uma transformação linear $T : U \to V$ é **isomorfismo de $(U,+,\cdot)$ em $(V,+,\cdot)$** *se ela for bijetora.*

Quando

$$U = V\,,$$

diremos, no caso acima, que o operador linear T é um **automorfismo em $(U,+,\cdot)$**.

Com isto temos a

Definição 12.6.2 *Dizemos que os espaços vetoriais reais (ou complexos) $(U,+,\cdot)$ e $(V,+,\cdot)$ são* **isomorfos** *se existir um isomorfismo de $(U,+,\cdot)$ em $(V,+,\cdot)$.*

Os exemplos nos fornecerão isomorfismos e, portanto, os respectivos espaços vetoriais reais (ou complexos) serão isomorfos.

Exemplo 12.6.1 *Sejam $(U,+,\cdot)$ espaço vetorial real (ou complexo) e $I_U : U \to U$ o operador identidade em $(U,+,\cdot)$.*

Então I_U é um automorfismo em $(U,+,\cdot)$.

Resolução:

Sabemos que I_U é um operador linear em $(U,+,\cdot)$ que é injetor e sobrejetor.

Logo o operador linear I_U é um automorfismo em $(U,+,\cdot)$.

□

Exemplo 12.6.2 *Sejam* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *e* $(\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaços vetoriais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^n$ *e de* $\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$*, respectivamente) e* $T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ *dada por*

$$T(x_1, \cdots, x_n) \doteq p\,, \quad \textit{para cada} \quad (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n\,, \tag{12.203}$$

onde $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dado por*

$$p(t) \doteq x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1}\,, \quad \textit{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{12.204}$$

Então $\underline{T}$ *é um isomorfismo de* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *em* $(\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $\underline{T}$ é uma transformação linear de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ em $(\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Observemos que a transformação linear $\underline{T}$ é injetora.

De fato, pois se

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{N}(T)\,,$$

segue, de (12.204), que

$$\underbrace{O}_{\text{polinômio nulo}} = T(x) \quad \text{se, e somente se,} \quad x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1} = 0\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R},$$

o que implicará, necessariamente, que

$$x_1 = \cdots = x_n = 0\,,$$

ou seja,

$$x = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n\,.$$

Portanto

$$\mathcal{N}(T) = \{O\}$$

que, pela Proposição (12.5.3), implicará que a transformação linear $\underline{T}$ será injetora.

Observemos também que a transformação linear $\underline{T}$ é sobrejetora.

De fato, pois se $p \in \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, segue que existem

$$a_o, a_, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$$

de modo que

$$p(t) = a_o + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1}\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{12.205}$$

Logo se considerarmos

$$x \doteq (a_o, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,$$

teremos

$$T(x) \overset{(12.203)\text{ e }(12.205)}{=} p\,,$$

ou seja, a transformação linear $\underline{T}$ é sobrejetora.

Portanto, a transformação linear $\underline{T}$ é bijetora, ou seja, um isomorfismo de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ em $(\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$, como afirmamos.

□

Exemplo 12.6.3 *Sejam* $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *e* $(\mathbb{R}^{mn}, +, \cdot)$ *espaços vetoriais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *e de* $\mathbb{R}^{mn}$*, respectivamente) e a aplicação* $T : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{mn}$ *dada por*

$$T[(a_{ij})] \doteq (a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{m1}, \cdots, a_{mn}), \tag{12.206}$$

para

$$A \doteq (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Então $\underline{T}$ *é um isomorfismo de* $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *em* $(\mathbb{R}^{mn}, +, \cdot)$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que T é uma transformação linear de $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ em $(\mathbb{R}^{mn}, +, \cdot)$.

Observemos que a transformação linear $\underline{T}$ é injetora.

De fato, pois se

$$(a_{ij}) \in \mathcal{N}(T) \tag{12.207}$$

segue que

$$\underbrace{O}_{mn\text{-upla nula}} \overset{(12.207)}{=} T[(a_{ij})] \quad \text{se, e somente se,} \quad (a_{11}, \cdots, a_{1n}, \cdots, a_{m1}, \cdots, a_{mn}) = \underbrace{(0, \cdots, 0)}_{\in\mathbb{R}^{mn}},$$

o que implicará, necessariamente, que

$$a_{ij} = 0, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, m\} \ \text{ e } \ j \in \{1, \cdots, n\}$$

ou seja,

$$\mathcal{N}(T) = \{O\},$$

que, pela Proposição (12.5.3), implicará que a transformação linear $\underline{T}$ será injetora.

Observemos também que a transformação linear $\underline{T}$ é sobrejetora.

De fato, pois se

$$x \doteq (x_1, \cdots, x_{mn}) \in \mathbb{R}^{mn}$$

considerando-se

$$\begin{aligned} a_{1j} &\doteq x_j, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, \cdots, n\}, \\ a_{2j} &\doteq x_j, \quad \text{para cada} \quad j \in \{n+1, \cdots, 2n\}, \\ &\cdots \\ a_{mj} &\doteq x_j, \quad \text{para cada} \quad j \in \{mn-n+1, \cdots, mn\}, \end{aligned} \tag{12.208}$$

teremos

$$T[(a_{ij})] \overset{(12.206)\text{ e }(12.208)}{=} (x_1, \cdots, x_{mn}) = x,$$

ou seja, a transformação linear $\underline{T}$ é sobrejetora.

Logo, a transformação linear $\underline{T}$ é bijetora, ou seja, um isomorfismo de $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ em $(\mathbb{R}^{mn}, +, \cdot)$, como afirmamos.

□

Exercício 12.6.1 *Sejam* $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*) e a aplicação* $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$T(x\,,y\,,z) \doteq (x-y\,,x-z\,,z-y)\,, \quad \textit{para cada} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,. \tag{12.209}$$

Verifique se $\underline{T}$ *é um automorfismo de* $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $\underline{T}$ é um operador linear em $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$.

Como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 < \infty$ e T é um operador linear em $\mathbb{R}^3$, pela proposição (12.5.4), para mostrar que ela é bijetora basta verificarmos se ela é injetora, ou seja, verificar se $\mathcal{N}(T) = \{O\}$.

Verifiquemos se o operador linear $\underline{T}$ é injetor, que, pela Proposição (12.5.3), é equivalente a mostrar que

$$\mathcal{N}(T) = \{O\}$$

Para isto seja $(x\,,y\,,z) \in \mathcal{N}(T)$, isto é,

$$T(x\,,y\,,z) = (0,0,0)$$

que, por (12.209) é equivalente a:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x-z=0 \\ z-y=0 \end{cases} \quad \overset{\text{(Exercício)}}{\text{ou seja,}} \quad x=y=z\,.$$

Logo, o operador linear T **não** é injetor, pois, por exemplo,

$$T(1,1,1) = (0,0,0)\,,$$

assim, o operador linear $\underline{T}$ **não** será um automorfismo em $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$.

□

Temos a:

Proposição 12.6.1 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos), tal que*

$$\dim(U) = n < \infty\,, \tag{12.210}$$

e $T:U \to V$ *é um isomorfismo de* $(U\,,+\,,\cdot)$ *em* $(V\,,+\,,\cdot)$*.*

Então o espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$ *tem dimensão finita e além disso*

$$\dim(V) = \dim(U) = n\,. \tag{12.211}$$

Demonstração:

Como, por hipótese, a transformação linear $\underline{T}$ é injetora segue, da Proposição (12.5.3), que

$$\mathcal{N}(T) = \{O\}\,. \tag{12.212}$$

Assim teremos:

$$\dim[\mathcal{N}(T)] = 0\,. \tag{12.213}$$

Como, por hipótese, a transformação linear $\underline{T}$ é sobrejetora segue que

$$T(U) = V\,. \tag{12.214}$$

De (12.210), e do Teorema do Núcleo e da Imagem (isto é, do Teorema (12.5.1)), segue que

$$\dim(U) = \underbrace{\dim[\mathcal{N}(T)]}_{\overset{(12.213)}{=}0} + \dim[\,\underbrace{T(U)}_{\overset{(12.214)}{=}V}\,] = \dim(V),$$

como queríamos demonstrar, completando a demonstração do resultado.

□

Temos um resultado semelhante quando a dimensão do contra-domínio da transformação linear é finita, a saber:

Corolário 12.6.1 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos), tal que*

$$\dim(V) = n < \infty \tag{12.215}$$

e $T : U \to V$ *é um isomorfismo de* $(U\,,+\,,\cdot)$ *em* $(V\,,+\,,\cdot)$*.*

Então

$$\dim(U) = \dim(V)\,. \tag{12.216}$$

Demonstração:

Como, por hipótese, a transformação linear $\underline{T}$ é bijetora, segue que existe a transformação linear inversa $T^{-1} : V \to U$ e, pela Proposição (12.4.8), esta também será uma transformação linear bijetora de $(V+,\cdot)$ em $(U\,,+\,,\cdot)$, ou seja, um isomorfismo de $(V+,\cdot)$ em $(U\,,+\,,\cdot)$.

Por outro lado, como

$$\dim(V) < \infty\,,$$

pela Proposição (12.6.1) acima, segue que

$$\dim(U) = \dim(V)\,,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Temos também a

Proposição 12.6.2 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) de dimensão finita* $\underline{n}$*.*

Se

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1, \cdots, v_n\}$$

são bases de $(U\,,+\,,\cdot)$ *e de* $(V,+,\cdot)$*, respectivamente, então* $T : U \to V$ *dada por*

$$T(u) \doteq x_1 \cdot v_1 + \cdots + x_n \cdot v_n\,, \quad \textit{para cada} \quad u \in U\,, \qquad (*) \tag{12.217}$$

onde

$$u = x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_n \cdot u_n\,, \quad \textit{para} \quad x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \ \textit{(ou } \mathbb{C}\textit{)}, \tag{12.218}$$

isto é,

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i\right) \doteq \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i\,, \tag{12.219}$$

é um isomorfismo de $(U, +, \cdot)$ *em* $(V, +, \cdot)$.

Além disso, temos que

$$T(u_j) = v_j\,, \quad \textit{para cada} \quad j \in \{1, \cdots, n\}, \tag{12.220}$$

isto é, o isomorfismo $T : U \to V$*, leva a base (ordenada)* $\mathcal{B}$*, do espaço vetorial* $(U, +, \cdot)$*, na base (ordenada)* $\mathcal{C}$*, do espaço vetorial* $(V, +, \cdot)$.

Demonstração:

Primeiramente, notemos que a função $\underline{T}$ está bem definida, pois as coordenadas de um vetor, em relação a uma base (ordenada) fixada, são unicamente determinadas por ele e pela respectiva base (ordenada) fixada.

Verifiquemos que $\underline{T}$ é uma transformação linear de $(U, +, \cdot)$ em $(V, +, \cdot)$.

Para isto, notemos que se

$$w_1, w_2 \in U\,,$$

como o conjunto de vetores $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) de $(U, +, \cdot)$, podemos encontrar (únicos)

$$x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}),$$

de modo que

$$w_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i \quad \text{e} \quad w_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot u_i\,. \tag{12.221}$$

Além disso, notemos que, se $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), teremos

$$\begin{aligned} w_1 + \lambda \cdot w_2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot u_i\right) \\ &\overset{\text{Propriedades de esp. vetorial}}{=} \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i) \cdot u_i\,. \end{aligned} \tag{12.222}$$

Logo

$$\begin{aligned}
T(w_1 + \lambda \cdot w_2) &\overset{(12.222)}{=} T\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i) \cdot u_i\right) \\
&\overset{(12.219)}{=} \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i) \cdot v_i \\
&\overset{\text{Propriedades de esp. vetorial}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i + \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i\right) \\
&\overset{(12.219)}{=} T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i\right) + \lambda \cdot T\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot u_i\right) \\
&\overset{(12.221)}{=} T(w_1) + \lambda \cdot T(w_2)\,,
\end{aligned}$$

mostrando que a aplicação $\underline{T}$ é uma transformação linear de $(U\,,+\,,\cdot)$ em $(V\,,+\,,\cdot)$.

Afirmamos que a transformação linear $\underline{T}$ é injetora.

Pela Proposição (12.5.3), basta mostra que

$$\mathcal{N}(T) = \{0\}\,. \tag{12.223}$$

Para isto, notemos que se

$$w \doteq \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i \in \mathcal{N}(T)\,, \tag{12.224}$$

deveremos ter

$$O = T(w) \overset{(12.224)}{=} T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i\right) \overset{(12.219)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i\,.$$

Como o conjunto

$$\mathcal{C} = \{v_1, \cdots, v_n\}$$

é L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$ (pois é uma base (ordenada) de $(V\,,+\,,\cdot)$), segue que

$$x_1 = \cdots = x_n = 0\,,$$

ou seja,

$$w \overset{(12.224)}{=} O\,,$$

mostrando (12.223), e assim, a transformação linear $\underline{T}$ será injetora.

Como, por hipótese,

$$\dim(U) = \dim(V) = n < \infty\,,$$

do Corolário (12.5.4), segue-se que a transformação linear $\underline{T}$ será bijetora.

Logo, a transformação linear $\underline{T}$ é um isomorfismo de $(U\,,+\,,\cdot)$ em $(V\,,+\,,\cdot)$.

Finalmente, notemos que, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, teremos

$$\begin{aligned}
T(u_i) &= T\left(0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{i-1} + 1 \cdot u_i + 0 \cdot u_{i+1} + \cdots + 0 \cdot u_n\right) \\
&\overset{(12.219)}{=} \underbrace{0 \cdot v_1}_{=O} + \cdots + \underbrace{0 \cdot v_{i-1}}_{=O} + \underbrace{1 \cdot v_i}_{=v_i} + \underbrace{0 \cdot v_{i+1}}_{=O} + \cdots + \underbrace{0 \cdot v_n}_{=O} = v_i\,,
\end{aligned}$$

mostrando (12.220) e completando a demonstração do resultado.

□

O Corolário (12.6.1) e a Proposição (12.6.2) resultam no:

Corolário 12.6.2 *Dois espaços vetoriais reais (ou complexos) de dimensão finita são isomorfos se, e somente se, têm a mesma dimensão.*

Demonstração:

De ($\Rightarrow$):

Segue do Corolário (12.6.1).

De ($\Leftarrow$):

Segue da Proposição (12.6.2), completando a demonstração do resultado.

□

Combinando o corolário acima com a proposição (12.6.1) vemos que dois espaços de dimensão finita são isomorfos se, e somente se, eles possuem a mesma dimensão. Terminaremos a seção com o:

Corolário 12.6.3 *Sejam* $(U,+,\cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita e igual a* $\underline{n}$ *e* $(V,+,\cdot)$ *um espaço vetorial de dimensão real (ou complexo) de dimensão finita e igual a* $\underline{m}$*, isto é,.*

$$\dim(U)=n \quad e \quad \dim(V)=m\,. \tag{12.225}$$

Então o espaço vetorial real (ou complexo) $(\mathcal{L}(U,V),+,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathcal{L}(U,V)$*) é isomorfo ao espaço vetorial real (ou complexo)* $(M_{m\times n}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ *(ou* $(M_{m\times n}(\mathbb{C}),+,\cdot)$*) (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *(ou* $(M_{m\times n}(\mathbb{C}),+,\cdot)$*)).*

Demonstração:

Notemos que, do Teorema (12.4.1), temos que

$$\dim[\mathcal{L}(U,V)]=m\,n\,.$$

Por outro lado, do Exemplo (9.3.4), temos que

$$\dim[M_{m\times n}(\mathbb{R})]=m\,n\,.$$

Logo, do Corolário (12.6.2) acima, segue que os espaços vetoriais reais $(\mathcal{L}(U,V),+,\cdot)$ e $(M_{m\times n}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ são isomorfos, completando a demonstração do resultado.

Deixaremos os detalhes da demonstração do caso complexo como exercício para o leitor.

□

12.7 Matriz de uma Transformação Linear

Nesta seção veremos que a toda transformação linear entre dois espaços vetoriais reais (ou complexos) de dimensões finitas, poderemos associar uma matriz rela (ou complexa) e reciprocamente.

12.7.1 Definição e Exemplos

Definição 12.7.1 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) de dimensões finitas,* $\underline{m}$ *e* $\underline{n}$*, respectivamente, e* $T \in \mathcal{L}(U, V)$*.*

Fixemos as bases

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\} \quad e \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1, \cdots, v_m\}$$

de $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$*, respectivamente.*

Como o conjunto de vetores $\mathcal{C}$ *é uma base (ordenada) de* $(V, +, \cdot)$*, para cada* $j \in \{1, \cdots, m\}$*, podemos encontrar*

$$a_{1j}, \cdots, a_{mj} \in \mathbb{R} \ (ou\ \mathbb{C}),$$

de modo que

$$T(u_j) = a_{1j} \cdot v_1 + \cdots + a_{mj} \cdot v_m. \tag{12.226}$$

Deste modo, podemos construir a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

que será chamada de **matriz da transformação** $\underline{T}$ **com relação às bases** $\mathcal{B}$ **e** $\mathcal{C}$ *e será denotada por*

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}},$$

ou seja,

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{12.227}$$

Se

$$U = V \quad e \quad \mathcal{B} = \mathcal{C}, \tag{12.228}$$

usaremos a notação $[T]_{\mathcal{B}}$*, para denotar a matriz da transformação* $\underline{T}$*, em relação às bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}$ *do espaço vetorial real (ou complexo)* $(U, +, \cdot)$*, isto é, par cada* $i \in \{1, \cdots, n\}$*, podemos encontrar*

$$a_{1j}, \cdots, a_{mj} \in \mathbb{R} \ (ou\ \mathbb{C}),$$

de modo que

$$T(u_j) = a_{1j} \cdot u_1 + \cdots + a_{nj} \cdot u_n, \tag{12.229}$$

e assim

$$[T]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}). \tag{12.230}$$

Consideremos os exemplos:

Exercício 12.7.1 *Sejam* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$*, respectivamente) e a aplicação* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x, y, z) \doteq (x + y, x - z), \quad \textit{para cada} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \qquad (*) \tag{12.231}$$

Mostre que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ *e encontre a matriz da transformação linear* $\underline{T}$ *com relação às bases canônicas de* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *e* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$*, respectivamente.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $\underline{T}$ é uma transformação linear de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ em $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

As bases canônicas de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ e $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ são

$$\mathcal{B} \doteq \{\underbrace{(1,0,0)}_{\doteq u_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{\doteq u_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{\doteq u_3}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{\underbrace{(1,0)}_{\doteq v_1}, \underbrace{(0,1)}_{\doteq v_2}\}, \tag{12.232}$$

respectivamente.

Mas (veja (12.226)):

$$\begin{aligned}
T(u_1) &\overset{(12.232)}{=} T(1,0,0) \overset{(12.231)}{=} (1+0, 1-0) = (1,1) \\
&= 1 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1) \overset{(12.232)}{=} \underbrace{1}_{\doteq a_{11}} \cdot v_1 + \underbrace{1}_{\doteq a_{21}} \cdot v_2, \\
T(u_2) &\overset{(12.232)}{=} T(0,1,0) \overset{(12.231)}{=} (0+1, 0-0) = (1,0) \\
&= 1 \cdot (1,0) + 0 \cdot (0,1) \overset{(12.232)}{=} \underbrace{1}_{\doteq a_{12}} \cdot v_1 + \underbrace{0}_{\doteq a_{22}} \cdot v_2, \\
T(u_3) &\overset{(12.232)}{=} T(0,0,1) \overset{(12.231)}{=} (0+0, 0-1) = (0,-1) \\
&= 0 \cdot (1,0) + (-1) \cdot (0,1) \overset{(12.232)}{=} \underbrace{0}_{\doteq a_{13}} \cdot v_1 + \underbrace{(-1)}_{\doteq a_{23}} \cdot v_2.
\end{aligned} \tag{12.233}$$

Logo:

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \overset{(12.227)}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \overset{(12.233)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}). \tag{12.234}$$

□

Exercício 12.7.2 *Sejam* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$*, respectivamente) e a aplicação* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x, y, z) \doteq (x + y, x - z), \quad \textit{para cada} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \qquad (*) \tag{12.235}$$

Mostre que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ *e encontre a matriz da transformação linear* $\underline{T}$ *em relação às bases*

$$\mathcal{B} \doteq \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \quad e \quad \mathcal{D} \doteq \{(1,1), (0,1)\}$$

de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$*, respectivamente.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $\underline{T}$ é uma transformação linear de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ em $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

As bases de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ são

$$\mathcal{B} \doteq \{\underbrace{(1,0,0)}_{\doteq u_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{\doteq u_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{\doteq u_3}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} \doteq \{\underbrace{(1,1)}_{\doteq v_1}, \underbrace{(0,1)}_{\doteq v_2}\}, \tag{12.236}$$

respectivamente.

Mas (veja (12.226)):

$$\begin{aligned}
T(u_1) &\overset{(12.236)}{=} T(1,0,0) \overset{(12.235)}{=} (1+0, 1-0) = (1,1) \\
&= 1 \cdot (1,1) + 0 \cdot (0,1) \overset{(12.236)}{=} \underbrace{1}_{\doteq a_{11}} \cdot v_1 + \underbrace{0}_{\doteq a_{21}} \cdot v_2 \,, \\
T(u_2) &\overset{(12.236)}{=} T(0,1,0) \overset{(12.235)}{=} (0+1, 0-0) = (1,0) \\
&= 1 \cdot (1,1) + (-1) \cdot (0,1) \overset{(12.236)}{=} \underbrace{1}_{\doteq a_{11}} \cdot v_1 + \underbrace{(-1)}_{\doteq a_{21}} \cdot v_2 \,, \\
T(u_3) &\overset{(12.236)}{=} T(0,0,1) \overset{(12.235)}{=} (0+0, 0-1)(0,-1) \\
&= 0 \cdot (1,1) + (-1) \cdot (0,1) \overset{(12.236)}{=} \underbrace{0}_{\doteq a_{11}} \cdot v_1 + \underbrace{(-1)}_{\doteq a_{21}} \cdot v_2 \,.
\end{aligned} \tag{12.237}$$

Logo

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{D}} \overset{(12.227)}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \overset{(12.237)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \,. \tag{12.238}$$

□

Observação 12.7.1 *Nos dois Exemplos acima a transformação linear $\underline{T}$ é a mesma, mas como as bases consideradas são diferentes (na verdade trocamos a base (ordenada) $\mathcal{C}$ de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ pela base (ordenada) $\mathcal{D}$), as matrizes associadas à tarsnformação linear $\underline{T}$ também será diferentes, a saber*

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \overset{(12.234)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{(12.238)}{=} [T]_{\mathcal{B},\mathcal{D}} \,.$$

Observação 12.7.2 *Sejam $(U, +, \cdot)$ e $(V, +, \cdot)$ espaços vetoriais reais (ou complexos) de dimensões finitas, com bases*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\} \quad e \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1, \cdots, v_m\}, \tag{12.239}$$

respectivamente.

Para cada

$$i \in \{1, \cdots, n\} \quad e \quad j \in \{1, \cdots, m\}$$

e definamos

$$T_{ij} \in \mathcal{L}(U, V)$$

como na prova do Teorema (12.4.1), isto é, $T_{ij} : U \to V$ *dada da seguinte maneira: se* $u \in U$*, como o conjunto de vetores* $\mathcal{B}$ *é uma base (ordenada) de* $(U, +, \cdot)$*, podemos encontrar (únicos)*

$$x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{)},$$

de modo que

$$u = x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_n \cdot u_n. \tag{12.240}$$

Assim, definiremos

$$T_{ij}(u) \doteq x_i \cdot v_j, \tag{12.241}$$

ou seja,

$$T_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot u_k\right) \doteq x_i \cdot v_j. \tag{12.242}$$

Notemos que, para cada

$$i \in \{1, \cdots, n\} \quad e \quad j \in \{1, \cdots, m\}$$

teremos:

$$\begin{aligned} T_{ij}(u_k) &= \begin{cases} v_j, & \textit{para} \quad k = i \\ O, & \textit{para} \quad k \neq i \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{j-1} + 1 \cdot v_j + 0 \cdot v_{j+1} + \cdots + 0 \cdot v_n, & \textit{para} \quad k = i \\ O, \quad \textit{para} \quad k \neq i \end{cases} . \end{aligned} \tag{12.243}$$

De fato, pois, se

$$k = i,$$

teremos:

$$\begin{aligned} T_{ij}(u_k) &= T_{ij}\left(0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{k-1} + \underbrace{1}_{= x_k \overset{k=i}{=} x_i \quad (*)} \cdot u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n\right) \\ &\overset{(12.242)}{=} x_i \cdot v_j \overset{(*)}{=} 1 \cdot v_j = v_j. \end{aligned}$$

Consideremos agora

$$k \neq i.$$

Suponhamos que

$$1 \leq i < k.$$

O caso

$$k < i \leq n$$

é semelhante, e será deixada como exercício para o leitor.

Assim teremos

$$T_{ij}(u_k) = T - ij\left(0\cdot u_1+\cdots+{}_{=x_i\cdot u_i+\cdots+0\cdot u_{k-1}+\underbrace{\overbrace{1}^{0}}_{=x_k}\cdot u_k+0\cdot u_{k+1}+\cdots+0\cdot u_n}\right)$$
$$\overset{(12.242)}{=} x_i\cdot v_j \overset{(**)}{=} 0\cdot v_j = O\,,$$

mostrando (12.243).

Logo, de (12.243)*, segue que*

$$[T_{ij}]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \left(\delta_{k,l}^{(j,i)}\right)\,, \tag{12.244}$$

onde

$$\delta_{k,l}^{(j,i)} \doteq \begin{cases} 1\,, & \textit{para} \quad (j\,,i) = (k\,,l) \\ 0\,, & \textit{caso contrário} \end{cases}\,, \tag{12.245}$$

ou seja, para cada

$$i \in \{1,\cdots,n\} \quad e \quad j \in \{1,\cdots,m\},$$

a matriz

$$E_{ji} \doteq \left(\delta_{k,l}^{(j,i)}\right)\,, \tag{12.246}$$

que possui todas as entradas iguais a $\underline{0}$*, com exceção daquela ocupada pela posição da* j*-ésima linha e* i*-ésima coluna, cujo valor será igual a* $\underline{1}$*.*

12.7.2 Propriedades da Matriz de uma Transformação Linear

Proposição 12.7.1 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V,+,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) de dimensão finita igual a* $\underline{n}$*, e*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1,\cdots,u_n\} \quad e \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1,\cdots,v_m\}\,, \tag{12.247}$$

bases de $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V,+,\cdot)$*, respectivamente, e* $T\,,S \in \mathcal{L}(U,V)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*).*

Então

$$[T+\lambda\cdot S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} + \lambda\,[S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,. \tag{12.248}$$

Demonstração:

Suponhamos que

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (a_{ij}) \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (b_{ij})\,, \tag{12.249}$$

isto é, para cada $j \in \{1,\cdots,n\}$, de (12.226) e (12.227), segue que

$$T(u_j) = a_{1j}\cdot v_1+\cdots+a_{mj}\cdot v_m\,. \tag{12.250}$$
$$S(u_j) = b_{1j}\cdot v_1+\cdots+b_{mj}\cdot v_m\,. \tag{12.251}$$

Logo, para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, teremos

$$\begin{aligned}(T + \lambda \cdot S)(u_j) &= T(u_j) + \lambda \cdot S(u_j) \\ &\overset{(12.250) \text{ e } (12.251)}{=} (a_{1j} \cdot v_1 + \cdots + a_{mj} \cdot v_m) + \lambda \cdot (b_{1j} \cdot v_1 + \cdots + b_{mj} \cdot v_m) \\ &\overset{\text{Propriedades de esp. vetorial}}{=} (a_{1j} + \lambda b_{1j}) \cdot v_1 + \cdots + (a_{mj} + \lambda b_{mj}) \cdot v_m\,.\end{aligned}$$

Logo, de (12.226) e (12.227) (aplicado a transformaçaõ linear $T + \lambda \cdot S$), segue que

$$\begin{aligned}[T + \lambda \cdot S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} &= \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda b_{11} & \cdots & a_{1n} + \lambda b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + \lambda b_{m1} & \cdots & a_{mn} + \lambda b_{mn} \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{Propriedades das operações de matrizes}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+ & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &\overset{(12.249)}{=} [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} + \lambda\, [S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,,\end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

□

A seguir, temos dois resultados que nos fornecem exemplos básicos associados a matrizes de uma transformção linear:

Proposição 12.7.2 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) de dimensão finita, com bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$, *respectivamente, e* $T \in \mathcal{L}(U, V)$ *a transformação linear nula, isto é,*

$$T(u) \doteq O\,, \qquad \textit{para cada} \quad u \in U\,.$$

Então

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = O\,. \tag{12.252}$$

Demonstração:

Sejam

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1, \cdots, v_m\}$$

bases de $(U, +, \cdot)$ e $(V, +, \cdot)$, respectivamente.

Como

$$T(u) = O\,, \qquad \text{para cada} \quad u \in U\,,$$

segue que, para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, teremos:

$$T(u_j) = O = \underbrace{0}_{\doteq a_{1j}} \cdot v_1 + \cdots + \underbrace{0}_{\doteq a_{mj}} \cdot v_m\,,$$

ou seja,

$$a_{ij} = 0\,, \qquad \text{para todo} \quad i \in \{1, \cdots, m\} \quad \text{e} \quad j \in \{1, \cdots, n\}\,,$$

ou ainda,

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = O\,,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Proposição 12.7.3 *Sejam* $(U,+,\cdot)$ *espaço vetorial rela (ou complexo) de dimensão finita e* $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *duas bases de* $(U,+,\cdot)$ *e* $I_U \in \mathcal{L}(U)$ *o operador identidade em* $(U,+,\cdot)$*, isto é,*

$$I(u) \doteq u\,, \quad \textit{para cada} \quad u \in U\,.$$

Então

$$[I_U]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\,.$$

Demonstração:

Consideremos

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1, \cdots, v_n\}$$

bases de $(U\,,+\,,\cdot)$ e $(V\,,+\,,\cdot)$, respectivamente.

Para cada

$$j \in \{1, \cdots, n\}\,,$$

como $u_j \in U$ e o conjunto de vetores $\mathcal{B}$ é base (ordenada) de $(U\,,+\,,\cdot)$, segue que existem escalares

$$\alpha_{1j}, \cdots, \alpha_{nj} \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})\,,$$

tais que

$$u_j = \alpha_{1j}\cdot v_1 + \cdots + \alpha_{nj}\cdot v_n\,. \quad (*) \tag{12.253}$$

Logo, da Definição da matriz de mudança de base (ordenada) , da base (ordenada) $\mathcal{C}$ para base (ordenada) $\mathcal{B}$, temos que:

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = (\alpha_{ij})\,. \tag{12.254}$$

Por outro lado, temos

$$I_U(u_j) = u_j \overset{(12.253)}{=} \alpha_{1j}\cdot v_1 + \cdots + \alpha_{nj}\cdot v_n\,,$$

que implicará que a matriz do operador linear, em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, será dada por:

$$[I_U]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (\alpha_{ij})\,, \tag{12.255}$$

ou seja, de (12.254) e (12.255), segue que

$$[I_U]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\,,$$

como queríamos demonstrar, completando a demonstração do resultado.

□

Proposição 12.7.4 *Sejam* $(U,+,\cdot)$, $(V,+,\cdot)$ *e* $(W,+,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) de dimensão finita, de modo que os conjuntos*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\}, \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1, \cdots, v_m\} \quad e \quad \mathcal{D} \doteq \{w_1, \cdots, w_p\} \tag{12.256}$$

são base (ordenada) de $(U,+,\cdot)$, $(V,+,\cdot)$ *e* $(W,+,\cdot)$, *respectivamente.*

Suponhamos que $T \in \mathcal{L}(U,V)$ *e* $S \in \mathcal{L}(V,W)$.

Então

$$[S \circ T]_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = [S]_{\mathcal{C},\mathcal{D}}[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,. \tag{12.257}$$

Demonstração:

Temos a seguinte situação:

Consideremos

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (\alpha_{ij}) \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{C},\mathcal{D}} = (\beta_{kl})\,. \tag{12.258}$$

Para cada

$$j \in \{1, \cdots, n\} \quad \text{e} \quad k \in \{1, \cdots, m\},$$

de (12.258) e (12.256), segue que

$$T(u_j) = \alpha_{1j} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{mj} \cdot v_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot v_i\,, \tag{12.259}$$

$$S(v_k) = \beta_{1k} \cdot w_1 + \cdots + \beta_{pk} \cdot w_p = \sum_{k=1}^{p} \beta_{ki} \cdot w_k\,. \tag{12.260}$$

Logo, para cada

$$j \in \{1, \cdots, n\},$$

teremos:

$$\begin{aligned}
[S \circ T](u_j) = S[T(u_j)] &\overset{(12.259)}{=} S\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot v_i\right) \overset{S \text{ é transf. linear}}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot S(v_i) \\
&\overset{(12.260)}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} \beta_{ki} \cdot w_k\right) \overset{\text{trocar a ordem das somas}}{=} \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\alpha_{ij}\right) \cdot w_k.
\end{aligned}$$

Portanto, da Definição de produto de matrizes (veja Capítulo 2) segue que:

$$[S \circ T]_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\alpha_{ij}\right) \overset{\text{Capítulo 2}}{=} [S]_{\mathcal{C},\mathcal{D}}[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}},$$

completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos a:

Proposição 12.7.5 *Sejam* $(U,+,\cdot)$, $(V,+,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) de dimensão finita, de modo que os conjuntos*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\} \quad e \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1, \cdots, v_m\} \tag{12.261}$$

são base (ordenada) de $(U,+,\cdot)$ *e* $(V,+,\cdot)$*, respectivamente.*

Suponhamos que $T \in \mathcal{L}(U,V)$*, possui transformação inversa* $T^{-1} \in \mathcal{L}(V,U)$ *(isto é,* T *é um isomorfismo de* $(U,+,\cdot)$ *e* $(V,+,\cdot)$*).*

Então

$$\left[T^{-1}\right]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}. \tag{12.262}$$

Demonstração:

Temos a seguinte situação:

Como $\underline{T}$ é uma transformação linear bijetora (isto é, é um isomorfismo de $(U,+,\cdot)$ em $(V,+,\cdot)$) segue, do Corolário(12.6.2),

$$n = \dim(U) = \dim(V) = m,$$

ou seja,

$$m = n.$$

Logo, da Proposição (12.7.4) acima, segue que:

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \left[T^{-1}\right]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \overset{\text{Prop. (12.7.4)}}{=} \left[\underbrace{T \circ T^{-1}}_{=I_V}\right]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = [I_V]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} \overset{\text{Prop. (12.7.3)}}{=} M_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = I_n$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem $\underline{n}$.

Analogamente, teremos:

$$\left[T^{-1}\right]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \left[\underbrace{T^{-1} \circ T}_{=I_U}\right]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = [I_U]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I_n.$$

Portanto,

$$\left[T^{-1}\right]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1},$$

completando a demonstração do resultado.

□

Temos também a:

Proposição 12.7.6 *Seja* $(V,+,\cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita.*

Suponhamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ *e os conjuntos*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\} \quad e \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1, \cdots, v_m\}$$

sejam base (ordenada) de $(V,+,\cdot)$*.*

Então:

$$[T]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}. \tag{12.263}$$

Demonstração:

Notemos que, da Proposição (12.7.3), segue que

$$[I_V]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad [I_V]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} . \tag{12.264}$$

Logo

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\,[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\,M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} &\overset{(12.264)}{=} [I_V]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\,[I_V]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \overset{\text{Prop. } (12.7.4)}{=} [I_V]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[\underbrace{T \circ I_V}_{=T}]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \\ &= [I_V]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \overset{\text{Prop. } (12.7.4)}{=} [\underbrace{I_V \circ T}_{=T}]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} \\ &= [T]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}} , \end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

□

Apliquemos os resultado acima aos seguintes exemplos:

Exercício 12.7.3 *Sejam* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*) e*

$$\mathcal{B} \doteq \{(1,1), (1,-1)\} \tag{12.265}$$

uma base (ordenada) de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Consideremos $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ *tal que*

$$T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} . \tag{12.266}$$

Encontre a matriz $[T]_{\mathcal{C}}$*, onde* $\mathcal{C}$ *é a base (ordenada) canônica de* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que o conjunto $\mathcal{B}$, dado por (12.265), é uma base (ordenada) de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Da Proposição (12.7.6) acima, temos que

$$[T]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\,\underbrace{[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}}_{=[T]_{\mathcal{B}}}\,M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} . \tag{12.267}$$

Logo, para completarmos a resolução do exemplo, basta encontrarmos as matrizes de mudança de bases

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} .$$

Para isto, se

$$\mathcal{B} \doteq \{\underbrace{(1,1)}_{\doteq u_1}, \underbrace{(1,-1)}_{\doteq u_2}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{\underbrace{(1,0)}_{\doteq e_1}, \underbrace{(0,1)}_{\doteq e_2}\}, \tag{12.268}$$

segue que

$$\begin{aligned} e_1 &\overset{(12.268)}{=} (1,0) = \frac{1}{2}\cdot(1,1) + \frac{1}{2}\cdot(1,-1) \\ &\overset{(12.268)}{=} \frac{1}{2}\cdot u_1 + \frac{1}{2}\cdot u_2 \qquad (12.269) \\ e_2 &\overset{(12.268)}{=} (0,1) = \frac{1}{2}\cdot(1,1) - \frac{1}{2}\cdot(1,-1) \\ &\overset{(12.268)}{=}= \frac{1}{2}\cdot u_1 + \frac{-1}{2}\cdot u_2\,, \qquad (12.270) \end{aligned}$$

além disso,

$$\begin{aligned} u_1 &\overset{(12.268)}{=} (1,1) = 1\cdot(1,0) + 1\cdot(0,1) \\ &\overset{(12.268)}{=} 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 \qquad (12.271) \\ u_2 &\overset{(12.268)}{=} (1,-1) = 1\cdot(1,0) + (-1)\cdot(0,1) \\ &\overset{(12.268)}{=} 1\cdot e_1 + (-1)\cdot e_2\,. \qquad (12.272) \end{aligned}$$

Assim, teremos:

$$M_{\mathcal{BC}} \overset{(12.269)\text{ e }(12.270)}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{CB}} \overset{(12.271)\text{ e }(12.272)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (12.273)$$

Logo, substituindo (12.273) em (12.267), obteremos:

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} &= M_{\mathcal{CB}} \underbrace{[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}}_{=[T]_{\mathcal{B}}} M_{\mathcal{BC}} \\ &\overset{(12.273)\text{ e }(12.266)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}. \qquad (12.274) \end{aligned}$$

□

Observação 12.7.3 *Poderíamos ter obtido a matriz de mudança de base (ordenada), da base (ordenada) $\mathcal{B}$ para a base (ordenada) $\mathcal{C}$, encontrando a matriz inversa associada à matriz de mudança de base (ordenada), da base (ordenada) $\mathcal{C}$ para a base (ordenada) $\mathcal{B}$, isto é,*

$$M_{\mathcal{CB}} = M_{\mathcal{BC}}^{-1}\,.$$

Observação 12.7.4 *Podemos obter a expressão do operador linear* $\underline{T}$ *do Exemplo acima.*
Para isto, observamos que, de (12.274)*, segue que*

$$\begin{aligned} T(1,0) &= T(e_1) \overset{(12.274)}{=} 3 \cdot e_1 + (-2) \cdot e_2 \\ &= 3 \cdot (1,0) - 2 \cdot (0,1) = (3,-2) \end{aligned} \tag{12.275}$$

$$\begin{aligned} T(0,1) &= T(e_2) \overset{(12.274)}{=} (-2) \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 \\ &= -2 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1) = (-2,3) \,. \end{aligned} \tag{12.276}$$

Assim, teremos:

$$\begin{aligned} T(x\,,y) &= T[x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1)] \overset{T \text{ é oper. linear}}{=} x \cdot T(1,0) + y \cdot T(0,1) \\ &\overset{(12.275) \text{ e } (12.276)}{=} x \cdot (3,-2) + y \cdot (-2,3) \\ &= (3x - 2y\,, 3y - 2x)\,, \quad \textit{para cada} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$T(x\,,y) = (3x - 2y\,, 3y - 2x)\,, \quad \textit{para cada} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Temos também a :

Proposição 12.7.7 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) de dimensão finita, de modo que os conjuntos*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\} \quad e \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1, \cdots, v_m\} \tag{12.277}$$

são base (ordenada) de $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$*, respectivamente.*
Suponhamos que $T \in \mathcal{L}(U,V)$ *e* $u \in U$*.*
Então

$$[T(u)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, [u]_{\mathcal{B}}\,. \tag{12.278}$$

Demonstração:
Sejam

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{12.279}$$

Logo, de (12.279), segue que

$$u = a_1 \cdot u_1 + \cdots + a_n \cdot u_n \tag{12.280}$$

$$T(u_j) = \alpha_{1j} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{mj} \cdot v_m\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, \cdots, n\}\,. \tag{12.281}$$

Assim

$$\begin{aligned} T(u) &\overset{(12.280)}{=} T(a_1 \cdot u_1 + \cdots + a_n \cdot u_n) \overset{T \text{ é transf. linear}}{=} a_1 \cdot T(u_1) + \cdots + a_n \cdot T(u_n) \\ &\overset{(12.281)}{=} a_1(\alpha_{11} v_1 + \cdots + \alpha_{m1} v_m) + \cdots + a_n(\alpha_{1n} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot v_m) \\ &\overset{\text{propriedades de esp. vet.}}{=} (a_1 \alpha_{11} + \cdots + a_n \alpha_{1n}) \cdot v_1 + \cdots + (a_1 \alpha_{m1} + \cdots + a_n \alpha_{mn}) \cdot v_m\,. \end{aligned}$$

Assim, da definição de matriz das coordenadas de um vetor, segue que

$$[T(u)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_1\alpha_{11} + \cdots + a_n\alpha_{1n} \\ \vdots \\ a_1\alpha_{m1} + \cdots + a_n\alpha_{mn} \end{pmatrix} \overset{\text{Exercício}}{=} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

que, de (12.279), é equivalente a escrever:

$$[T(u)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, [u]_{\mathcal{B}}\,,$$

como queríamos demonstrar.

□

Proposição 12.7.8 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) de dimensão finita, de modo que os conjuntos*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\} \quad e \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1, \cdots, v_m\} \tag{12.282}$$

são base (ordenada) de $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$*, respectivamente, e* $T \in \mathcal{L}(U, V)$*.*

Então a transformação linear $\underline{T}$ *é um isomorfismo de* $(U\,,+\,,\cdot)$ *em* $(V\,,+\,,\cdot)$ *se, e somente se, a matriz da transformação linear* $\underline{T}$ *em relação às base (ordenada)* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *for uma matriz inversível, isto é, a matriz* $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ *admite matriz inversa.*

Demonstração:

Notemos que, em geral, teremos

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})\,.$$

Suponhamos que a transformação linear $\underline{T}$ é um isomorfismo de $(U\,,+\,,\cdot)$ em $(V\,,+\,,\cdot)$, isto é, $(U\,,+\,,\cdot)$ e $(V\,,+\,,\cdot)$ são isomorfos.

Com isto, do Corolário (12.6.2), deveremos ter

$$\dim(U) = \dim(V) = n\,.$$

Logo, da Proposição (12.7.5), seque que a matriz quadrada $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ possui matriz inversa dada por $\left[T^{-1}\right]_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.

Reciprocamente, suponhamos que a matriz (quadrada) $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ admita matriz inversa.

Em particular, como a matriz acima é quadrada deveremos ter

$$m = n\,, \quad \text{isto é,} \quad \dim(U) = \dim(V) = n\,.$$

Pelo Corolário (12.5.4), para completar a prova basta mostrar que a transformação linear $\underline{T}$ é injetora.

Para isto seja $u \in \mathcal{N}(T)$, isto é,

$$T(u) = O = 0\cdot v_1 + \cdots + 0\cdot v_n\,, \quad \text{ou seja,} \quad [T(u)]_{\mathcal{C}} = (0)\,, \tag{12.283}$$

onde (0) denota a matriz coluna de tamanho $n \times 1$, identicamente nula.

Então, da Proposição (12.7.7), segue que

$$[u]_{\mathcal{B}} = [I_U(u)]_{\mathcal{B}} = \left[\left(T^{-1} \circ T\right)(u)\right]_{\mathcal{B}} = \left[T^{-1}[T(u)]\right]_{\mathcal{B}} \overset{\text{Prop. (12.7.7)}}{=} \left[T^{-1}\right]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} [T(u)]_{\mathcal{C}}$$
$$\overset{\text{Prop. (12.7.5)}}{=} [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} \underbrace{[T(u)]_{\mathcal{C}}}_{\overset{(12.283)}{=}(0)} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}(0) = (0)\,. \tag{12.284}$$

Logo, de (12.284), segue que

$$u = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_n = O\,,$$

portanto

$$\mathcal{N}(T) = \{O\}\,.$$

Assim, da Proposição (12.5.3), segue que a transformaçõa linear $\underline{T}$ é injetora, e pelo Corolário (12.5.4), teremos que $T \in \mathcal{L}(U, V)$ é um isomorfismo de $(U\,, +\,, \cdot)$ em $(V\,, +\,, \cdot)$, completando a demonstração do resultado.

□

Para finalizar temos o seguinte:

Exercício 12.7.4 *Sejam* $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*).*

Verifique se a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathscr{P}_1(\mathbb{R})$ *dada por*

$$T(a\,, b) \doteq p\,, \quad \textit{para cada} \quad (a\,, b) \in \mathbb{R}^2\,, \tag{12.285}$$

onde

$$p(t) \doteq a + (a+b)t\,, \quad \textit{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{12.286}$$

é um isomorfismo de $\left(\mathbb{R}^2\,, +\,, \cdot\right)$ *em* $(\mathscr{P}_1(\mathbb{R}), +, \cdot)$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor mostra que aplicação $\underline{T}$ é uma transformção linear de $\left(\mathbb{R}^2\,, +\,, \cdot\right)$ em $(\mathscr{P}_1(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Consideremos

$$\mathcal{B} \doteq \{(1,0), (0,1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{p_o, p_1\} \tag{12.287}$$

as bases canônicas de $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ e $(\mathscr{P}_1(\mathbb{R}), +, \cdot)$, respectivamente, ou seja,

$$p_o(t) \doteq 1\,, \quad p_1(t) \doteq t\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{12.288}$$

Notemos que, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, teremos:

$$[T\underbrace{(1,0)}_{(a,b)}](t) \overset{(12.285)\text{ e }(12.286)}{=} 1 + (1+0)t = 1 \overset{(12.288)}{=} 1 \cdot p_o(t) + 1 \cdot p_1(t)\,, \tag{12.289}$$

$$[T\underbrace{(0,1)}_{(a,b)}](t) \overset{(12.285)\text{ e }(12.286)}{=} 0 + (0+1)t = t \overset{(12.288)}{=} 0 \cdot p_o(t) + 1 \cdot p_1(t)\,, \tag{12.290}$$

segue que matriz da transformação linear T com relação a estas bases será dada por

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \overset{(12.289) \text{ e } (12.290)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\det\{[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

segue (ver Capítulos 2 e 3) que a matriz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ admite matriz inversa.

Logo, da Proposição (12.7.8) acima, segue que a transformação linear $\underline{T}$ é um isomorfismo de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ em $(\mathscr{P}_1(\mathbb{R}), +, \cdot)$, completando a resolução do Exemplo.

□

12.8 Exercícios

Em todos os exercícios abaixo os espaços vetoriais reias (ou complexos) envolvidos estarão munidos das respectivas operações usuais, exceto, menção contrária e $(U, +_u, \cdot_u)$, $(V, +_v, \cdot_v)$ e $(W, +_w, \cdot_w)$ espaços vetoriais reais.

Exercício 12.8.1 *Pergunta-se: quais das seguintes aplicações entre os correspondentes espaço vetoriais reais (ou complexos), são transformações lineares? justifique sua resposta.*

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *dada por* $T(x, y, z) \doteq (x, x, x)$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *dada por* $T(x, y, z) \doteq (2x^2 + 3y, x, z)$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

3. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *dada por* $T(x, y) \doteq (x + y, x - y)$, *para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

4. $T : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, *dada por* $T(p)(x) \doteq (a_1 - 2a_3 - a_2) - a_o x^2$, *para* $x \in \mathbb{R}$, *com* $p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, *onde* $p(x) \doteq a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, *para* $x \in \mathbb{R}$.

5. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por* $T(x) \doteq |x|$, *para* $x \in \mathbb{R}$.

6. $T : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, *dada por* $T(p) \doteq p'$, *para* $p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, *onde* p' *denbota da derivada de* p.

7. $T : \mathscr{P}_4(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, *dada por* $T(p) \doteq \int_0^1 p(x)\, dx$, *para* $p \in \mathscr{P}_4(\mathbb{R})$.

8. $T : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, *dada por* $T(x, y, z) \doteq \begin{pmatrix} -z & z - y \\ x & 0 \end{pmatrix}$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

9. $T : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, *dada por* $T(x, y, z) \doteq \begin{pmatrix} 1 & -y \\ x & 0 \end{pmatrix}$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

10. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por* $T(x) \doteq x^2 - 2x$, *para* $x \in \mathbb{R}$.

11. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *dada por* $T(x, y, z) \doteq x + 5y - z$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

12. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *dada por* $T(x, y, z) \doteq x + 5y - z + 1$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

13. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *dada por* $T(x, y, z) \doteq x^2 + 5y - z$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

14. $T : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, *dada por* $T(X) \doteq AX + X$, *para* $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, *onde* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *está fixada.*

15. $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, *dada por* $T(p) \doteq p' + p''$, *para* $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$. *onde* p' *e* p'' *denbotam da 1.a e 2.a derivadas de* p.

16. $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, *dada por* $T(X) \doteq AX$, *para* $X \in M_2$, *onde* $A \in M_2(\mathbb{R})$ *está fixada.*

17. $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, *dada por* $T(p) \doteq p+q$, *para* $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, *onde* $q \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *é dada por* $q(x) \doteq x^2 + 1$, *para* $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 12.8.2 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *o operador linear dado por:*

$$T(x, y, z) \doteq (3x, x - y, 2x + y + z), \text{ para } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Mostre que $\left(T^2 - I\right) \circ (T - 3I) = 0$, *onde* I *denota o operador identidade em* $\mathbb{R}^3$.

Exercício 12.8.3 *Sejam* $T, S \in \mathcal{L}(V)$, *satisfazendo* $S \circ T = T \circ S$. *Mostre que*

1. $(T + S)^2 = T^2 + 2(T \circ S) + S^2$;

2. $(T + S) \circ (T - S) = T^2 - S^2$.

Exercício 12.8.4 *Sejam* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$ *e* $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$ *definidas por*

$T(x, y) \doteq (0, x, x-y)$, *para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *e* $S(x, y, z) \doteq (x-y, x+2y+3z)$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Determine $(T \circ S)(x, y, z)$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 12.8.5 *Considere o operador linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *dada por* $T(x, y) \doteq (y, x)$, *para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *determine a expressão para o operador linear* $T^n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *ou seja* $T(x, y)$, *para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 12.8.6 *Determine todos* $a, b, c \in \mathbb{R}$, *de modo que o operdor linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *dada por* $T(x, y) \doteq (ax, bx + cy)$, *para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *satisfaça a identidade* $T^2 = T$.

Exercício 12.8.7

1. *Determine a expressão da transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, *tal que*

$$T(1, 0, 0) \doteq (2, 0), \quad T(0, 1, 0) \doteq (1, 1) \quad e \quad T(0, 0, 1) \doteq (0, -1).$$

Encontre $v \in \mathbb{R}^3$, *de modo que* $T(v) = (3, 2)$.

2. *Determine uma transformação linear* $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to M_{1\times 2}(\mathbb{R})$ *tal que*

$$T(p_o) \doteq \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T(p_1) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad T(p_2) \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde

$$p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq x, \quad p_2(x) \doteq x^2, \ para\ x \in \mathbb{R}.$$

3. *Determine uma transformação linear* $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ *tal que*

$$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ e\ T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercício 12.8.8 *Seja* $T : M_{2\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 1}(\mathbb{R})$, *definida por*

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ para\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{2\times 1}(\mathbb{R}).$$

Então:

1. *mostre que a aplicação* T *é um operador linear em* $M_{2\times 1}(\mathbb{R})$;

2. *encontre todos os vetores* $u \in M_2(\mathbb{R})$, *tais que* $T(u) = u$;

3. *encontre todos os vetores* $v \in M_2(\mathbb{R})$, *tais que* $T(v) = -v$.

Exercício 12.8.9 *Para cada uma das transformações ou operadores lineares abaixo, determinar uma base e a respectiva dimensão para o núcleo e para imagem da mesma:*

1. *seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *dada por* $T(x, y, z) \doteq x + z - y$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$.

2. *sejam* $p_2(x) \doteq x^2$, *para* $x \in \mathbb{R}$ *fixada e* $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, *dada por* $T(p) \doteq p_2 \cdot p''$, *para* $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

3. *seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *dada por* $T(x, y, z) \doteq (z, x - y, -z)$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

4. *seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *dada por* $T(x, y) \doteq (2y, x - y, -x)$, *para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

5. *sejam* $M \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, *dada por* $T(X) \doteq M \cdot X + X$, *para* $X \in M_2(\mathbb{R})$.

6. *seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *dada por* $T(x, y) \doteq y + 2x$, *para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

7. *seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *dada por* $T(x, y, z) \doteq z - 2x$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

8. *seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *dada por* $T(x, y) \doteq (2x + 2y, x + y)$, *para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

9. *seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *dada por* $T(x, y) \doteq (x + y, x - y)$, *para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

10. *seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *dada por* $T(x\,,y\,,z) \doteq (z-x\,,z-2\,x\,,z-3\,x)\,,$ *para* $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$.

11. *seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *dada por* $T(x\,,y\,,z) \doteq (x+y\,,2\,x+y\,,3\,x+y)\,,$ *para* $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$.

12. *seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *dada por* $T(x\,,y) \doteq y+2\,x\,,$ *para* $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.

13. *seja* $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, *dada por* $T(X) \doteq A \cdot X\,,$ *para* $X \in M_2(\mathbb{R})$, *onde* $A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

14. *seja* $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, *dada por* $T(p) \doteq p'\,,$ *para* $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

15. *seja* $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, *dada por* $T(p) \doteq p' + p''\,,$ *para* $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

16. *seja* $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ *dada por* $T(X) \doteq A \cdot X + X\,,$ *para* $X \in M_2(\mathbb{R})$, *onde* $A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercício 12.8.10 *Dê exemplos de transformações ou operadores lineares, de modo que:*

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *satisfazendo* $\dim[\mathcal{N}(T)] = 1$.
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, *satisfazendo* $\mathcal{N}(T) = \{(0\,,0\,,0)\}$.
3. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *satisfazendo* $T\left(\mathbb{R}^2\right) = \{(0\,,0\,,0)\}$.
4. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *satisfazendo* $T\left(\mathbb{R}^3\right) = [(2\,,1\,,1)\,,(1\,,-1\,,2)]$.
5. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *satisfazendo* $\mathcal{N}(T) = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2;\;\; x = y\}$.
6. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *satisfazendo* $\mathcal{N}(T) = \{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, z = -x\}$.
7. $T : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, *satisfazendo* $\dim\left[T\left(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\right)\right] = 3$.
8. $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, *satisfazendo* $\mathcal{N}(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$.

Exercício 12.8.11 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *uma operador linear, satisfazendo*

$$T(1\,,0\,,0) \doteq (1\,,1\,,0)\,, \quad T(0\,,1\,,0) \doteq (1\,,1\,,2) \quad e \quad T(0\,,0\,,1) \doteq (0\,,0\,,2)\,.$$

Determinar uma base de cada um dos seguintes subespaços:

$$1,.\ \mathcal{N}(T) \quad 2.\ T(\mathbb{R}^3) \quad 3.\ \mathcal{N}(T) \cap T(\mathbb{R}^3) \quad 4.\ \mathcal{N}(T) + T(\mathbb{R}^3)\,.$$

Exercício 12.8.12 *Determinar um operador linear em* $\mathbb{R}^4$, *cujo núcleo é gerado pelos vetores* $(1\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,0\,,1\,,0)$.

Exercício 12.8.13 *Determinar um operador linear em* $\mathbb{R}^4$, *cujo núcleo e a imagem sejam gerados pelos (mesmos) vetores* $(1\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,0\,,1\,,0)$.

Exercício 12.8.14 *Determinar um operador linear em* $\mathbb{R}^3$*, cujo núcleo tenha dimensão igual a* 1.

Exercício 12.8.15 *Determinar um operador linear em* $\mathbb{R}^3$*, cujo núcleo é gerado pelos vetores* $(1,1,0),(0,0,1)$ *e a imagem gerada pelo vetor* $(1,-1,1)$.

Exercício 12.8.16 *Determinar* $\mathsf{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$*, tal que*

$$\mathsf{T}(\mathbb{R}^3) \doteq [(2,2,3,2),(3,2,0,2)] .$$

Exercício 12.8.17 *Determinar uma transformação linear* $\mathsf{T} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$*, tal que*

$$\mathsf{T}(\mathbb{R}^5) \doteq [(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)] \quad e \quad \mathcal{N}(\mathsf{T}) = [(1,1,1,1,1),(1,1,1,1,0)] .$$

Exercício 12.8.18 *Determinar uma transformação linear* $\mathsf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$*, tal que*

$$\mathsf{T}(1,0,0) \doteq (1,2), \quad \mathsf{T}(0,1,0) \doteq (3,4), \quad \mathsf{T}(0,0,1) \doteq (0,0) .$$

Exercício 12.8.19 *Determinar uma transformação linear* $\mathsf{T} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$*, tal que* $\dim[\mathcal{N}(\mathsf{T})] = 2$ *e* $\dim[\mathsf{T}(\mathbb{R}^5)] \doteq 3$.

Exercício 12.8.20 *Determinar uma transformação linear* $\mathsf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$*, tal que* $\mathcal{N}(\mathsf{T}) \doteq [(1,0,1)]$.

Exercício 12.8.21 *Determinar uma transformação linear* $\mathsf{T} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$*, tal que* $\mathcal{N}(\mathsf{T}) = \mathsf{T}(\mathbb{R}^4) \doteq [(1,0,1,0),(0,1,0,1)]$.

Exercício 12.8.22 *Determinar uma transformação linear* $\mathsf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*, tal que* $\mathsf{T}(\mathbb{R}^2) \doteq [(1,1,1),(1,2,0)]$.

Exercício 12.8.23 *Determinar uma transformação linear* $\mathsf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*, tal que* $\mathsf{T}(\mathbb{R}^2) = [(1,1,1)]$ *e* $\mathcal{N}(\mathsf{T}) \doteq [(1,1)]$.

Exercício 12.8.24 *Seja* $\mathsf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *um operador linear, satisfazendo: que*

$$\mathsf{T}(1,0,0) \doteq (2,3,1), \quad \mathsf{T}(1,1,0) \doteq (5,2,7) \quad e \quad \mathsf{T}(1,1,1) \doteq (-2,0,7) .$$

Encontre uma expressão para $\mathsf{T}(x,y,z)$*, para cada* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*. Pergunta-se:*

1. T *é sobrejetora? justifique sua resposta.*
2. T *é injetora? justifique sua resposta.*
3. T *é bijetora? justifique sua resposta.*

Exercício 12.8.25 *Seja* $\mathsf{T} : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *um operador linear, satisfazendo:*

$$(\mathsf{T}(p_o))(x) \doteq 1 + x, \quad (\mathsf{T}(p_1))(x) \doteq x + x^2 \quad e \quad (\mathsf{T}(p_2))(x) \doteq 1 + x - 2x^2, \ \text{para } x \in \mathbb{R},$$

onde $p_i(x) = x^i$, *para* $x \in \mathbb{R}$*, para cada* $i \in \{0,1,2\}$.

Encontre uma expressão para $\mathsf{T}(p)$*, para cada* $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*. Pergunta-se:*

1. T *é sobrejetora? justifique sua resposta.*

2. T *é injetora? justifique sua resposta.*

3. T *é bijetora? justifique sua resposta.*

Exercício 12.8.26 *Seja* $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ *um operador linear, satisfazendo:*

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \doteq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encontre uma expressão para $T(X)$*, para cada* $X \in M_2(\mathbb{R})$*. Pergunta-se:*

1. T *é sobrejetora? justifique sua resposta.*

2. T *é injetora? justifique sua resposta.*

3. T *é bijetora? justifique sua resposta.*

Exercício 12.8.27 *Verifique se os operadores lineares em* $\mathbb{R}^3$ *abaixo, são isomorfismos e em caso afirmativo determinar o isomorfismo inverso.*

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *dada por* $T(x, y, z) \doteq (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *dada por* $T(x, y, z) \doteq (x, x - y, 2x + y - z)$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 12.8.28 *Considere o operador linear em* $\mathbb{R}^3$*, tal que*

$$T(1, 0, 0) \doteq (1, 1, 1), \quad T(0, 0, 1) \doteq (1, 0, 1), \quad T(0, 1, 2) \doteq (0, 0, 4).$$

Pergunta-se: T *é um isomorfismo? Em caso afirmativo, obtenha o isomorfismo inverso.*

Exercício 12.8.29 *Mostre que o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *é isomorfo a qualquer subespaço do espaço vetotrial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$*, que tenha dimensão igual a 2. Exiba um isomorfismo que realize o isomorfismo.*

Exercício 12.8.30 *Verifique, em cada um dos itens abaixo, se os espaços vetoriais* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *são isomorfos, justificando a resposta.*

(a) $U \doteq \mathbb{R}^2$*, munido das operações usuais, e* $V \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z = 0\}$*, munido das operações usuais do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

(b) $U \doteq M_{2\times 3}(\mathbb{R})$*, munido das operações usuais* $V \doteq \{p \in \mathscr{P}_4(\mathbb{R}) ; p'(t) = 0,$ *para todo* $t \in \mathbb{R}\}$*, munido das operações usuais do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_4(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

(c) $U \doteq \mathbb{R}^3$*, munido das operações usuais, e* $V \doteq \{A \in M_2(\mathbb{R}) ; A^t = A\}$*, munido das operações usuais do espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

(d) $U \doteq \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R} \right\}$ *, munido das operações usuais do espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, *e* $V \doteq \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) ; p'(t) = 0 ,$ *para todo* $t \in \mathbb{R}\}$, *munido das operações usuais do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Exercício 12.8.31 *Mostre que o subespaço vetorial* $W \doteq \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x - y = z - 2t = 0\}$ *do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, *é isomorfo ao subespaço vetorial* $U \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - y - z = 0\}$ *do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. *Exiba um isomorfismo entre estes dois subespaços vetoriais.*

Exercício 12.8.32 *Dadas as transformações lineares* $T : U \to V$ *e* $S : V \to W$, *assinale (V) ou (F) em cada uma das afirmações abaixo, justificando a resposta.*

1. *se a transformação linear* $T \circ S$ *é sobrejetora, então a transformação linear* S *sobrejetora.*

2. *se a transformação linear* $T \circ S$ *é sobrejetora, então a transformação linear* T *sobrejetora .*

3. *se a transformação linear* $T \circ S$ *é injetora, então a transformação linear* S *é injetora.*

4. *se a transformação linear* $T \circ S$ *é injetora, então a transformação linear* T *é injetora.*

5. *Verifique que todas as afirmações acima serão verdadeiras se* $U = V = W$.

Exercício 12.8.33 *Seja* $T : U \to V$ *um isomorfismo. Se* $S : V \to U$ *satisfaz* $T \circ S = I_V$ *(ou* $S \circ T = I_U$*), prove que* S *é uma trasnformação linear.*

Exercício 12.8.34 *Suponha que* $\dim U > \dim V$. *Mostre que se* $T : U \to V$ *é uma transformação linear, então existe um vetor, não nulo,* $u_o \in U$, *tal que* $T(u_o) = O_V$, *onde* O_V *denota o vetor nulo do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Exercício 12.8.35 *Seja* $T : V \to V$ *um operador linear* **idempotente**, *isto é,* $T^2 = T$.
Mostre que $V = \mathcal{N}(T) \oplus T(V)$.

Exercício 12.8.36 *Sejam* $T \in \mathcal{L}(U ; V)$ *e* $S \in \mathcal{L}(V ; W)$, *tais que* $\mathcal{N}(T) = \{O_U\}$ *e* $\mathcal{N}(S) = \{O_V\}$. *Mostre que* $\mathcal{N}(S \circ T) = \{O_U\}$.

Capítulo 13

Matriz de uma transformação linear

13.1 Exercícios

Em todos os exercícios abaixo os espaços vetoriais considerados estarão munidos das respectivas operações usuais, exceto, menção contrária.

Exercício 13.1.1 *Determinar as matrizes das seguintes transformações lineares, em relação as bases canônicas (ordendas) dos respectivos espaços vetoriais envolvidos.*

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, *dada por* $T(x, y, z) \doteq (x + y, z)$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

2. $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, *dada por* $T(x, y, z, t) \doteq 2x + y - z + 3t$, *para* $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

(c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, *dada por* $T(x) \doteq (x, 2x, 3x)$, *para* $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 13.1.2 *Considere*

$$M \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinar a matriz do operador linear $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, *dado por* $T(X) \doteq M \cdot X - X \cdot M$, *para* $X \in M_2(\mathbb{R})$, *em relação à base canônica (ordenada).*

Exercício 13.1.3 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *operador linear, cuja matriz em relação à base (ordenada)* $\mathcal{B} \doteq \{(1, 0), (1, 4)\}$, *é dada por* $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. *Determinar a matriz de* T *em relação à base canônica (ordenada).*

Exercício 13.1.4 *Seja* $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *to funcional linear, definida por*

$$T(p) \doteq \int_{-1}^{1} p(x)\, dx, \text{ para } p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}).$$

Determine a matriz de T *em relação às bases (ordenadas)* $\mathcal{B}$ *de* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *e* $\mathcal{C}$ *de* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, *nos seguintes casos:*

(a) $\mathcal{B} \doteq \{p_o, p_1, p_2\}$ *e* $\mathcal{C} \doteq \{1\}$, *onde*

$$p_o(t) \doteq 1, \quad p_1(t) \doteq t, \quad p_2(t) \doteq t^2, \text{ para } t \in \mathbb{R}.$$

(b) $\mathcal{B} \doteq \{q_o, q_1, q_2\}$ *e* $\mathcal{C} \doteq \{-2\}$, *onde*

$$q_o(t) \doteq 1, \quad q_1(t) \doteq 1 + x, \quad q_2(t) \doteq 1 + x + x^2, \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 13.1.5 *Se a matriz de um operador linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *em relação a base canônica (ordenada)* $\mathcal{B}$ *é dada por*

$$[T]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e se o operador linear $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *é dado por* $S \doteq I + T + 2T^2$, *onde* I *é o operador identidade em* $\mathbb{R}^3$, *determinar a matriz do operador linear* S, *em relação à base canônica (ordenada)* $\mathcal{B}$. *Encontre também umaa expressão de* $S(x, y, z)$, *para cada* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 13.1.6 *Seja* $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *o operador linear, dado por*

$$[T(p))(x)] \doteq p(x) - p(1), \text{ para } p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}).$$

Tendo as bases (ordenadas) $\mathcal{B} \doteq \{p_o, p_1, p_2\}$ *e* $\mathcal{C} \doteq \{q_o, q_1, q_2\}$ *de* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, *onde*

$$p_o(x) \doteq 1, p_1(x) \doteq x - 1, \quad p_2(x) \doteq (x-1)^2, \text{ para } x \in \mathbb{R} \qquad e$$

$$q_o(x) \doteq 1, q_1(x) \doteq x, \quad q_2(x) \doteq x^2, \text{ para } x \in \mathbb{R},$$

encontrar as matrizes $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$, $[T]_{\mathcal{B}}$ *e* $[T]_{\mathcal{C}}$.

Exercício 13.1.7 *Seja* $\mathcal{B} \doteq \{e_1, e_2, e_3\}$ *uma base (ordenada) do espaço vetorial* $(V, +, \cdot)$. *Suponhamos que os operadores lineares* $T, S : V \to V$ *são tais que*

$$\begin{aligned} T(e_1) &\doteq 2 \cdot e_1 - 3 \cdot e_2 + e_3 & \qquad S(e_1) &\doteq 3 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 \\ T(e_2) &\doteq e_1 + e_2 & S(e_2) &\doteq e_1 - e_2 - e_3 \\ T(e_3) &\doteq e_2 + e_3 & S(e_3) &\doteq e_1 + e_2 - 2 \cdot e_3 \end{aligned}$$

Determine as seguintes matrizes: $[T]_{\mathcal{B}}$, $[S]_{\mathcal{B}}$, $[S \circ T]_{\mathcal{B}}$, $[S^2 + I]_{\mathcal{B}}$ *e* $[T^3 - S^2]_{\mathcal{B}}$.

Exercício 13.1.8 *Sejam* $U \doteq \mathbb{R}^3$, $V \doteq \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} \doteq \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ *e* $\mathcal{C} \doteq \{(1, 0), (0, 1)\}$ *bases (ordenadas) dos espaços vetoriais* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$, *respectivamente. Encontrar, em cada um dos itens abaixo,* $T \in \mathcal{L}(U; V)$, *tal que* $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$, *seja a matriz:*

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercício 13.1.9 *Consideremos o espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, *que tem como base canônica a base (ordenada)*

$$\mathcal{B} \doteq \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear dada por*

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \doteq (a + d, b + c), \text{ para } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

1. *Encontre a matriz* $[T]_{\mathcal{AB}}$, *onde* $\mathcal{A}$ *é a base canônica (ordenada) do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

2. *Se* $S : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ *é uma transformação linear, tal que* $[S]_{\mathcal{AB}} \doteq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, *encontre uma expressão para* $S(x, y)$, *para cada* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *Além disso, determine* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, *se existir, tal que* $S(a, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 13.1.10 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *uma transformação linear, tal que* $[T]_{\mathcal{A}} \doteq \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, *onde* $\mathcal{A}$ *é a base canônica (ordenada) do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. *Determine todos os vetores* $u, v \in \mathbb{R}^2$ *(se existirem) tais que* $T(u) = u$ *e* $T(v) = -v$.

Exercício 13.1.11 *Sejam* $A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *e* T *o operador linear em* $\mathbb{R}^2$ *definido por*

$$T(v) \doteq A \cdot [v]_{\mathcal{A}}, \text{ para } v \in \mathbb{R}^2,$$

onde $[v]_{\mathcal{A}}$ *denota a matriz das coordenadas do vetor* $\underline{v}$ *em relação à base canônica (ordenada)* $\mathcal{A}$, *do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^2, + \cdot)$. *Determine a matriz do operador* T *em relação a cada uma das seguintes bases (ordenadas) do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^2, + \cdot)$*:*

1. $\mathcal{B}_1 \doteq \{(1, 0), (0, 1)\}$;

2. $\mathcal{B}_2 \doteq \{(1, 3), (2, 5)\}$.

Exercício 13.1.12 *Seja* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$, *ddada por*

$$T(x, y, z) \doteq (x + z, y - 2z), \text{ para } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Sejam $\mathcal{B} \doteq \{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, -1)\}$ *uma base (ordenada) do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *e* $\mathcal{C} \doteq \{(1, 5), (2, -1)\}$ *uma base (ordenada) do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. *Determine a matriz* $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

Exercício 13.1.13 *Em cada um dos itens abaixo, determine a matriz da transformação linear, em relações às bases canônicas (ordenadas) dos respectivos espaços vetoriais reais:*

1. $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$, *dada por* $T(x, y, z) \doteq (x + y, z)$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

2. *]* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$, *dada por* $T(x, y) \doteq (x + y, x, x - y)$, *para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4; \mathbb{R})$, *dada por* $T(x, y, z, t) \doteq 2x + y - z + 3t$, *para* $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

4. $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$, *dada por* $T(x) \doteq (x, 2x, 3x)$, *para* $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 13.1.14 *Fixemos* $M \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *e consideremos* $T \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}))$, *dada por*

$$T(X) \doteq M \cdot X - X \cdot M, \text{ para } X \in M_2(\mathbb{R})$$

e $\mathcal{C}$ *a base canônica (ordenada) do espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$. *Determine* $[T]_{\mathcal{C}}$.

Exercício 13.1.15 *Determine a expressão de* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, *cuja matriz em relação à base (ordenada)* $\mathcal{B} = \{(1, 2), (0, 5)\}$ *é dada por* $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercício 13.1.16 *Seja* $T \in \mathcal{L}(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}); \mathscr{P}_2(\mathbb{R}))$, *dada por* $T(p) = p'$, *para cada* $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$. *Determine a matriz de* T *em relação às bases (ordenadas)* $\mathcal{A} \doteq \{p_o, p_1, p_2, p_3\}$ *e* $\mathcal{B} \doteq \{q_o, q_1, q_2\}$, *respectivamente, onde*

$$p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq x, \quad p_2(x) \doteq x^2, \quad p_3(x) \doteq x^3, \text{ para } x \in \mathbb{R} \qquad e$$

$$q_o(x) \doteq 1, \quad q_1(x) \doteq 1 + x, \quad q_2(x) \doteq -1 + x^2, \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 13.1.17 *Seja* $\mathcal{B} \doteq \{e_1, e_2, e_3\}$ *uma base (ordenada) de um espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$. *Considere* $T, S \in \mathcal{L}(V)$, *tais que*

$$T(e_1) = e_1 - e_2, \quad T(e_2) = e_1 + e_3, \quad T(e_3) = e_2 \qquad e$$

$$S(e_1) = 2e_1 + e_3, \quad S(e_2) = e_1, \quad S(e_3) = e_2 - 3e_1.$$

Determine as matrizes, em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, *dos seguintes operadores lineares em* V*:*

T, S, $3T - 5S$, $T \circ S \circ T$, $T^2 + S^2$, T^{-1} *(caso exista)*, $(T \circ S)^{-1}$ *(caso exista).*

Capítulo 14

Autovalores e autovetores

14.1 Exercícios

Nos exercícios abaixo vamos supor que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real (complexo), e os outros espaços vetoriais reais (ou complexos) estão munidos das operações usuais.

Exercício 14.1.1 *Encontrar os autovalores e autovetores de* $T \in \mathcal{L}(V)$*, em cada um dos seguintes casos:*

1. $V \doteq \mathbb{R}^2$, $T : V \to V$, *dada por* $T(x, y) \doteq (x + y, x - y)$, *para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. $V \doteq \mathbb{R}^3$, $T(1, 0, 0) \doteq (2, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) \doteq (2, 1, 2)$ *e* $T(0, 0, 1) \doteq (3, 2, 1)$.

3. $V \doteq \mathbb{R}^4$ *e* $[T]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, *onde* $\mathcal{B}$ *é base canônica (ordenada).*

Exercício 14.1.2 *Em cada um dos itens abaixo, assinale (V)erdadeiro ou (F)also em cada uma das afirmações abaixo, justificando a resposta:*

1. *Se* $\lambda \neq 0$ *é um autovalor do operador linear inversível* $T \in (V)$*, então* λ^{-1} *será um auto-valor do operador linear* $T^{-1} \in (V)$.

2. *O polinômio característico do operador linear* $T + S$ *é a soma dos polinômios característicos dos operadores lineares* $T, S \in \mathcal{L}(V)$.

3. *Se o vetor* v *é um autovetor comum aos operadores lineares* $T, S \in \mathcal{L}(V)$*, então o vetor* v *é auto-vetor dos operadores lineares* $T + S$ *e* $S \circ T$.

Exercício 14.1.3

1. *Seja* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *uma matriz triangular (superior ou inferior), isto é,* $A = (a_{ij})$*, onde* $a_{ij} = 0$*, sempre que* $i > j$ *(ou sempre que* $i < j$*). Qual o polinômio característico associado a matriz* A*?*

2. *Sejam* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *matrizes triangulares que tenham a mesma diagonal principal. Existe alguma relação entre seus polinômios característicos? Qual?*

3. *Mostre que se* $\lambda \in \mathbb{C}$ *é autovalor de* $T \in \mathcal{L}(V)$*, então* λ^n *é um autovalor do operador linear* T^n.

4. *Mostre que se* $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ *é um polinômio e* $\lambda \in \mathbb{C}$ *é autovalor de* $T \in \mathcal{L}(V)$*, então* $p(\lambda)$ *será um autovalor do operador linear* $p(T)$*, onde*

$$p(T) \doteq a_o \cdot I + a_1 \cdot T + \cdots + a_n \cdot T^n\,, \quad \textit{para} \quad T \in \mathcal{L}(V)\,,$$

onde $I : V \to V$ *é operador identidade e* $p(x) \doteq a_o + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n$*, para* $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 14.1.4 *Achar os autovalores e autovetores do operador linear* T *no espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$*, de modo que:*

1. $T(x, y) \doteq (-x, -y)$*, para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. $T(1, 0) \doteq (0, -1)$ *e* $T(0, 1) \doteq (1, 0)$.

Exercício 14.1.5 *Achar os autovalores e autovetores do operador linear* T *no espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$*, de modo que:* $T(1, 0, 0) \doteq (0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) \doteq (0, 0, 0)$ *e* $T(0, 0, 1) \doteq (5, -1, 2)$.

Exercício 14.1.6 *Seja* $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *a matriz de um operador linear* T *no espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$*, em relação à base canônica (ordenada)* $\mathcal{B}$*. Encontre todos os autovalores do operador linear* T*. Existem, neste caso, dois autovetores de* T *que sejam L.I.?*

Exercício 14.1.7 *Considere o operador linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, dado por*

$$T(x, y) \doteq (-y, x)\,, \quad \textit{para} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Mostre que operador linear T *não admite autovetores (isto é, autovetores no espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$*).*

Capítulo 15

Diagonalização de matrizes e operadores lineares

15.1 Exercícios

Exercício 15.1.1 *Considere o operador linear* $\mathsf{T} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, *cuja matriz em relação à base canônica (ordenada) é dada por* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Calcule os autovetores e os respectivos subespaços próprios (auto-espaços) associados ao operador linear* T.

2. *Existe uma base (ordenda)* $\mathcal{B}$ *do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *de modo que a matriz* $[\mathsf{T}]_{\mathcal{B}}$ *seja diagonal?*

Exercício 15.1.2 *Seja* $\mathsf{A} \doteq \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ *a matriz de um operador linear* $\mathsf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *em relação à base canônica (ordenada). Pergunta-se: o operador linear* T *é diagonalizável?*

Exercício 15.1.3 *A matriz* $\mathsf{A} \doteq \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ *é diagonalizável? Caso afirmativo encontre a matriz inversível* M *que realiza a diagonalização.*

Exercício 15.1.4 *A matriz* $\mathsf{A} \doteq \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *é diagonalizável? Caso afirmativo encontre a matriz inversível* M *que realiza a diagonalização.*

Exercício 15.1.5 *Suponha que* $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *é o operador linear dado por:*

$$T(p) \doteq q\,, \quad \textit{para} \quad p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,$$

onde

$$p(x) \doteq a_o + a_1\,x + a_2\,x^2, \quad e \quad q(t) \doteq (5\,a_o + 6\,a_1 + 2\,a_2) - (a_1 + 8\,a_2)\,x + (a_o - 2\,a_2)\,x^2\,, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Pede-se

1. *encontrar todos os autovalores do operador linear* T*;*
2. *encontrar os respectivos autovetores do operador* T*;*
3. *determinar a dimensão e uma base de cada um dos auto-espaços associados ao operador linear* T*.*
4. *o operador linear* T *é diagonalizável?*

Exercício 15.1.6 *Seja* $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ *o operador linear dado por:*

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 2\,c & a + c \\ b - 2\,c & d \end{pmatrix}, \quad \textit{para} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})\,.$$

1. *Achar todos os autovalores e os autovetores associados do operador linear* T*.*
2. T *é diagonalizável? justifique sua resposta.*

Exemplo 15.1.1 *Definimos o* <u>traço</u> *de uma matriz quadrada* A *como sendo a soma dos elementos da sua diagonal principal.*

Mostre que a equação característica associada a uma matriz 2×2 *é dada por*

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\,\lambda + \det(A) = 0\,,$$

onde $\operatorname{tr}(A)$ *denota o traço da matriz* $A \in M_2(\mathbb{R})$*.*

Exercício 15.1.7 *Determinar uma matriz inversível* $M \in M_2(\mathbb{R})$*, se existir, de modo que a matriz* $M^{-1}\,A\,M$ *seja uma matriz diagonal, em cada um dos seguintes casos:*

$$1.\; A \doteq \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix} \qquad\qquad 2.\; A \doteq \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício 15.1.8 *Verificar, em cada um dos itens abaixo, se o operador* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$*, dado pela sua matriz em relação à base canônica* $\mathcal{B}$*, é diagonalizável.*

$$1.\; [T]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad 2.\; [T]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2 & 0 \\ n & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; \textit{para quaisquer } m\,, n \in \mathbb{R}.$$

Exercício 15.1.9 *Verificar em cada um dos itens abaixo se o operador* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$*, dado pela sua matriz com relação à base canônica* $\mathcal{B}$ *, é diagonalizável.*

1. $[T]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2. $[T]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício 15.1.10 *Mostre que a matriz* $A \doteq \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *não é semelhante a uma matriz diagonal se* $a \neq 0$.

Exercício 15.1.11 *Verifique se a matriz abaixo não é diagonalizável, para* $a \in \mathbb{R}$*, onde* $A \doteq \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercício 15.1.12 *Encontre uma matriz diagonal semelhante a matriz* $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 15.1.13 *Estude se cada uma das matrizes abaixo são diagonalizáveis.*

1. $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2 & 0 \\ n & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Capítulo 16

Espaços euclidianos

16.1 Exercícios

Exercício 16.1.1 *No espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *consideremos o produto interno*

$$\langle f, g \rangle \doteq \int_0^1 f(t)\, g(t) dt,$$

onde $f, g \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. *Calcule* $\langle f, g \rangle$, $\|f\|$, $\|g\|$ *e* $\|f + g\|$ *para os seguinte casos:*

1. $f(x) \doteq x^3 - x - 1$ *e* $g(x) \doteq x^2 + 1$, *para* $x \in \mathbb{R}$.

2. $f(t) \doteq 2$ *e* $g(x) \doteq x^3 + x + 1$, *para* $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 16.1.2 *No espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *considere*

$$\langle f, g \rangle \doteq a_o\, b_o + a_1\, b_1 + \cdots + a_n\, b_n,$$

onde $f, g \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, *são dados por* $f(x) \doteq a_o + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n$ *e* $g(x) \doteq b_o + b_1\, x + \cdots + b_n\, x^n$, *para* $x \in \mathbb{R}$.

A função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *é um produto interno no espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$? *Justifique sua resposta.*

Exercício 16.1.3 *No espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, *considere o produto interno* $\langle A, B \rangle \doteq \operatorname{tr}(B^t A)$, *para* $A, B \in M_2(\mathbb{R})$.

1. *Se* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *calcule:* $\langle A, B \rangle$, $\|A\|$, $\|B\|$ *e* $d(A, B)$.

2. *Encontre uma base ortonormal de* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, *segundo o produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *introduzido acima.*

Exercício 16.1.4 *Considere o espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$, *munido do produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$. *Se* $u, v \in V$ *são vetores tais que* $\|u\| = 5$, $\|v\| = 8$ *e* $\|u + v\| = \sqrt{129}$, *determine o cosseno do ângulo entre os vetores* u *e* v.

Exercício 16.1.5 *Considere o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, *munido do produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *usual. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz, para demonstrar que, dados números reais estritamente positivos* a_1, a_2, a_3, *vale a desigualdade:*

$$(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9 .$$

Exercício 16.1.6 *Considere* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real munido do produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$. *Encontrar as normas dos vetores* u, v *e o cosseno do ângulo entre eles nos seguintes casos:*

1. $V \doteq \mathbb{R}^4$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *produto interno usual,* $u \doteq (1, 1, 1)$ *e* $v \doteq (-1, 0, 1, -1)$.

2. $V \doteq \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *o produto interno do Exercício 16.1.1. acima,* $u(t) \doteq 1 + t - t^2$ *e* $v(t) \doteq 3\,t^2$, *para* $t \in \mathbb{R}$.

3. $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *o produto interno do Exercício16.1.3 acima,* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 16.1.7 *Considere o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, *munido do produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *usual. Determinar todos os vetores de* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *que tem norma igual a dois, que sejam ortogonais, simultaneamente, aos vetores* $u_1 \doteq (2, 1, 2)$ *e* $u_2 \doteq (-1, 3, 4)$.

Exercício 16.1.8 *No espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, *consideremos o produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *do Exercício 16.1.1 acima. Verifique se os vetores* $p_o, p_1, p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, *onde*

$$p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq x, \quad p_2(x) \doteq x^2 - \frac{1}{3}, \text{ para } x \in \mathbb{R},$$

são dois a dois ortogonais, em relação do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercício 16.1.9 *Considere o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *munido do produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *usual. Sejam* $u \doteq (2, 2, 2), v \doteq (3, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$. *Pede-se:*

1. *determinar dois vetores,* v_1 *e* v_2, *tais o vetor que* $v = v_1 + v_2$, *o vetor* v_1 *é ortogonal aos vetores* u *e* $v_2 = \lambda \cdot u$, *para* $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. *se* $w \doteq (-5, 1, -1)$, *decompor o vetor* v *em uma soma de dois vetores, sendo um deles pertencente ao subespaço vetorial* $W = [u, w]$ *e uma outra parcela pertencente ao subespaço vetorial* $W^\perp$.

3. *determinar uma base ortonormal do subespaço vetorial* W.

Exercício 16.1.10 *Considere o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, *munido do produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *usual. Determinar a projeção ortogonal do vetor* $u \doteq (1, 1, 0, -1)$, *no subespaço* $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x - y - z = 0 \text{ e } z - 2\,t = 0\}$.

Exercício 16.1.11 *Considere o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *com o produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *do Exercício 16.1.1 .*

1. *Utilizando o processo de Gram-Schmidt, ortonormalizar a base* $\{q_o, q_1, q_2\}$*, onde* $q_o(x) \doteq 1$, $q_1(x) \doteq 1 + x$ *e* $q_2(x) \doteq 2x^2$*, para* $x \in \mathbb{R}$.

2. *Achar o complemento ortogonal do subespaço* $W \doteq [r_o, r_1]$ *onde* $r_o(x) \doteq 5$ *e* $r_1(x) \doteq 1 + x$*, para* $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 16.1.12 *Considere o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *usual. Determinar uma base ortonormal de cada um dos seguintes subespaços vetoriiais abaixo, utilizando o processo de Gram-Schmidt:*

1. $W \doteq (1,1,0,0), (0,1,2,0), (0,0,3,4)]$.

2. $W \doteq [(2,0,0,0), (1,3,3,0), (3,-3,-3,0)]$.

Exercício 16.1.13 *Considere o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *usual. Seja* $\mathcal{C} = \left\{ \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{\doteq u_1}, \underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)}_{\doteq u_2}, \underbrace{\left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)}_{\doteq u_3} \right\}$ *base ortonormal (ordenda) do espaço vetorial real considerado e* $[u]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *e* $[w]_{\mathcal{C}} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pede-se:

1. *encontre a matriz das coordenadas do* $v \doteq (1,7,8)$ *relativamente à base* $\mathcal{C}$.

2. *encontre a projeção ortogonal do vetor* v *no subespaço vetorial* $W \doteq [u_1, u_2]$.

3. *encontre* $\|u\|, \|v\|$ *e o ângulo entre os vetores* u *e* v.

   (a) *calcule* $\|u + v\|$.

   (b) *calcule* $\|u_1 + u_2 + u_3\|$.

Exercício 16.1.14 *Considere o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *usual. Verfique quais dos operadores lineares* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *abaixo são isometrias de* $\mathbb{R}^2$*:*

1. $T(x,y) \doteq (x + y, x - y)$*, para* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. $T(x,y) \doteq \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$*, para* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3. $T(x,y) \doteq (y,x)$*, para* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 16.1.15 *Considere o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ *munido do produto interno* $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ *usual. Determine* $m\in\mathbb{R}$*, de modo que o operador linear* $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *dado por:*

$$T(x\,,y\,,z)\doteq\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+m\,z\,,-\frac{1}{\sqrt{6}}x+\frac{2}{\sqrt{6}}y-\frac{1}{\sqrt{6}}z\,,-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}z\right)\,,\quad para\quad (x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3\,,$$

seja uma isometria em $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ *.*

Exercício 16.1.16 *Considere o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$*, munido o produto interno* $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ *do Exercício 16.1.1. acima. Pede-se:*

1. *ortonormalize a base usual,* $\mathcal{B}\doteq\{p_o\,,p_1\,,p_2\}$*.*

2. *considere o operador linear* $T:\mathscr{P}_2(\mathbb{R}\to\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*, cuja matriz em relação a base (ordenada)* $\mathcal{C}$*, encontrada no item anterior, seja* $[T]_{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ m & n & p\end{pmatrix}$*. Determine* $m\,,n\,,p\in\mathbb{R}$*, de modo que o operador linear* T *seja uma isometria no espaço vetorial real considerado.*

Exercício 16.1.17 *Considere espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$*. munido do produto interno do Exercício 16.1.3. .*

O operador linear $T:M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$ *dado por* $T(A)=A^t$*, para* $A\in M_2(\mathbb{R})$ *é uma isometria no espaço euclidiano considerado?*

Exemplo 16.1.1 *Considere espaço vetorial real* $(M_{4\times1}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$*, munido do produto interno* $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ *do Exercício 16.1.3. acima, e o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$*, munido do produto interno* $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ *usual. Construa uma isometria entre estes espaços vetoriais reais (se existir).*

Capítulo 17

Operadores auto-adjuntos em espaços euclidianos

17.1 Exercícios

Exercício 17.1.1 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *espaço vetorial real, munido do produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *usual. Verifique se os operadores abaixo são auto-adjuntos:*

1. $V \doteq \mathbb{R}^3$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *o produto interno usual e o operador linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dado por* $T(x, y, z) \doteq (y + 2z, x + 3z, 2x + 3y)$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

2. $V \doteq \mathscr{P}_1(\mathbb{R})$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *o produto interno do Exercício 16.1.1. acima, e o operador linear* $T : \mathscr{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_1(\mathbb{R})$, *dado por* $T(p) \doteq q$, *para* $p \in \mathscr{P}_1(\mathbb{R})$, *onde* $p(x) \doteq a + b\,x$ *e* $q(x) \doteq (a + 4\,b) + (4\,a + 2\,b)\,x$, *para* $x \in \mathbb{R}$, *onde* $a, b \in \mathbb{R}$.

3. $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *o produto interno do Exercício 16.1.3 acima , e o operador linear* $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, *tal que* $T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \doteq \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \doteq \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right)$ *e* $T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercício 17.1.2 *Nos itens do Exercício 17.1.1 acima, em que o operador linear for auto-adjunto, encontre uma base (ordenada) do espaço vetorial real relaionado, de modo que a matriz do operador linear em questão seja uma matriz diagonal.*

Exercício 17.1.3 *Em cada um dos itens abaixo, determinar, se existirem,* $a, b \in \mathbb{R}$, *para que o operador linear* $T\,\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *seja auto-adjunto:*

$$\begin{aligned} &1.\ T(x, y, z) \doteq (3x - 2y, ax + y - 3z, by + z) \quad \textit{para} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \\ &2.\ T(x, y, z) \doteq (x + 2z, ax + 4y + bz, 2x - 3y + z) \quad \textit{para} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{17.1}$$

Referências Bibliográficas

[CDC] Callioli, C. A., Domingues, H. H., Costa, R. C. F., *Álgebra Linear e Aplicações,* Atual Editora Ltda, 1978.

[L] Lima, E. L., *Álgebra Linear,* Coleção Matemática Universitária, IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1995.

Índice Remissivo