s Gabarito da 1.ª Prova de PMA5622 - Fundamentos de Cálculo
Prof. Wagner - 3 de maio de 2019

1.a PARTE

1.ª Questão: Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funções dadas.
Mostre que:

(a) **valor 0,25** se as função f e g são injetoras, então a função $g \circ f$ será injetora;

(b) **valor 0,25** se a função $g \circ f$ é injetora, então a função f será injetora e nem sempre vale a recíproca;

(c) **valor 0,25** se as funções f e g sobrejetoras, então a função $g \circ f$ será sobrejetora;

(c) **valor 0,25** se a função $g \circ f$ é sobrejetora, então a função g será sobrejetora e nem sempre vale a recíproca;

Resolução:

(a) valor 0,25 :

Como as funções f e g são injetora, temos que

$$f(x_1) \neq f(x_2)\,, \text{ para } x_1\,, x_2 \in \mathbb{R}\,, \text{ com } x_1 \neq x_2\,. \tag{1}$$
$$g(y_1) \neq f(y_2)\,, \text{ para } y_1\,, y_2 \in \mathbb{R}\,, \text{ com } y_1 \neq yx_2\,. \tag{2}$$

Logo, para $x \in \mathbb{R}$ teremos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_1) &= g[f(x_1)] \\ &\overset{(1), \text{ temos } y_1 \doteq f(x_1) \neq y_2 \doteq f(x_2)\,; \text{ logo, por } (2) \text{ teremos:}}{\neq} g[f(x_2)] \\ &= (g \circ f)(x_2)\,,\end{aligned}$$

mostrando que a função $g \circ f$ é injetora.

□

(b) valor 0,25 :

Suponhamos, por absurdo, que a função f não seja injetora, isto é, existem $x_1\,, x_2 \in \mathbb{R}$, como $x_1 \neq x_2$, de modo que

$$f(x_1) = f(x_2)\,. \tag{3}$$

Como a função $g \circ f$ é injetora, devermos ter

$$(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)\,. \tag{4}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_1) &= g[f(x_1)] \\ &\overset{(3)}{=} g[f(x_2)] \\ &= (g \circ f)(x_2)\,,\end{aligned}$$

contrariando (4), o que é um absurdo!
Portanto a função f deve ser injetora.

□

(c) valor 0,25 :

Dado $z_o \in Z$, como a função g é sobrejetora, podemos encontrar $y_o \in Y$, de modo que

$$g(y_o) = z_o\,. \tag{5}$$

Por outro lado, como a função f é sobrejetora e $y_o \in Y$, podemos encontrar $x_o \in X$ de modo que

$$f(z_o) = y_o \,. \tag{6}$$

Desta forma teremos

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_o) &= g[f(x_o)] \\ &\overset{(6)}{=} g(y_o) \\ &\overset{(5)}{=} z_o \,,\end{aligned}$$

mostrando que a funções $g \circ f$ é sobrejetora.

□

(d) valor 0,25 :

Dado $z_o \in Z$, como a função $g \circ f$ é sobrejetora, podemos encontrar $x_o \in X$, de modo que

$$(g \circ f)(x_o) = z_o \,, \tag{7}$$

$$\text{ou seja,} \qquad g[f(x_o)] = z_o \,. \tag{8}$$

Logo, considerando-se

$$y_o \doteq f(x_o) \,, \tag{9}$$

teremos:

$$\begin{aligned} g(y_o) &\overset{(9)}{=} g[f(x_o)] \\ &\overset{(8)}{=} z_o \,,\end{aligned}$$

mostrando que a função g é sobrejetora.

□

2.ª Questão: Sejam $f_1\,, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções pares e $g_1\,, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções ímpares. Mostre que:

(a) a função $f_1 + f_2$ é função par;

(b) a função $f_1 \cdot g_1$ é função ímpar;

(c) a função $g_1 \cdot g_2$ é função par;

(d) a função $f_1 \circ g_1$ é função par;

(e) toda função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita como soma de uma função para com uma função ímpar (na verdade esse modo é único);

Resolução:

Como as funções $f_1\,, f_2$ são funções pares e as funções $g_1\,, g_2$ são ímpares, para $x \in \mathbb{R}$, teremos:

$$f_1(-x) = f_1(x) \,, \tag{10}$$

$$f_2(-x) = f_2(x) \,, \tag{11}$$

$$g_1(-x) = -g_1(x) \,, \tag{12}$$

$$g_2(-x) = -g_2(x) \,. \tag{13}$$

(a) valor 0,25 :

Notemos que

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(-x) &= f_1(-x) + f_2(-x) \\ &\overset{(10) \text{ e } (11)}{=} f_1(x) + f_2(x) \\ &= (f_1 + f_2)(x) \,,\end{aligned}$$

mostrando que a função $f_1 + f_2$ é uma função par.

$\square$

(b) valor 0,25 :

Notemos que

$$\begin{aligned}(f_1 \cdot g_1)(-x) &= f_1(-x) \cdot g_1(-x)\\ &\overset{(10)\text{ e }(12)}{=} f_1(x) \cdot [-g_1(x)]\\ &= -(f_1 \cdot g_1)(x)\,,\end{aligned}$$

mostrando que a função $f_1 \cdot g_1$ é uma função ímpar.

$\square$

(c) valor 0,25 :

Notemos que

$$\begin{aligned}(g_1 \cdot g_2)(-x) &= g_1(-x) \cdot g_2(-x)\\ &\overset{(12)\text{ e }(13)}{=} [-g_1(x)] \cdot [-g_2(x)]\\ &= (g_1 \cdot g_2)(x)\,,\end{aligned}$$

mostrando que a função $g_1 \cdot g_2$ é uma função par.

$\square$

(d) valor 0,25 :

Notemos que

$$\begin{aligned}(f_1 \circ g_1)(-x) &= f_1[g_1(-x)]\\ &\overset{(12)}{=} f_1[-g_1(x)]\\ &\overset{(10)}{=} f_1[g_1(x)]\\ &= (f_1 \circ g_1)(x)\,,\end{aligned}$$

mostrando que a função $f_1 \circ g_1$ é uma função par.

$\square$

(e) valor 0,5 :

Notemos que, para $x \in \mathbb{R}$, temos

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}\,. \tag{14}$$

Consideremos as funções $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por

$$F(x) \doteq \frac{f(x) + f(-x)}{2}\,, \tag{15}$$

$$G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{16}$$

Afirmamos que a função F é uma função par e a função G é uma função ímpar. De fato, para $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}F(-x) &\overset{(15)}{=} \frac{f(-x) + f[-(-x)]}{2}\\ &= \frac{f(-x) + f(x)}{2}\\ &= \frac{f(x) + f(-x)}{2}\\ &\overset{(15)}{=} F(x)\,,\end{aligned}$$

mostrando que a função F é uma função par e

$$\begin{aligned} G(-x) &\overset{(16)}{=} \frac{f(-x) - f[-(-x)]}{2} \\ &= \frac{f(-x) - f(x)}{2} \\ &= \frac{-[f(x) - f(-x)]}{2} \\ &= -\frac{f(x) - f(-x)}{2} \\ &\overset{(16)}{=} -G(x)\,, \end{aligned}$$

mostrando que a função G é uma função ímpar.

Além disso,

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{(14)}{=} \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \\ &\overset{(15)\ \text{e}\ (16)}{=} F(x) + G(x)\,, \end{aligned}$$

completando a resolução.

□

3.ª Questão: Dê, de modo preciso, as definições de:

(a) supremo de um subconjunto de $\mathbb{R}$ (juntamente com as propriedades que este subconjunto deve ter para existir o mesmo);

(b) conjunto denso em $\mathbb{R}$;

(c) limite de uma sequência de números reais;

(d) sequência de Cauchy de números reais;

Resolução:

(a) valor 0,25 :

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente.

Definimos o supremo do conjunto A, indicado por $\sup(A)$, como sendo o menor limitante superior do conjunto A, ou seja,

$$\sup(A) \doteq \min\{l\,;\ a \leq l\,,\ \text{para todo } a \in A\}.$$

(b) valor 0,25 :

Diremos que um $D \subseteq \mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$, se qualquer intervalo aberto de $(a\,,b) \subseteq \mathbb{R}$ temos

$$D \cap (a\,,b) \neq \emptyset\,.$$

(c) valor 0,25 :

Dada uma sequência de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, diremos que ela é convergente (em $\mathbb{R}$) para $l \in \mathbb{R}$, de dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{para}\ \ n \geq n_o\,,\quad \text{tenhamos}\ \ |a_n - l| < \varepsilon\,.$$

Neste caso denotaremos l por $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \doteq l\,.$$

(d) valor 0,25 :

Diremos que uma sequência de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$, , podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{para} \quad n, m \geq n_o, \quad \text{tenhamos} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

4.ª Questão: Em cada um dos itens abaixo, dizer se a afirmação é **V**erdadeira ou **F**alsa.

(**F**) **valor 0,25** uma sequência de números reais é convergente em $\mathbb{R}$ se, e somente se, ela for limitada;

(**V**) **valor 0,25** se $a_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ e a sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}$, então $a_n \cdot b_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$;

(**V**) **valor 0,25** sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é equivalente a ela ser convergente em $\mathbb{R}$;

(**F**) **valor 0,25** se a sequência de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para a e a sequência de números reais $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz

$$b_n \leq a_n, \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N},$$

então a sequência de números reais $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para algum $b \in \mathbb{R}$ e, além disso, $b \leq a$.

2.a PARTE

5.ª Questão: Dados $a, b \in \mathbb{R}$, tais

$$a < b, \tag{17}$$

mostre que:

(a) mostre que exite $n_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$0 < \frac{1}{2^{n_o}} < b - a; \tag{18}$$

(b) utilizando o item (a), mostre que o intervalo $[2^{n_o} a, 2^{n_o} b]$ tem comprimento maior que 1;

(c) utilizando o item (b), mostre que podemos encontrar $m_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$2^{n_o} a < m_o < 2^{n_o} b. \tag{19}$$

(d) utilizando o item (c), mostre que podemos encontrar um número diádico, isto é, do tipo $\frac{m_o}{2^{n_o}}$, pertencente ao intervalo (a, b).

(e) Seja

$$D \doteq \left\{ \frac{m}{2^n} ;\, m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}^+ \right\}. \tag{20}$$

Mostre que D é denso em $\mathbb{R}$.

Resolução:

(a) valor 0,25 :

Sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Logo, da definição de limite, dado

$$\varepsilon \doteq b - a \overset{(17)}{>} 0\,, \tag{21}$$

podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_o\,, \\ \text{tenhamos} \quad & \underbrace{\left|\frac{1}{2^n} - 0\right|}_{=\frac{1}{2^n}} < \varepsilon \overset{(21)}{=} b - a\,, \\ \text{ou seja,} \quad & 0 < \frac{1}{2^n} < b - a\,. \end{aligned}$$

Em particular, tomando-se $n = n_o$, obtemos (18), completando a demonstração do item (a).

$\square$

(b) valor 0,25 :

Notemos que, do item (b), temos:

$$\begin{aligned} & 0 < \frac{1}{2^{n_o}} < b - a\,, \\ \text{multiplicando-se a desigualdade por } 2^{n_o} > 0\text{, obteremos:} \quad & 1 < 2^{n_o}\, b - 2^{n_o}\, a\,, \end{aligned}$$

ou seja, o intevalo

$$[2^{n_o}\, a\,, 2^{n_o}\, b] \tag{22}$$

terá comprimento maior que 1, completando a demonstração do item (b).

(c) valor 0,25 :

Como o intervalo (22) tem comprimento maior que 1, podemos encontrar $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$\begin{aligned} & m_o \in (2^{n_o}\, a\,, 2^{n_o}\, b) \\ \text{ou seja,} \quad & 2^{n_o}\, a < m_o < 2^{n_o}\, b\,, \end{aligned}$$

completando a demonstração do item (c).

(d) valor 0,25 :

Do itens (a), (b) e (c) acima podemos concluir a existência de $n_o \in \mathbb{N}$ e $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$\begin{aligned} & 2^{n_o}\, a < m_o < 2^{n_o}\, b\,, \\ \text{dividindo-se a desigualdade por } 2^{n_o} > 0\text{, obteremos:} \quad & a < \frac{m_o}{2^{n_o}} < b\,, \\ \text{ou seja,} \quad & \frac{m_o}{2^{n_o}} \in (a\,, b)\,, \end{aligned}$$

completando a demonstração do item (d).

(e) valor 0,5 :

Consideremos $(a\,, b) \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

Do item (d) acima, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$ e $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$\frac{m_o}{2^{n_o}} \in (a\,, b)\,,$$

ou seja, o conjunto D, dado por (20), é denso em $\mathbb{R}$, completando a demonstração do item (e).

$\square$

6.ª Questão: Sejam $X\,, Y \subseteq \mathbb{R}$ dois conjuntos não vazios e limitados superiormente e $c > 0$.

Mostre que:

(a) o conjunto $c \cdot X$ é é limitado superiormente e vale

$$\sup(c \cdot X) = c \cdot \sup(X)\,; \tag{23}$$

(b) o conjunto $X + Y$ é limitado superiormente e vale

$$\sup(X + Y) = \sup(X) + \sup(Y)\,. \tag{24}$$

$\boxed{\textbf{Resolução:}}$

(a) $\boxed{\textbf{valor 1,0}}$ **:**

Lembremos que

$$c \cdot X \doteq \{c \cdot x\,;\, x \in X\}\,.$$

Como o conjunto X é não vazio, existe $x_o \in X$.

Desta forma $c \cdot x_o \in c \cdot X$, mostrando que $c \cdot X$ é não vazio.

Por outro lado, como X é limitado superiormente, podemos encontrar $u \in \mathbb{R}$, de modo que

$$x \le u \quad \text{para todo } x \in X\,. \tag{25}$$

$$\text{Multiplicando-se (25) por } c > 0, \text{ obteremos:} \quad c \cdot x \le c \cdot u \quad \text{para todo } x \in X\,. \tag{26}$$

Desta forma se $y \in c \cdot X$, da definição do conjunto $c \cdot X$, teremos que

$$y = c \cdot x \quad \text{para algum} \quad x \in X\,,$$

$$\text{logo} \quad y = c \cdot x \overset{(26)}{\le} c \cdot u\,, \tag{27}$$

ou seja, $c \cdot u$ é um limitante superior do conjunto $c \cdot X$, assim o conjunto $c \cdot X$ é limitado superiormente.

Logo, de um resultado conhecido, podemos concluir que existe o supremo do conjunto $c{\cdot}X$, ou seja, $\sup(c{\cdot}X) \in \mathbb{R}$.

Notemos também que, como $\sup(X)$ é um limitante superior do conjunto X, podemos considerar $u \doteq \sup(X)$ em (27), ou seja

$$\sup(c \cdot X) \le c \cdot \sup(X)\,. \tag{28}$$

Por outro lado, notemos que

$$c \cdot x \le \sup(c \cdot X)\,, \tag{29}$$

$$\text{dividindo-se (29) por } c > 0, \text{ obteremos:} \quad x \le \frac{1}{c} \cdot \sup(c \cdot X)\,,$$

isto é, o número real $\frac{1}{c} \cdot \sup(c \cdot X)$ é um limitante superior do conjunto X logo deveremos ter

$$\sup(X) \le \frac{1}{c} \cdot \sup(c \cdot X)\,, \tag{30}$$

$$\text{multiplicando-se (30) por } c > 0, \text{ obteremos:} \quad c \cdot \sup(X) \le \sup(c \cdot X)$$

que juntamente com (28), mostra a validade da identidade (23), completando a demonstração do item (a).

$\square$

(b) $\boxed{\textbf{valor 1,0}}$ **:**

Lembremos que

$$X + Y \doteq \{x + y\,;\, x \in X \text{ e } y \in Y\}\,.$$

Como os conjuntos $X\,, Y$ são não vazios, existem $x_o \in X$ e $y_o \in Y$.

Desta forma, pela definição do conjunto $X + Y$, temos que $x_o + y_o \in X + Y$, mostrando que o conjunto $X + Y$ é não vazio.

Por outro lado, como os conjuntos X, Y são limitados superiormente, podemos encontrar $l_X, l_Y \in \mathbb{R}$, de modo que

$$x \leq l_X \,, \quad \text{para todo } x \in X \tag{31}$$

$$\text{e} \quad y \leq l_Y \quad \text{para todo } x \in X \,. \tag{32}$$

$$\text{Somando-se (31) e (32), obteremos:} \quad x + y \leq l_X + l_Y \,, \quad \text{para todo } x \in X \text{ e } y \in Y \,, \tag{33}$$

mostrando que o número real $l_X + l_Y$ é um limitante superior do conjunto $X + Y$, ou seja, o conjunto $X + Y$ é limitado superiormente.

Logo, de um resultado conhecido, podemos concluir que existe o supremo do conjunto $X + Y$, ou seja, $\sup(X + Y) \in \mathbb{R}$.

Notemos também que, podemos $\sup(X)$ e $\sup(Y)$ são limitantes superiores dos conjuntos X e Y, respectivamente, ou seja, podemos considerar $l_X \doteq \sup(X)$ e $l_Y \doteq \sup(Y)$.

Em particular, de (33), segue que

$$x + y \leq \sup(X) + \sup(Y) \,, \quad \text{para todo } x \in X \text{ e } y \in Y \,, \tag{34}$$

isto é, o número real $\sup(X) + \sup(Y)$ é um limitante superior do conjunto $X + Y$.

Portanto teremos

$$\sup(X + Y) \leq \sup(X) + \sup(Y) \,. \tag{35}$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, da definição de supremo, segue que existem $x_o \in X$ e $y_o \in Y$, de modo que

$$\sup(X) - \frac{\varepsilon}{2} < x_o \,, \tag{36}$$

$$\sup(Y) - \frac{\varepsilon}{2} < y_o \,. \tag{37}$$

$$\text{Somando-se (36) e (37), segue que:} \quad \left(\sup(X) - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\sup(Y) - \frac{\varepsilon}{2}\right) < x_o + y_o \,,$$

$$\text{ou seja,} \quad \sup(X) + \sup(Y) - \varepsilon < x_o + y_o \,,$$

ou ainda, podemos encontar $z_o \in X + Y$ (na verdade, $z_o \doteq x_o + y_o$), de modo que

$$\sup(X) + \sup(Y) - \varepsilon < z_o \,,$$

mostrando que o número real $\sup(X) + \sup(Y)$ não pode ser limitante superior do conjunto $X + Y$.

Como $\sup(X + Y)$ é um limitante superior do conjunto $X + Y$, segue que

$$\sup(X) + \sup(Y) \leq \sup(X + Y) \,,$$

que juntamente com (35), implica na validade da identidade (24), completando a demonstração do item (b). □

7.ª Questão: (valor 1,5): Sejam $X, Y \subseteq (0, \infty)$ dois conjuntos não vazios e limitados superiormente. Mostre que o conjunto $X \cdot Y$ é limitado superiormente e vale

$$\sup(X \cdot Y) = \sup(X) \cdot \sup(Y) \,. \tag{38}$$

Resolução:

Notemos que, do fato que $X, Y \subseteq (0, \infty)$ e limitados superiormente, segue que

$$\sup(X) \,, \sup(Y) > 0 \,. \tag{39}$$

Lembremos que

$$X \cdot Y \doteq \{x \cdot y \;;\; x \in X \text{ e } y \in Y\} \,.$$

Como os conjuntos X, Y são não vazios, existem $x_o \in X$ e $y_o \in Y$.

Desta forma, pela definição do conjunto $X \cdot Y$, temos que $x_o \cdot y_o \in X + Y$, mostrando que o conjunto $X \cdot Y$ é não vazio.

Por outro lado, como os conjuntos X, Y são limitados superiormente, podemos encontrar $l_X, l_Y \in \mathbb{R}$, de modo que

$$0 \leq x \leq l_X\,, \quad \text{para todo } x \in X \tag{40}$$

$$\text{e} \quad 0 \leq y \leq l_Y \quad \text{para todo } x \in X. \tag{41}$$

Multiplicando-se (40) e (41) (são sambos não negativos), obteremos:

$$0 \leq x \cdot y \leq l_X \cdot l_Y\,, \quad \text{para todo } x \in X \text{ e } y \in Y, \tag{42}$$

mostrando que o número real $l_X \cdot l_Y$ é um limitante superior do conjunto $X \cdot Y$, ou seja, o conjunto $X \cdot Y$ é limitado superiormente.

Em particular, de (42), segue que

$$x \cdot y \leq \sup(X) \cdot \sup(Y)\,, \quad \text{para todo } x \in X \text{ e } y \in Y, \tag{43}$$

isto é, o número real $\sup(X) \cdot \sup(Y)$ é um limitante superior do conjunto $X \cdot Y$.

Portanto teremos

$$\sup(X \cdot Y) \leq \sup(X) \cdot \sup(Y)\,. \tag{44}$$

Suponhamos, por absurdo, que

$$\sup(X \cdot Y) < \sup(X) \cdot \sup(Y)\,. \tag{45}$$

Dado $\varepsilon > 0$, da definição de supremo, segue que existem $x_\varepsilon \in X$ e $y_\varepsilon \in Y$, de modo que

$$\sup(X) - \varepsilon < x_\varepsilon\,, \tag{46}$$

$$\sup(Y) - \varepsilon < y_\varepsilon\,. \tag{47}$$

Multiplicando-se (46) e (47), temos:

$$[\sup(X) - \varepsilon] \cdot [\sup(Y) - \varepsilon] < x_\varepsilon \cdot y_\varepsilon\,,$$

$$\text{ou:} \quad \sup(X) \cdot \sup(Y) - \varepsilon \cdot [\sup(X) + \sup(Y)] + \varepsilon^2 < x_\varepsilon \cdot y_\varepsilon\,, \tag{48}$$

Por outro lado, para todo $x \in X$ e $y \in Y$, teremos

$$x \cdot y \leq \sup(X \cdot Y) \overset{(45)}{<} \sup(X) \cdot \sup(Y)\,.$$

Em particular, para cada $\varepsilon > 0$ (com $x_\varepsilon \in X$ e $y_\varepsilon \in Y$ com em (46) e (47), respectivamente) teremos:

$$x_\varepsilon \cdot y_\varepsilon < \sup(X) \cdot \sup(Y)\,. \tag{49}$$

Consideremos

$$\varepsilon \doteq \sup(X) + \sup(Y) \overset{(39)}{>} 0 \tag{50}$$

de (48), teríamos

$$\sup(X) \cdot \sup(Y) - \varepsilon \cdot \varepsilon + \varepsilon^2 < x_\varepsilon \cdot y_\varepsilon\,,$$

$$\text{ou seja,} \quad \sup(X) \cdot \sup(Y) < x_\varepsilon \cdot y_\varepsilon\,. \tag{51}$$

Logo,

$$x_\varepsilon \cdot y_\varepsilon \overset{(49)}{<} \sup(X) \cdot \sup(Y) \overset{(51)}{<} x_\varepsilon \cdot y_\varepsilon\,,$$

o que é um absurdo!

Portanto podemos concluir que

$$\sup(X) \cdot \sup(Y) \leq \sup(X \cdot Y)\,,$$

que juntamente com (44), implica na validade da identidade (38), completando a demonstração.

$\square$

$\boxed{\textbf{8.}^a\ \textbf{Questão:}}$ Considere a sequência de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dada por

$$a_1 \doteq \sqrt{2} \tag{52}$$

$$\text{e} \quad a_n \doteq \sqrt{2 + a_{n-1}}\,, \quad \text{para } n \in \{2, 3, 4, \cdots\}\,. \tag{53}$$

(a) mostre que a sequência $(a_n)_{nN}$ é convergente em $\mathbb{R}$;

(b) encontre o valor do limite da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) $\boxed{\textbf{valor 1,0}}$ **:**

Para isto mostremos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e monótona.

Logo, de um resultado sabemos que ela será convergente em $\mathbb{R}$.

1. Mostremos que a seqüência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}$

Na verdade mostraremos que

$$0 < a_n \leq 2\,, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{54}$$

o que implicará, em particular, que ela é uma a seqüência numérica limitada.

Para isso usaremos <u>indução matemática</u>, isto é, precisaremos mostrar que:

1.1 a propriedade (54) é válida para $n = 1$;

1.2 se a propriedade (54) for válida para $n = k - 1$, ela também será válida para $n = k$.

Notemos que vale **1.1**, pois

$$0 < a_1 \overset{(52)}{=} \sqrt{2} \leq 2\,.$$

Mostremos que vale **1.1**.

De fato, se a propriedade for válida para $n = k - 1$, isto é, se

$$0 < a_{k-1} \leq 2 \tag{55}$$

teremos

$$\begin{aligned} 0 &< a_k \\ &\overset{(53)}{=} \sqrt{2 + a_{k-1}} \\ &\overset{(55)\text{ e a função rais quadrada é estritamente crescente}}{\leq} \sqrt{2+2} \\ &= 2\,, \end{aligned}$$

mostrando que vale **1.2**.

Assim segue da indução matemática, segue que vale (53), ou seja, a seqüência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}$.

2. Mostremos que a seqüência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente, ou seja,

$$a_n < a_{n+1}\,, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}\,. \tag{56}$$

Para isso usaremos, novamnete, <u>indução matemática</u>, isto é, precisaremos mostrar que:

2.1 a propriedade (56) é válida para $n = 1$;

2.2 se a propriedade (56) for válida para $n = k - 1$, ela também será válida para $n = k$.

Notemos que vale **2.1**, pois

$$\begin{aligned} a_1 &\overset{(52)}{=} \sqrt{2} \\ &\overset{\text{a função rais quadrada é estritamente crescente}}{<} \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2}}_{\overset{(52)}{=} a_1}} \\ &= \sqrt{2 + a_1} \\ &\overset{(53) \text{ com } k=1}{=} a_2 \,, \end{aligned}$$

mostrando a validade **2.1**.

Se a propriedade for válida para $n = k - 1$, isto é, se

$$a_{k-1} < a_k \,, \tag{57}$$

teremos

$$\begin{aligned} a_k &\overset{(53)}{=} \sqrt{2 + a_{k-1}} \\ &\overset{(57) \text{ e a função rais quadrada é estritamente crescente}}{<} \sqrt{2 + a_k} \\ &\overset{(53)}{=} a_{k+1} \,, \end{aligned}$$

mostrando a validade de **2.2**.

Assim segue da indução matemática, segue que vale (53), ou seja, a seqüência numérica $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona em $\mathbb{R}$.

Logo, de um resultado conhecido, que a seqüência numérica $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente.

(b) $\boxed{\textbf{valor 0,5}}$ **:**

Seja

$$l \doteq \lim_{n \to \infty} a_n \in \mathbb{R} \,. \tag{58}$$

Logo, teremos

$$\begin{aligned} l &\overset{(58)}{=} \lim_{n \to \infty} a_n \\ &\overset{(53)}{=} \lim_{n \to \infty} \sqrt{2 + a_{n-1}} \\ &\overset{\text{propriedades de limites que existem}}{=} \sqrt{2 + \lim_{n \to \infty} a_{n-1}} \\ &\overset{(58)}{=} \sqrt{2 + l} \,, \\ \text{ou seja,} \quad l^2 &= 2 + l \,, \\ \text{cujas soluções são:} \quad l &= -1 \text{ ou } l = 2 \,. \end{aligned}$$

Notemos que a sequência numérica $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é estritamente crescente e

$$0 < a_1 = \sqrt{2} \,,$$

donde podemos concluir que

$$0 < l \,.$$

Desta forma deveremos ter

$$l = 2\,,$$

$$\text{ou seja,}\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 2\,,$$

completando a resolução.

$\square$

$\boxed{\textbf{F I M}}$