s Gabarito da 1.ª Prova de PMA5622 - Fundamentos de Cálculo

Prof. Wagner - 28 de junho de 2019

1.a PARTE

1.ª Questão: Dê, de modo preciso, as definições de:

1. supremo de um subconjunto de $\mathbb{R}$ (juntamente com as propriedades que este subconjunto deve ter para existir o mesmo);
2. ínfimo de um subconjunto de $\mathbb{R}$ (juntamente com as propriedades que este subconjunto deve ter para existir o mesmo);
3. conjunto denso em $\mathbb{R}$;
4. sequência limitada de números reais;
5. sequência convergente de números reais;
6. sequência de Cauchy de números reais;

Resolução:

De 1. (valor 0,25): Seja $A \subseteq \mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente.

Definimos o supremo do conjunto A, indicado por $\sup(A)$, como sendo menor limitante superior do conjunto A, ou seja,

$$\sup(A) \doteq \min\{u\,;\, a \leq u\,,\ \text{para todo } a \in A\}.$$

De 2. (valor 0,25): Seja $B \subseteq \mathbb{R}$, não vazio e limitado inferiormente.

Definimos o ínfimo do conjunto B, indicado por $\inf(B)$, como sendo maior limitante inferior do conjunto A, ou seja,

$$\inf(B) \doteq \max\{l\,;\, l \leq b\,,\ \text{para todo } b \in B\}.$$

De 3. (valor 0,25): Diremos que um $D \subseteq \mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$, se qualquer intervalo aberto de $(a\,,b) \subseteq \mathbb{R}$ temos

$$D \cap (a\,,b) \neq \emptyset\,.$$

De 4. (valor 0,25):

Dada uma sequência de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, diremos que ela é limitada em $\mathbb{R}$, podemos encontrar $M \in (0\,,\infty)$, de modo que

$$|a_n| \leq M \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

De 5. (valor 0,25):

Dada uma sequência de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, diremos que ela é convergente (em $\mathbb{R}$) para $l \in \mathbb{R}$, de dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{para} \quad n \geq n_o\,, \quad \text{tenhamos} \quad |a_n - l| < \varepsilon\,.$$

Neste caso denotaremos o número real l, por $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \doteq l\,.$$

De 6. (valor 0,25):

Diremos que uma sequência de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$, , podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{para} \quad n\,, m \geq n_o\,, \quad \text{tenhamos} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon\,.$$

2.ª Questão: Em cada um dos itens abaixo, dizer se a afirmação é **V**erdadeira ou **F**alsa, **justificando a resposta**.

1. uma sequência de números reais é limitada em $\mathbb{R}$, então ela será convergente.
2. se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e a sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}$, então
$$a_n \cdot b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{1}$$
3. se sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$, então ela será de Cauchy em $\mathbb{R}$.
4. se as sequências de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes e a sequência de números reais $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz
$$a_n \leq b_n \leq c_n\,, \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$
então a sequência de números reais $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente em $\mathbb{R}$.

Resolução:

De 1. (valor 0,25): A afirmação 1. é **F**alsa.

De fato, pois a sequência numérica $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, pois

$$|(-1)^n| \leq 1 \quad \text{pra todo} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

mas não é convergente pois a subsequência com índices pares

$$((-1)^{2\,n})_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$$

é convergente para 1 e a subsequência com índices ímpares

$$((-1)^{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (-1)_{n\in\mathbb{N}}$$

é convergente para -1.

De 2. (valor 0,25): A afirmação 2. é **V**erdadeira.

De fato, pois como a sequência numérica $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica limitada, podemos encontrar $M > 0$, tal que

$$|b_n| \leq M\,, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2}$$

Por outro lado, como a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica convergente para zero, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} &\text{se} \quad n \geq n_o \\ \text{teremos:} \quad & \underbrace{|a_n - 0|}_{|a_n|} < \frac{\varepsilon}{M}\,, \\ \text{ou seja,} \quad & |a_n| < \varepsilon\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Logo, dado dado $\varepsilon > 0$, se $n \geq n_o$, teremos

$$\begin{aligned} |a_n\, b_n - 0| &= |a_n|\,|b_n| \\ &\overset{(2)\text{ e }(3)}{\leq} \frac{\varepsilon}{M} M < \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = 0\,,$$

ou seja, a validade de (1).

De 3. (valor 0,25): A afirmação 3. é **V**erdadeira.

De fato, se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{a}$, então dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\begin{aligned} &\text{para} \quad n \geq n_o\,,\\ &\text{teremos} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Logo,

$$\text{para} \quad n\,, m \geq n_o\,, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\text{segue que}\\ &|a_n - a_m| = |a_n + (-a + a) - a_m|\\ &\qquad = |(a_n - a) + (a - a_m)|\\ &\qquad \overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} |a_n - a| + \underbrace{|a - a_m|}_{=|a_m - a|}\\ &\qquad \overset{\text{de (5) e (4) teremos:}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica de Cauchy, completando a demonstração.

De 3. (valor 0,25): A afirmação 4. é **F**alsa.

De fato, consideremos as sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dadas por

$$a_n \doteq -1\,, \tag{6}$$

$$b_n \doteq (-1)^n\,, \tag{7}$$

$$\text{e} \quad c_n \doteq 1 \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{8}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} &a_n \to -1\,,\\ &c_n \to 1\,,\\ \text{e} \quad &\underbrace{a_n}_{\overset{(6)}{=}-1} \leq \underbrace{b_n}_{\overset{(7)}{=}(-1)^n} \leq \underbrace{c_n}_{\overset{(8)}{=}1} \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}\,, \end{aligned}$$

mas a sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente (veja o item 1. acima).

2.a PARTE

3.^{a} Questão: Dados $a\,, b \in \mathbb{R}$, tais

$$a < b\,, \tag{9}$$

mostre que:

1. mostre que existe $n_o \in \mathbb{N}$, tal que
$$0 < \frac{1}{n_o} < b - a\,. \tag{10}$$
2. utilizando o item (a), mostre que o intervalo
$$[n_o\, a\,, n_o\, b]\,,$$
tem comprimento maior que 1;
3. utilizando o item (b), mostre que podemos encontrar $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que
$$n_o\, a < m_o < n_o\, b\,.$$
4. utilizando o item (c), mostre que podemos encontrar um número racional, isto é, do tipo $\frac{m_o}{n_o}$, pertencente ao intervalo $(a\,,b)$, ou seja,
$$\frac{m_o}{n_o} \in (a\,,b)\,.$$
5. Seja
$$\mathbb{Q} \doteq \left\{\frac{m}{n}\,;\, m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}^+\right\}\,, \tag{11}$$
isto é, o conjunto formado pelos números racionais.

   Mostre que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Resolução:

De 1. (valor 0,25):

Sabemos que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$
Logo, da definição de limite, dado
$$\varepsilon \doteq b - a \overset{(9)}{>} 0\,, \tag{12}$$
podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que
$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_o\,, \\ \text{tenhamos} \quad & \underbrace{\left|\frac{1}{n} - 0\right|}_{=\frac{1}{n}} < \varepsilon \overset{(12)}{=} b - a\,, \\ \text{ou seja,} \quad & 0 < \frac{1}{n} < b - a\,. \end{aligned}$$
Em particular, tomando-se $n = n_o$, obtemos (10), completando a demonstração do item 1. .

$\square$

De 2. (valor 0,25):

Notemos que, do item (a), temos:
$$\begin{aligned} & 0 < \frac{1}{n_o} < b - a\,, \\ \text{multiplicando-se a desigualdade por } n_o > 0\text{, obteremos:} \quad & 1 < n_o\, b - n_o\, a\,, \end{aligned}$$
ou seja, o intevalo
$$[n_o\, a\,, n_o\, b] \tag{13}$$

terá comprimento maior que 1, completando a demonstração do item 2. .

De 3. (valor 0,25):

Como o intervalo (13) tem comprimento maior que 1, podemos encontrar $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$m_o \in (n_o\, a\,, n_o\, b)$$
$$\text{ou seja,} \quad n_o\, a < m_o < n_o\, b\,,$$

completando a demonstração do item 3. .

De 4. (valor 0,25):

Do itens (a), (b) e (c) acima podemos concluir a existência de $n_o \in \mathbb{N}$ e $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$n_o\, a < m_o < n_o\, b\,,$$
$$\text{dividindo-se a desigualdade por } n_o > 0\text{, obteremos:} \quad a < \frac{m_o}{n_o} < b\,,$$
$$\text{ou seja,} \quad \frac{m_o}{n_o} \in (a\,, b)\,,$$

completando a demonstração do item 4. .

De 5. (valor 0,5):

Consideremos $(a\,, b) \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

Do item (d) acima, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$ e $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$\frac{m_o}{n_o} \in (a\,, b)\,,$$

ou seja, o conjunto D, dado por (11), é denso em $\mathbb{R}$, completando a demonstração do item 5. .

$\square$

4.ª Questão: (valor 2,0): Sejam $X\,, Y \subseteq \mathbb{R}$ dois conjuntos não vazios e limitados superiormente e $c > 0$. Mostre que: o conjunto $c \cdot X$ admite supremo e vale

$$\sup(c \cdot X) = c \cdot \sup(X)\,. \tag{14}$$

Resolução:

Lembremos que

$$c \cdot X \doteq \{c \cdot x\,;\, x \in X\}\,. \tag{15}$$

Como o conjunto X é não vazio, existe

$$x_o \in X\,.$$

Desta forma

$$c \cdot x_o \in c \cdot X\,,$$

mostrando que $c \cdot X$ é não vazio.

Por outro lado, como X é limitado superiormente, podemos encontrar $u \in \mathbb{R}$, de modo que

$$x \le u \quad \text{para todo } x \in X\,. \tag{16}$$

$$\text{Multiplicando-se (16) por } c > 0\text{, obteremos:} \quad c \cdot x \le c \cdot u \quad \text{para todo } x \in X\,. \tag{17}$$

Desta forma se

$$y \in c \cdot X\,,$$

da definição do conjunto $c \cdot X$ (veja (15)), teremos que

$$y = c \cdot x \quad \text{para algum} \quad x \in X\,,$$
$$\text{logo} \quad y = c \cdot x \overset{(17)}{\leq} c \cdot u\,, \tag{18}$$

ou seja, o número real $c \cdot u$ é um limitante superior do conjunto $c \cdot X$, assim o conjunto $c \cdot X$ é limitado superiormente.

Logo, de um resultado conhecido, podemos concluir que existe o supremo do conjunto $c \cdot X$, ou seja,

$$\sup(c \cdot X) \in \mathbb{R}\,.$$

Notemos também que, como $\sup(X)$ é um limitante superior do conjunto X, podemos considerar

$$u \doteq \sup(X)$$

em (18), ou seja, teremos

$$\sup(c \cdot X) \leq c \cdot \sup(X)\,. \tag{19}$$

Por outro lado, notemos que

$$c \cdot x \leq \sup(c \cdot X)\,, \tag{20}$$
$$\text{dividindo-se (20) por } c > 0, \text{ obteremos:} \quad x \leq \frac{1}{c} \cdot \sup(c \cdot X)\,,$$

isto é, o número real $\frac{1}{c} \cdot \sup(c \cdot X)$ é um limitante superior do conjunto X.

Como $\sup(X)$ é o menor limitante superior de conjunto X, deveremos ter

$$\sup(X) \leq \frac{1}{c} \cdot \sup(c \cdot X)\,, \tag{21}$$
$$\text{multiplicando-se (21) por } c > 0, \text{ obteremos:} \quad c \cdot \sup(X) \leq \sup(c \cdot X)$$

que juntamente com (19), mostra a validade da identidade (14), completando a demonstração.

□

5.ª Questão: (valor 2,5):

Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ dois conjuntos não vazios e limitados inferiormente.

Mostre que: o conjunto $X + Y$ admite ínfimo e vale

$$\inf(X + Y) = \inf(X) + \inf(Y)\,. \tag{22}$$

Resolução:

Lembremos que

$$X + Y \doteq \{x + y\ ;\ x \in X \text{ e } y \in Y\}\,. \tag{23}$$

Como os conjuntos X, Y são não vazios, existem

$$x_o \in X \quad \text{e} \quad y_o \in Y\,.$$

Desta forma, pela definição do conjunto $X + Y$ (veja (23)), temos que

$$(x_o + y_o) \in X + Y\,,$$

mostrando que o conjunto $X + Y$ é não vazio.

Por outro lado, como os conjuntos X, Y são limitados inferiormente, podemos encontrar $l_X, l_Y \in \mathbb{R}$, de modo que

$$l_X \leq x\,, \quad \text{para todo } x \in X \tag{24}$$

$$\text{e} \quad l_Y \leq y \quad \text{para todo } x \in X\,. \tag{25}$$

$$\text{Somando-se (24) e (25), obteremos:} \quad l_X + l_Y \leq x + y\,, \quad \text{para todo } x \in X \text{ e } y \in Y\,, \tag{26}$$

mostrando que o número real $l_X + l_Y$ é um limitante inferior do conjunto $X + Y$, ou seja, o conjunto $X + Y$ é limitado inferiormente.

Logo, de um resultado conhecido, podemos concluir que existe o ínfimo do conjunto $X + Y$, ou seja,

$$\inf(X + Y) \in \mathbb{R}\,.$$

Notemos também que, podemos $\inf(X)$ e $\inf(Y)$ são limitantes inferiores dos conjuntos X e Y, respectivamente, ou seja, podemos considerar

$$l_X \doteq \inf(X) \quad \text{e} \quad l_Y \doteq \inf(Y)\,.$$

Em particular, de (26), segue que

$$\inf(X) + \inf(Y) \leq x + y\,, \quad \text{para todo } x \in X \text{ e } y \in Y\,, \tag{27}$$

isto é,

(i) o número real $\inf(X) + \inf(Y)$ é um limitante inferior do conjunto $X + Y$.

Mostremos agora que

$$\inf(X) + \inf(Y)$$

é o menor número real com a propriedade **(i)** acima.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, da definição de ínfimo, segue que existem $x_o \in X$ e $y_o \in Y$, de modo que

$$x_o < \inf(X) + \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{28}$$

$$y_o < \inf(Y) + \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{29}$$

$$\text{Somando-se (28) e (29), segue que:} \quad x_o + y_o < \left(\inf(X) + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\inf(Y) + \frac{\varepsilon}{2}\right)\,,$$

$$\text{ou seja,} \quad x_o + y_o < [\inf(X) + \inf(Y)] + \varepsilon\,,$$

ou ainda, podemos encontar $z_o \in X + Y$ (na verdade, $z_o \doteq x_o + y_o$), de modo que

$$z_o < [\inf(X) + \inf(Y)] + \varepsilon\,,$$

mostrando que o número real $[\inf(X) + \inf(Y)] + \varepsilon$ não é ser limitante inferior do conjunto $X + Y$, ou seja, $\inf(X) + \inf(Y)$ é o maior limitante inferior do conjunto $X + Y$, ou seja,

$$\inf(X + Y) = \inf(X) + \inf(Y)\,,$$

mostrando a validade de (22), completando a demonstração.

□

6.ª Questão:

Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequências convergentes de números reais, para a e b, respectivamente e $c \neq 0$. **Utilizando a definição de convergência de sequências, (ou seja, limites)** mostre que

1. a sequência $(c \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$, para $c \cdot a$;

2. a sequência $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$ para $a + b$

Resolução:

Do item 1. (valor 1,5):

Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,,$$

dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq n_o\,, \quad \text{teremos:} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}\,. \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

Logo

$$n \geq n_o\,, \tag{32}$$

segue que

$$\begin{aligned} |(c\,a_n - (c\,a)| &= |c\,(a_n - a)| \\ &= |c|\,|a_n - a| \\ &\overset{n \overset{(32)}{\geq} n_o \text{ e } (30)}{\geq} |c|\,\frac{\varepsilon}{|c|} \\ &= \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando que $\lim\limits_{n\to\infty} (c\,a_n) = c\,a$ ou, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = c\,a\,,$$

completando a demostração.

Do item 2. (valor 1,5):

Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,,$$

dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq n_1 \quad \text{temos} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{33}$$

e

$$\text{se} \quad n \geq n_2 \quad \text{temos} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{34}$$

Logo, tomando-se

$$n_o \doteq \max\{n_1\,, n_2\}, \tag{35}$$

temos para

$$n \geq n_o\,, \tag{36}$$

segue que

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &\overset{n \overset{(36)}{\geq} n_o \overset{(35)}{\geq} n_1 \text{ e } n \overset{(36)}{\geq} n_o \overset{(35)}{\geq} n_2\,,\ \text{logo valem (33) e (34)]}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando que $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$ ou, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b\,,$$

completando a demostração.

$\square$