s Gabarito da Prova Substitutiva de PMA5622 - Fundamentos de Cálculo

Prof. Wagner - 5 de julho de 2019

1.a PARTE

1.ª Questão: Dê, de modo preciso, as definições de:

1. supremo de um subconjunto de $\mathbb{R}$ (juntamente com as propriedades que este subconjunto deve ter para existir o mesmo).
2. ínfimo de um subconjunto de $\mathbb{R}$ (juntamente com as propriedades que este subconjunto deve ter para existir o mesmo).
3. conjunto denso em $\mathbb{R}$.
4. sequência limitada de números reais.
5. sequência convergente de números reais.
6. sequência de Cauchy de números reais.
7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função par.
8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função ímpar.
9. $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função injetora.
10. $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B$ função sobrejetora.

Resolução:

Do item 1. (valor 0,25): Seja $A \subseteq \mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente.

Definimos o supremo do conjunto A, indicado por $\sup(A)$, como sendo menor limitante superior do conjunto A, ou seja,

$$\sup(A) \doteq \min\{u\,;\, a \leq u\,,\ \text{para todo } a \in A\}\,.$$

Do item 2. (valor 0,25): Seja $B \subseteq \mathbb{R}$, não vazio e limitado inferiormente.

Definimos o ínfimo do conjunto B, indicado por $\inf(B)$, como sendo maior limitante inferior do conjunto A, ou seja,

$$\inf(B) \doteq \max\{l\,;\, l \leq b\,,\ \text{para todo } b \in B\}\,.$$

Do item 3. (valor 0,25): Diremos que um $D \subseteq \mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$, se para qualquer intervalo aberto de $(a\,,b) \subseteq \mathbb{R}$ temos

$$D \cap (a\,,b) \neq \emptyset\,.$$

Do item 4. (valor 0,25): Dada uma sequência de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, diremos que ela é limitada em $\mathbb{R}$, podemos encontrar $M \in (0\,,\infty)$, de modo que

$$|a_n| \leq M \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Do item 5. (valor 0,25): Dada uma sequência de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, diremos que ela é convergente (em $\mathbb{R}$) para $l \in \mathbb{R}$, de dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{para} \quad n \geq n_o\,, \quad \text{tenhamos} \quad |a_n - l| < \varepsilon\,.$$

Neste caso denotaremos o número real l, por $\lim_{n\to\infty} a_n$, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \doteq l\,.$$

Do item 6. (valor 0,25): Diremos que uma sequência de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$, , podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{para} \quad n\,,m \geq n_o\,, \quad \text{tenhamos} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon\,.$$

Do item 7. (valor 0,25): Diremos que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função par se

$$f(-x) = f(x) \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Do item 8. (valor 0,25): Diremos que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar se

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Do item 9. (valor 0,25): Diremos que a função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função injetora se

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{para} \quad x_1 \neq x_2\,, \quad \text{com} \quad x_1\,,x_2 \in A\,.$$

Do item 10. (valor 0,25): Diremos que a função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B$ é uma função sobrejetora se

$$\text{para cada} \quad y \in B\,, \quad \text{podemos encontrar} \quad x_y \in A \quad \text{de modo que} \quad f(x_y) = y\,.$$

2.ª Questão: Sejam $f\,,h : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funções dadas.
Mostre que:

1. se as funções f e g são injetoras, então a função $g \circ f$ será injetora.
2. se as funções f e g sobrejetoras, então a função $g \circ f$ será sobrejetora.
3. se as funções f e h são pares, então a função $f + h$ será uma função par.
4. se as funções f e h são ímpares, então a função $f \cdot h$ será uma função par.

Resolução:

Do item 1. (valor 0,25): Notemos que se $x_1\,,x_2 \in A$, satisfazem

$$\begin{aligned} & x \neq y\,, \\ \text{como a função } f \text{ é injetora, teremos:} \quad & f(x_1) \neq f(x_2)\,. \\ \text{Mas a a função } g \text{ também é injetora, logo:} \quad & \underbrace{g[f(x_1)]}_{=(g\circ f)(x_1)} \neq \underbrace{g[f(x_2)]}_{=(g\circ f)(x_2)}\,, \\ \text{ou seja,} \quad & (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)\,, \end{aligned}$$

mostrando que a função $g \circ f$ é injetora.

Do item 2. (valor 0,25): Notemos que, se $z \in Z$,

$$\text{como a função } g \text{ é sobrejetora, teremos: } \quad g(y_z) = z\,, \text{ para algum } y_z \in Y\,. \tag{1}$$

$$\text{Mas a função } f \text{ também é sobretora, logo: } \quad f(x_{y_z}) = y_z\,, \text{ para algum } x_{y_z} \in X\,. \tag{2}$$

Logo,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_y) &= g[f(x_{y_z})] \\ &\overset{(2)}{=} g(y_z) \\ &\overset{(1)}{=} z\,,\end{aligned}$$

mostrando que a função $g \circ f$ é sobrejetora.

Do item 3. (valor 0,25): Notemos que se $x \in \mathbb{R}$, teremos

$$\text{como a função } f \text{ é par, teremos: } \quad f(-x) = f(x)\,. \tag{3}$$

$$\text{Mas a função } h \text{ também é par, logo: } \quad h(-x) = h(x)\,. \tag{4}$$

Desta forma teremos:

$$\begin{aligned}(f+h)(-x) &= \underbrace{f(-x)}_{\overset{(3)}{=} f(x)} + \underbrace{h(-x)}_{\overset{(4)}{=} h(x)} \\ &= f(x) + h(x) \\ &= (f+h)(x)\,,\end{aligned}$$

mostrando que a função $f + h$ é uma função par.

Do item 4. (valor 0,25): Notemos que se $x \in \mathbb{R}$, teremos

$$\text{como a função } f \text{ é ímpar, teremos: } \quad f(-x) = -f(x)\,. \tag{5}$$

$$\text{Mas a função } h \text{ tamnbém é ímpar, logo: } \quad h(-x) = -h(x)\,. \tag{6}$$

Desta forma teremos:

$$\begin{aligned}(f \cdot h)(-x) &= \underbrace{f(-x)}_{\overset{(5)}{=} -f(x)} \cdot \underbrace{h(-x)}_{\overset{(6)}{=} -h(x)} \\ &= [-f(x)] \cdot [-h(x)] \\ &= f(x) \cdot h(x) \\ &= (f \cdot h)(x)\,,\end{aligned}$$

mostrando que a função $f \cdot h$ é uma função par.

3.ª Questão: Em cada um dos itens abaixo, dizer se a afirmação é **Verdadeira** ou **Falsa**, **justificando a resposta**.

1. se a sequência numérica $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}$, então ela será convergente.
2. se sequência numérica $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$, então ela será de Cauchy em $\mathbb{R}$.
3. se sequência numérica $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$, então sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$.
4. se sequência numérica $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona em $\mathbb{R}$, então ela será convergente em $\mathbb{R}$.

Resolução:

De 1. (valor 0,25): A afirmação 1. é **Falsa**.

De fato, pois a sequência numérica $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, pois

$$|(-1)^n| \leq 1 \quad \text{pra todo} \quad n \in \mathbb{N},$$

mas não é convergente pois a subsequência com índices pares

$$((-1)^{2\,n})_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$$

é convergente para 1 e a subsequência com índices ímpares

$$((-1)^{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (-1)_{n\in\mathbb{N}}$$

é convergente para -1.

De 2. (valor 0,25): A afirmação 2. é **V**erdadeira.

De fato, se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{a}$, então dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_o\,, \\ \text{teremos} \quad & |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Logo,

$$\text{para} \quad n\,, m \geq n_o\,, \tag{8}$$

segue que

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n + (-a + a) - a_m| \\ &= |(a_n - a) + (a - a_m)| \\ &\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} |a_n - a| + \underbrace{|a - a_m|}_{=|a_m - a|} \\ &\overset{\text{de (8) e (7) teremos:}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica de Cauchy, completando a demonstração.

De 3. (valor 0,25): A afirmação 3. é **F**alsa.

De fato, consideremos a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dadas por

$$a_n \doteq (-1)^n \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{9}$$

$$\text{Notemos que} \quad |a_n| = 1 \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{10}$$

Portanto

$$|a_n| \to 1\,, \tag{11}$$

mas a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente.

De 4. (valor 0,25): A afirmação 4. é **F**alsa.

De fato, pois a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dadas por

$$a_n \doteq n \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

$(n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona (estritamente crescente), pois

$$a_n = n < n + 1 = a_{n+1} \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

mas não é convergente (ela diverge para ∞).

$\boxed{\textbf{2.a PARTE}}$

$\boxed{\textbf{4.}^a\ \textbf{Questão:}}$ Dados $a\,,b \in \mathbb{R}$, tais

$$a < b\,, \tag{12}$$

mostre que:

1. mostre que exite $n_o \in \mathbb{N}$, tal que
$$0 < \frac{\sqrt{2}}{n_o} < b - a\,. \tag{13}$$
2. utilizando o item 1. acima, mostre que o intervalo
$$\left[\frac{n_o}{\sqrt{2}}\,a\,,\frac{n_o}{\sqrt{2}}\,b\right]\,,$$
tem comprimento maior que 1;
3. utilizando o item 2. acima, mostre que podemos encontrar $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que
$$\frac{n_o}{\sqrt{2}}\,a < m_o < \frac{n_o}{\sqrt{2}}\,b\,.$$
4. utilizando o item 3. acima, mostre que podemos encontrar um número racional, isto é, do tipo $\dfrac{m_o}{n_o}$, pertencente ao intervalo $(a\,,b)$, ou seja,
$$\frac{\sqrt{2}\,m_o}{n_o} \in (a\,,b)\,.$$
5. Seja
$$\mathbb{I} \doteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,, \tag{14}$$
isto é, o conjunto formado pelos números irracionais.

   Mostre que $\mathbb{I}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Resolução:

De 1. (valor 0,25): Sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{n} = 0\,.$$

Logo, da definição de limite, dado

$$\varepsilon \doteq b - a \overset{(12)}{>} 0\,, \tag{15}$$

podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_o\,, \\ \text{tenhamos} \quad & \underbrace{\left|\frac{\sqrt{2}}{n} - 0\right|}_{=\frac{\sqrt{2}}{n}} < \varepsilon \overset{(15)}{=} b - a\,, \\ \text{ou seja,} \quad & 0 < \frac{\sqrt{2}}{n} < b - a\,. \end{aligned}$$

Em particular, tomando-se $n = n_o$, obtemos (13), completando a demonstração do item 1. .

$\square$

De 2. (valor 0,25): Notemos que, do item 1., temos:

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{n_o} < b - a\,,$$

multiplicando-se a desigualdade por $\dfrac{n_o}{\sqrt{2}} > 0$, obteremos: $\quad 1 < \dfrac{n_o}{\sqrt{2}}\, b - \dfrac{n_o}{\sqrt{2}}\, a\,,$

ou seja, o intevalo

$$\left[\frac{n_o}{\sqrt{2}}\, a\,, \frac{n_o}{\sqrt{2}}\, b\right] \tag{16}$$

terá comprimento maior que 1, completando a demonstração do item 2. .

De 3. (valor 0,25): Como o intervalo (16) tem comprimento maior que 1, podemos encontrar $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$m_o \in \left(\frac{n_o}{\sqrt{2}}\, a\,, \frac{n_o}{\sqrt{2}}\, b\right)$$

ou seja, $\quad \dfrac{n_o}{\sqrt{2}}\, a < m_o < \dfrac{n_o}{\sqrt{2}}\, b\,,$

completando a demonstração do item 3. .

De 4. (valor 0,25): Do itens 1., 2 e 3. acima, podemos concluir a existência de $n_o \in \mathbb{N}$ e $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$\frac{n_o}{\sqrt{2}}\, a < m_o < \frac{n_o}{\sqrt{2}}\, b\,,$$

dividindo-se a desigualdade por $\dfrac{n_o}{\sqrt{2}} > 0$, obteremos: $\quad a < \dfrac{\sqrt{2}\, m_o}{n_o} < b\,,$

ou seja, $\quad \dfrac{\sqrt{2}\, m_o}{n_o} \in (a\,, b)\,,$

completando a demonstração do item 4. .

De 5. (valor 0,25): Consideremos $(a\,, b) \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.
Do item 4. acima, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$ e $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$\frac{\sqrt{2}\, m_o}{n_o} \in (a\,, b)\,.$$

Observemos que $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ e como $m_o \in \mathbb{Z}$ e $n_o \in \mathbb{N}$, segue que

$$\frac{\sqrt{2}\, m_o}{n_o} \in \mathbb{I}\,,$$

ou seja, o conjunto $\mathbb{I}$, dado por (14), é denso em $\mathbb{R}$, completando a demonstração do item 5. .

$\square$

5.ª Questão: (valor 1,0): Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado inferiormente .
Mostre, utilizando as definições de supremo e ínfimo, que o conjunto

$$-X \doteq \{-x\,;\, x \in X\}\,, \tag{17}$$

admite supremo e vale a identidade

$$\sup(-X) = -\inf(X)\,. \tag{18}$$

Resolução:

Como o conjunto X é não vazio, existe

$$x_o \in X\,.$$

Desta forma

$$-x_o \in -X\,,$$

mostrando que $-X$ é não vazio.

Por outro lado, como X é limitado inferiormente, podemos encontrar $l \in \mathbb{R}$, de modo que

$$l \leq x \quad \text{para todo } x \in X\,. \tag{19}$$

Multiplicando-se (19) por -1, obteremos:

$$-\,l \geq -x \quad \text{para todo } x \in X\,. \tag{20}$$

Desta forma se

$$y \in -X\,,$$

da definição do conjunto $-X$ (veja (17)), teremos que

$$y = -x\,, \quad \text{para algum} \quad x \in X\,,$$

$$\text{logo} \quad y = -x \overset{(20)}{\leq} -l\,, \tag{21}$$

ou seja, o número real $-l$ é um limitante superior do conjunto $-X$, assim o conjunto $-X$ é limitado superiormente.

Logo, de um resultado conhecido, podemos concluir que existe o supremo do conjunto $-X$, ou seja,

$$\sup(-X) \in \mathbb{R}\,.$$

Notemos também que, como $\inf(X)$ é um limitante inferior do conjunto X, podemos considerar

$$l \doteq \inf(X)$$

em (21), ou seja, teremos

$$\sup(-X) \leq -\inf(X)\,. \tag{22}$$

Por outro lado, notemos que, para $x \in X$, temos

$$-\,x \leq \sup(-X)\,, \tag{23}$$

multiplicando-se (23) por -1, obteremos:

$$x \geq -\sup(-X)\,,$$

isto é, o número real $-\sup(-X)$ é um limitante inferior do conjunto X.

Como $\inf(X)$ é o maior limitante inferior do conjunto X, deveremos ter

$$-\sup(-X) \leq \inf(X)\,, \tag{24}$$

multiplicando-se (24) por -1, obteremos:

$$\sup(-X) \geq -\inf(X)\,,$$

que juntamente com (22), mostram que

$$\sup(-X) = -\inf(X)\,,$$

mostrando a validade da identidade (18), completando a demonstração.

$\square$

6.ª Questão: (valor 1,5): Sejam $X\,, Y \subseteq \mathbb{R}$ dois conjuntos não vazios e limitados inferiormente.

Mostre que o conjunto $X + Y$ admite ínfimo e vale

$$\inf(X+Y) = \inf(X) + \inf(Y)\,. \tag{25}$$

Resolução:

Lembremos que

$$X+Y \doteq \{x+y\,;\,x\in X \text{ e } y\in Y\}\,. \tag{26}$$

Como os conjuntos $X\,,Y$ são não vazios, existem

$$x_o \in X \quad \text{e} \quad y_o \in Y\,.$$

Desta forma, pela definição do conjunto $X+Y$ (veja (26)), temos que

$$(x_o+y_o)\in X+Y\,,$$

mostrando que o conjunto $X+Y$ é não vazio.

Por outro lado, como os conjuntos $X\,,Y$ são limitados inferiormente, podemos encontrar $l_X\,,l_Y\in\mathbb{R}$, de modo que

$$l_X \le x\,, \quad \text{para todo } x\in X \tag{27}$$
$$\text{e} \quad l_Y \le y \quad \text{para todo } x\in X\,. \tag{28}$$
$$\text{Somando-se (27) e (28), obteremos:} \quad l_X+l_Y \le x+y\,, \quad \text{para todo } x\in X \text{ e } y\in Y\,, \tag{29}$$

mostrando que o número real l_X+l_Y é um limitante inferior do conjunto $X+Y$, ou seja, o conjunto $X+Y$ é limitado inferiormente.

Logo, de um resultado conhecido, podemos concluir que existe o ínfimo do conjunto $X+Y$, ou seja,

$$\inf(X+Y)\in\mathbb{R}\,.$$

Notemos também que, podemos $\inf(X)$ e $\inf(Y)$ são limitantes inferiores dos conjuntos X e Y, respectivamente, ou seja, podemos considerar

$$l_X \doteq \inf(X) \quad \text{e} \quad l_Y \doteq \inf(Y)\,.$$

Em particular, de (29), segue que

$$\inf(X)+\inf(Y) \le x+y\,, \quad \text{para todo } x\in X \text{ e } y\in Y\,, \tag{30}$$

isto é,

(i) o número real $\inf(X)+\inf(Y)$ é um limitante inferior do conjunto $X+Y$.

Mostremos agora que

$$\inf(X)+\inf(Y)$$

é o menor número real com a propriedade **(i)** acima.

De fato, dado $\varepsilon>0$, da definição de ínfimo, segue que existem $x_o\in X$ e $y_o\in Y$, de modo que

$$x_o < \inf(X)+\frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{31}$$
$$y_o < \inf(Y)+\frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{32}$$
$$\text{Somando-se (31) e (32), segue que:} \quad x_o+y_o < \left(\inf(X)+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\left(\inf(Y)+\frac{\varepsilon}{2}\right)\,,$$
$$\text{ou seja,} \quad x_o+y_o < [\inf(X)+\inf(Y)]+\varepsilon\,,$$

ou ainda, podemos encontar $z_o\in X+Y$ (na verdade, $z_o\doteq x_o+y_o$), de modo que

$$z_o < [\inf(X)+\inf(Y)]+\varepsilon\,,$$

mostrando que o número real $[\inf(X)+\inf(Y)]+\varepsilon$ não pode ser limitante inferior do conjunto $X+Y$, ou seja, $\inf(X)+\inf(Y)$ é o maior limitante inferior do conjunto $X+Y$, ou seja,

$$\inf(X+Y)=\inf(X)+\inf(Y)\,,$$

mostrando a validade de (25), completando a demonstração.

□

7.ª Questão: Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências numéricas convergentes para a e b, respectivamente e $c \neq 0$.

Utilizando a definição de convergência de sequências (ou seja, limites), mostre que

1. a sequência numérica $(c\, a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$ para $c\, a$.
2. a sequência numérica $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$ para $a - b$.

Resolução:

Do item 1. (valor 0,75): Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,,$$

dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq n_o\,, \quad \text{teremos:} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}\,. \tag{33}$$

Logo

$$\text{se} \quad n \geq n_o\,, \tag{34}$$

segue que

$$\begin{aligned} |(c\,a_n - (c\,a)| &= |c\,(a_n - a)| \\ &= |c|\,|a_n - a| \\ &\overset{(34)\text{ e }(33)}{\geq} |c|\,\frac{\varepsilon}{|c|} \\ &= \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição e convergência de sequências numéricas, que a sequência $(c\,a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $c\,a$, completando a demostração do item 1. .

Do item 2. (valor 0,75): Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,,$$

dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq n_1 \quad \text{temos} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{35}$$

e

$$\text{se} \quad n \geq n_2 \quad \text{temos} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{36}$$

Logo, tomando-se

$$n_o \doteq \max\{n_1\,, n_2\}\,, \tag{37}$$

temos que,

$$\text{se} \quad n \geq n_o\,,$$

$$\text{de (37), segue que} \quad n \geq n_1 \quad \text{e} \quad n \geq n_2\,, \tag{38}$$

logo, de (35) e (35), teremos:

$$\begin{aligned} |(a_n - b_n) - (a - b)| &= |(a_n - a) - (b_n - b)| \\ &\overset{\text{desigualdade trianglar}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \\ &\overset{n \overset{(38)}{\geq} n_1 \text{ e } n \overset{(38)}{\geq} n_2\text{, logo valem (35) e (36)}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição e convergência de sequências numéricas, que a sequência $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $a - b$, completando a demostração do item 2. .

$\square$

$\boxed{\textbf{F I M}}$